

Задача упаковки в контейнеры

Дано: множество предметов $L = \{1, \dots, n\}$ и их веса $w_i \in [0, 1]$, $i \in L$.

Найти: разбиение множества L на минимальное число m подмножеств B_1, B_2, \dots, B_m такое, что

$$\sum_{i \in B_j} w_i \leq 1, \text{ для всех } 1 \leq j \leq m.$$

Множества B_j называют контейнерами.

Требуется упаковать предметы в минимальное число контейнеров.

Задача NP-трудна в сильном смысле и часто возникает в приложениях.

Математическая модель

$$y_j = \begin{cases} 1, & j\text{-й контейнер используется;} \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & i\text{-й предмет лежит в } j\text{-м контейнере;} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^n w_i x_{ij} \leq y_j, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n$$

Алгоритм «Следующий подходящий» (NF)

В произвольном порядке упаковываем предметы по следующему правилу. Первый предмет помещаем в первый контейнер.

На k -м шаге пытаемся поместить k -й предмет в текущий контейнер.

Если предмет входит, то помещаем его и переходим к следующему шагу, иначе помещаем предмет в новый контейнер.

$T = O(n)$, $P = O(1)$, если не считать место для исходных данных.

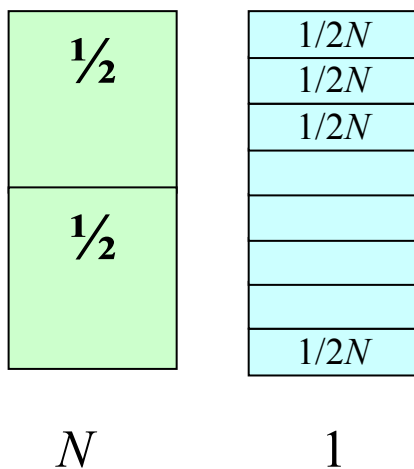
Теорема. $NF(L) \leq 2OPT(L)$.

Доказательство. Пусть $W = \sum_{i \in L} w_i$. Так как любые два последовательных кон-

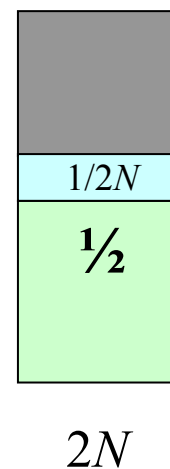
тейнера содержат предметы суммарным весом не меньше единицы, то $NF(L) < 2\lceil W \rceil$. Кроме того, $OPT(L) \geq \lceil W \rceil$, откуда и следует требуемое. ■

Пример

$L = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2N}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2N}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2N}\}$. Всего $4N$ предметов.



$$OPT(L) = N + 1$$



$$NF(L) = 2N$$

Замечание. $NF(L) \leq 2OPT(L) - 1$ для всех L .

Пусть алгоритм A для множества L порождает $A(L)$ контейнеров и

$$R_A(L) \equiv A(L) / OPT(L).$$

Для задачи на минимум гарантированная относительная точность R_A для алгоритма A определяется как

$$R_A \equiv \inf \{r \geq 1 \mid R_A(L) \leq r \text{ для всех } L\}.$$

Определение. Асимптотическая гарантированная относительная точность R_A^∞ для алгоритма A определяется как

$$R_A^\infty \equiv \inf \{r \geq 1 \mid \exists N > 0 \text{ такое, что } R_A(L) \leq r \text{ для всех } L \text{ с } OPT(L) \geq N\}.$$

Алгоритм «Первый подходящий» (FF)

В произвольном порядке упаковываем предметы по следующему правилу. Первый предмет помещаем в первый контейнер.

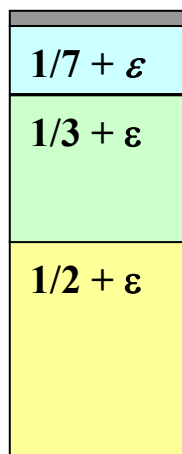
На k -м шаге находим контейнер с наименьшим номером, куда помещается k -й предмет, и помещаем его туда. Если такого контейнера нет, то берем новый пустой контейнер и помещаем предмет в него.

$$T = O(n^2), \quad \Pi = O(n).$$

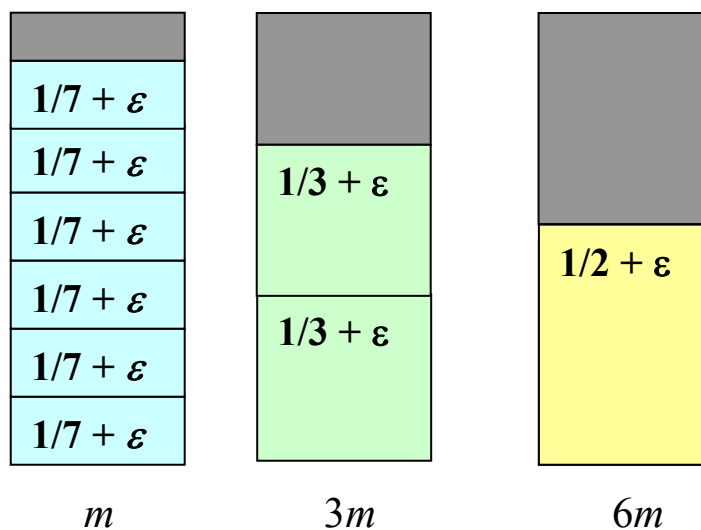
Теорема. $FF(L) \leq \lceil \frac{17}{10} OPT(L) + 1 \rceil$ для всех L и существуют примеры со сколь угодно большими значениями OPT , для которых $FF(L) \geq \lceil \frac{17}{10} OPT(L) - 1 \rceil$.
(Без доказательства)

