Задача о ближайшем соседе

Дано: функция $f(x, y) \geq 0$ — затраты на обслуживание отрезка дороги

от x до y, $0 \leq x \leq y \leq M$, x, y — целочисленные точки,

n — число отрезков.

Найти: оптимальное разбиение сегмента $[0,M]$ на n отрезков.

Математическая модель:

$$\min \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}, x_k)$$

$$0 = x_0 \leq \ldots \leq x_n = M$$

Алгоритм динамического программирования

S_k(y) — минимальные затраты на обслуживание k отрезков для сегмента $[0, y]$.

Рекуррентные соотношения:

$$S_1(y) = f(0,y), \quad y = 1,\ldots, M$$

$$S_k(y) = \min_{1 \le x \le y} \{S_{k-1}(x) + f(x, y)\}, \quad y = 1,\ldots, M, \quad k = 2,\ldots, n.$$

$$T = O(nM^2) \quad \Pi = O(nM)$$

Оптимизация числа отрезков

Для каждого $n = 1,\ldots, M$ найти $S_n(M)$ и выбрать наименьшее значение

$T = O(M^3)$, $\Pi = O(M^2)$.

Модифицированный вариант

$\widetilde{S}(y)$ — минимальные затраты на обслуживание сегмента $[0, y]$.

Рекуррентные соотношения:

$$\widetilde{S}(0) = 0,$$

$$\widetilde{S}(y) = \min_{0 \le x \le y-1} \{\widetilde{S}(x) + f(x, y)\}, \quad y = 1,\ldots, M.$$

$$T = O(M^2), \quad \Pi = O(M).$$

Замена оборудования

Дано: g — начальная стоимость оборудования,

$\varphi(t)$ — относительная остаточная стоимость на год t

$\psi(t)$ — эксплуатационные затраты за все года от 0 до t.

$S(t) = g(1 - \varphi(t)) + \psi(t)$ — суммарные затраты за все года от 0 до t.

$\sigma(t) = S(t)/t$ — удельные затраты

Критерий оптимизации

$$\sigma(t^*) = \min_{t>0} \sigma(t)$$

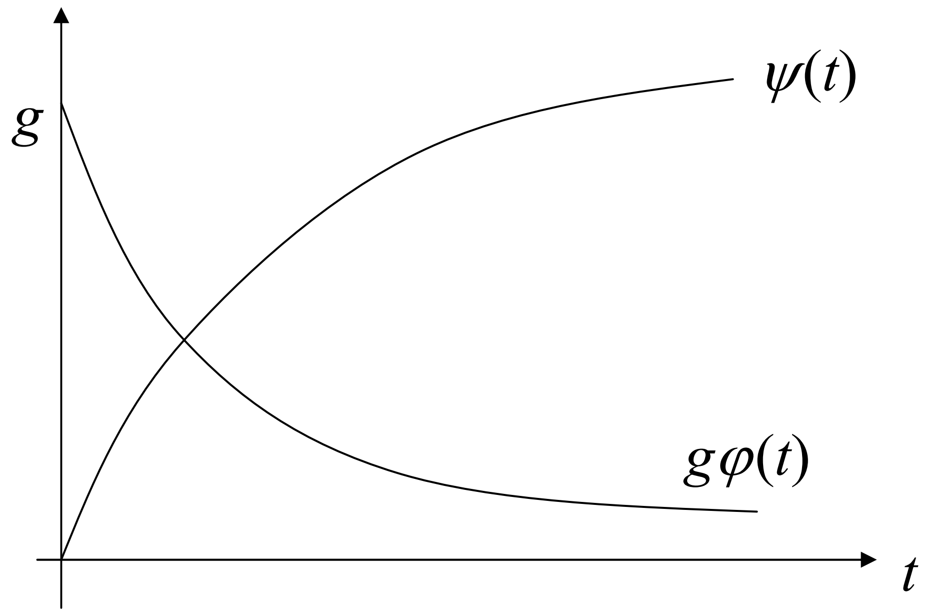
Будем менять оборудование через каждые t^* лет.

Случай 1. $S(t)$ — вогнутая растущая функция.

Пусть $\varphi(t)$ — выпуклая убывающая функция $\varphi(0) = 1$, $\varphi(t) \geq 0$;

$\psi(t)$ — вогнутая растущая функция $\psi(0) = 0$.

Покажем, что $\sigma(t)$ убывает с ростом t.



Так как $S(t)$ — вогнутая функция, то

для любого $\alpha \in [0,1]$ и $t_0 < t_2$ имеем

$(1-\alpha)S(t_0) + \alpha S(t_2) \leq S((1-\alpha)t_0 + \alpha\, t_2)$.

Для $t_1 < t_2$ положим $\alpha = t_1/t_2$, $t_0 = 0$.

Тогда $S(t_0)=0$ и $t_1 S(t_2) \leq t_2 S(t_1)$,

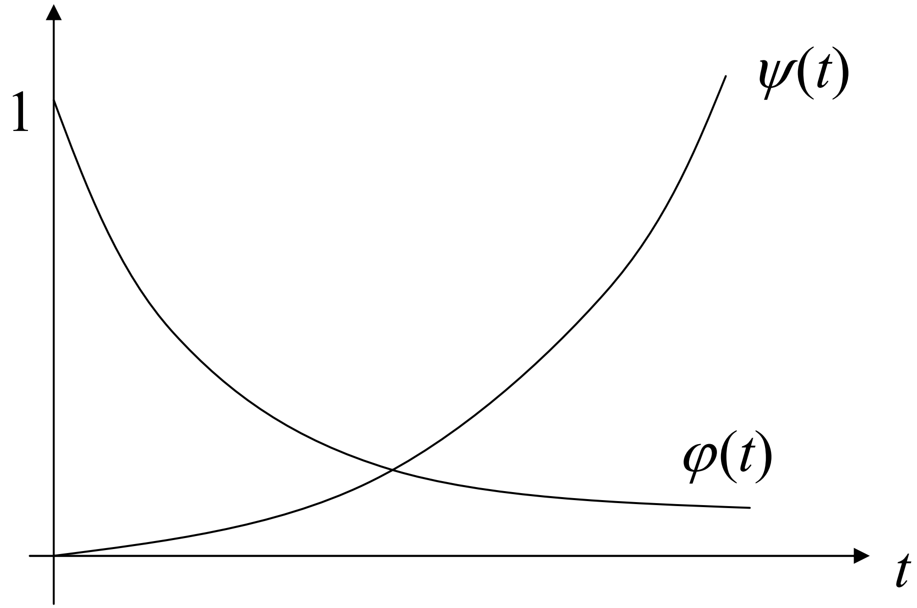
то есть $\sigma(t_1) \geq \sigma(t_2)$. Следовательно, оборудование выгодно эксплуатировать как можно дольше.

Случай 2.

$\varphi(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad \psi(t) = k(\mathrm{e}^{-\mu t} - 1), \quad \lambda > 0,\ k > 0,\ \mu > 0.$

Тогда $\sigma(t) = [g(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}) + k(\mathrm{e}^{-\mu t} - 1)]/t$ — выпуклая функция.

и t^* можно найти методом дихотомии за $O(\log(T/\varepsilon))$ операций, где ε — требуемая точность, T — оценка сверху на t^*.



Задача замены оборудования с учетом дисконтирования затрат

Приведение затрат к начальному моменту

Пусть χ — банковский процент, или коэффициент эффективности капиталовложений (годовая норма дисконта).

Если S_1 — капитал в начальный год, то по истечении года эта сумма станет равной $S_2 = S_1 \cdot (1 + \chi)$, а в конце t-го года $S_t = S_1 \cdot (1 + \chi)^{t-1}$.

Если в год t хотим потратить сумму S_t, то в начальный год должны иметь $S_1 = \dfrac{S_t}{(1+\chi)^{t-1}}$. Затраты S_t в год t, будучи приведенными к начальному моменту $t = 1$, равны

$$\widetilde{S} = \alpha^{t-1} \cdot S_t,$$

где $\alpha = \frac{1}{1+\chi}$ — *коэффициент дисконтирования*, $0 < \alpha \leq 1$.

Если в течении T лет производились траты $S_1, S_2, \dots, S_t$ то суммарные приведенные затраты вычисляются по формуле:

$$\widetilde{S} = \sum_{t=1}^{T} \alpha^{t-1} S_t .$$

Пример. Рассмотрим распределение капитала в 8 млн. руб. в течение 8 лет при банковском проценте $\chi = 0.1$ $(\alpha = 0.91)$ и трех стратегиях:

1) все траты в 1-й год;
2) равномерные траты;
3) все траты в последний год.

Стратегия	Год								Суммарные приведенные затраты
	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	8	–	–	–	–	–	–	–	8.0
2	1	1	1	1	1	1	1	1	5.9
3	–	–	–	–	–	–	–	8	4.2

Постановка задачи

g — начальная стоимость оборудования;

c_t — стоимость эксплуатации оборудования в t год, $c_{t+1} \geq c_t$;

Система функционирует бесконечно, оборудование периодически заменяется.

T — период замены оборудования;

S_T — суммарные затраты при фиксированном периоде замены T:

$$S_T = \underbrace{g + \sum_{t=1}^{T} \alpha^{t-1} c_t}_{\text{за первые } T \text{ лет}} + \underbrace{\alpha^T g + \sum_{t=1}^{T} \alpha^{T+t-1} c_t}_{\text{за вторые } T \text{ лет}} + \underbrace{\alpha^{2T} g + \sum_{t=1}^{T} \alpha^{2T+t-1} c_t}_{\text{…………}} + \ldots \,.$$

Благодаря дисконтированию затрат ($\alpha < 1$) величина S_T конечна:

$$S_T = (g + \sum_{t=1}^{T} \alpha^{t-1} c_t)(1 + \alpha^T + \alpha^{2T} + \ldots) = (g + \sum_{t=1}^{T} \alpha^{t-1} c_t)/(1 - \alpha^T) < \infty .$$

Задача отыскания оптимального периода замены оборудования: $S_T \to \min\limits_{T>0}$

Теорема. Если эксплуатационные затраты c_t не убывают со временем, то оптимальный период замены T^*, если он существует, определяется следующим соотношением

$$T^* = \min\,\{T \mid c_{T+1} > (1-\alpha) S_T,\ \ T > 0, \text{ целое}\}.$$

Оборудование не рекомендуется заменять до тех пор, пока эксплуатационные расходы следующего года не превысят средневзвешенную сумму уже произведенных затрат.

Лемма 1. $\Delta S_{T+1} = S_{T+1} - S_T = K_{T,\alpha}(c_{T+1} - (1-\alpha)S_T),$

где $K_{T,\alpha} = \alpha^T/(1-\alpha^{T+1}), \quad T \geq 1.$

Доказательство. $\Delta S_{T+1} = (g + \sum_{t=1}^{T+1} \alpha^{t-1} c_t)/(1-\alpha^{T+1}) - S_T =$

$$\frac{S_T(1-\alpha^T) + \alpha^T c_{T+1} - S_T(1-\alpha^{T+1})}{1-\alpha^{T+1}} = \frac{\alpha^T}{1-\alpha^{T+1}}(c_{T+1} - (1-\alpha)S_T). \quad \blacksquare$$

Следствие 1. При $T > 0$

$$\Delta S_{T+1} > 0 \Leftrightarrow c_{T+1} > (1-\alpha)S_T.$$

Лемма 2. Пусть существует $T^* = \min\{T \mid \Delta S_{T+1} > 0\}$. Тогда последовательность $\{S_T\}$, $T = T^*, T^*+1, T^*+2, \ldots$ — монотонно возрастающая.

Доказательство проведем индукцией по T.

При $T = T^*$ имеем $\Delta S_{T^*+1} > 0$ и $S_{T^*} < S_{T^*+1}$. Пусть $S_{T^*} < S_{T^*+1} < \ldots < S_T$, $T > T^*$.

Покажем, что $S_T < S_{T+1}$.

Учитывая неубывание последовательности $\{c_t\}$ и положительность ΔS_T, по лемме 1 имеем

$$S_{T+1} - S_T = K_{T,\alpha}(c_{T+1} - (1-\alpha)S_T) \geq K_{T,\alpha}(c_T - (1-\alpha)S_T) =$$

$$= K_{T,\alpha}(c_T - (1-\alpha)S_{T-1} - (1-\alpha)\Delta S_T) = K_{T,\alpha}\left(\Delta S_T /(K_{T-1,\alpha}) - (1-\alpha)\Delta S_T\right) =$$

$$= \frac{\alpha(1-\alpha^{T-1})}{1-\alpha^{T+1}}\Delta S_T > 0. \quad \blacksquare$$

Утверждение теоремы вытекает из следствий 1 и леммы 2. Если T^* не существует, то затраты S_T — невозрастающая функция и оборудование заменять не следует. ■

Применение динамического программирования

Рассмотрим систему, функционирующую в течение T лет, причем решение о замене оборудования принимается каждый год.

Дано: $\{1,\ldots, m\}$ — набор типов оборудования;

g_t^i — стоимость оборудования i-го типа, купленного в год t;

$c_t^i(\tau)$ — стоимость годовых эксплуатационных затрат на оборудование i-го типа, купленного в год t и проработавшего τ лет;

$\Phi_t^i(\tau)$ — остаточная стоимость оборудования i-го типа возраста τ, купленного в год t;

n — максимально допустимый возраст оборудования;

i_0, τ_0 — тип и возраст оборудования в начале функционирования;

Пусть $S_t^i(\tau)$ — минимальные суммарные затраты в интервале $[t, T]$, приведенные к началу t-го года, при условии, что в начале t-го года было оборудование типа i возраста τ. Требуется найти $S_1^{i_0}(\tau_0)$.

Рекуррентные соотношения:

$$S_T^i(\tau) = \min \begin{cases} c_{T-\tau}^i(\tau+1) - \alpha \Phi_{T-\tau}^i(\tau+1), & \text{если замены нет,} \\ \min\limits_{1 \le k \le m} [g_T^k + c_T^k(1) - \alpha \Phi_T^k(1)] - \Phi_{T-\tau}^i(\tau), & \text{в случае замены,} \end{cases}$$

$$1 \le \tau \le n, \quad 1 \le i \le m,$$

$$S_t^i(\tau) = \min \begin{cases} c_{t-\tau}^i(\tau+1) + \alpha S_{t+1}^i(\tau+1), & \text{если продолжаем эксплуатировать оборудование} \\ \min\limits_{1 \le k \le m} [g_t^k + c_t^k(1) + \alpha S_{t+1}^k(1)] - \Phi_{t-\tau}^i(\tau), & \text{если заменяем оборудование} \end{cases}$$

$$1 \le \tau \le n, \quad 1 \le i \le m, \quad 1 \le t < T.$$

Алгоритм может быть реализован с трудоемкостью Т = $O(mnT)$, и памятью П = $O(mnT)$.