Пример

$$L = \{1, \dots, 18m\} \quad w_i = \begin{cases} \frac{1}{7} + \varepsilon, & 1 \leq i \leq 6m \\ \frac{1}{3} + \varepsilon, & 6m < i \leq 12m \\ \frac{1}{2} + \varepsilon, & 12m < i \leq 18m \end{cases}$$



$$OPT(L) = 6m$$



$$FF(L) = 10m$$

$$\frac{FF(L)}{OPT(L)} = \frac{5}{3}$$

Алгоритм «Наилучший подходящий» (BF)

В произвольном порядке упаковываем предметы по следующему правилу. Первый предмет помещаем в первый контейнер.

На k -м шаге размещаем k -й предмет. Находим частично заполненные контейнеры, где достаточно для него свободного места и выбираем среди них наиболее заполненный. Если таких нет, то берем новый пустой контейнер и помещаем k -й предмет в него.

$$T = O(n^2), \quad \Pi = O(n).$$

Теорема. $R_{BF} = R_{FF}$, $R_{BF}^{\infty} = R_{FF}^{\infty}$ и существуют примеры со сколь угодно большими значениями $OPT(L)$, для которых $BF(L) = 4/3 FF(L)$ и $FF(L) = 3/2 BF(L)$.

(Без доказательства)

Алгоритмы типа On-line

Предметы поступают в непредсказуемом порядке. Требуется упаковать их в минимальное число контейнеров. Упакованный предмет нельзя перемещать в другой контейнер. Место для предварительного хранения предметов отсутствует.

Алгоритмы NF, FF, BF являются On-line алгоритмами.

Теорема. Для любого On-line алгоритма A справедливо неравенство $R_A^\infty > 1.5$
(Без доказательства)

Алгоритмы с ограниченным доступом к контейнерам

On-line алгоритм называют алгоритмом с ограниченным доступом к контейнерам, если на каждом шаге алгоритм имеет возможность помещать предметы только в один из K контейнеров (K — const). Эти контейнеры называются открытыми. Если контейнер закрыли, то он уже не открывается (например, отправляется потребителю). Прежде чем добавить пустой открытый контейнер, нужно закрыть один из K открытых контейнеров.

Алгоритм NF — пример для $K = 1$.

Правила для выбора контейнера

1. Закрыть контейнер с наименьшим номером
2. Закрыть самый заполненный контейнер.

Примеры алгоритмов с ограниченным доступом

FF_1 — алгоритм FF с правилом 1.

FF_2 — алгоритм FF с правилом 2.

BF_1 — алгоритм BF с правилом 1.

BF_2 — алгоритм BF с правилом 2.

Теорема. Для любого $K \geq 2$

$$1) R_{FF_1}^{\infty} = R_{FF_2}^{\infty} = 1,7 + \frac{3}{10(K-1)}.$$

$$2) R_{BF_1}^{\infty} = 1,7 + \frac{3}{10K}.$$

$$3) R_{BF_2}^{\infty} = 1,7.$$

4) Для любого алгоритма A с ограниченным доступом к контейнерам

$$R_A^{\infty} \geq 1,69103...$$

Алгоритм «Первый подходящий с упорядочиванием» (FFD)

- Сортируем предметы по невозрастанию весов

$$w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n$$

- Применяем алгоритм FF (BF).

Теорема. $FFD(L) \leq \frac{11}{9} OPT(L) + 4$ для всех L и существуют примеры со сколь угодно большими значениями $OPT(L)$, для которых

$$FFD(L) \geq \frac{11}{9} OPT(L).$$

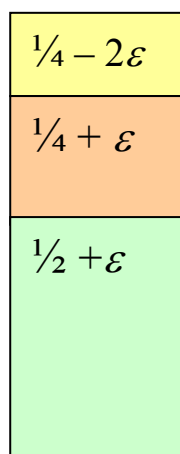
Кроме того $R_{FFD}^{\infty} = R_{BFD}^{\infty} = \frac{11}{9} \approx 1.22$.

(Без доказательства)

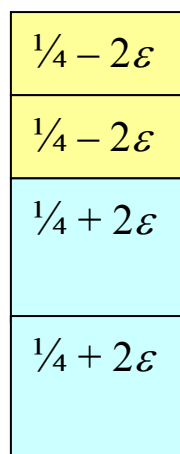
Пример

$$L = \{1, \dots, 30m\}$$

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{2} + \varepsilon, & 1 \leq i \leq 6m \\ \frac{1}{4} + 2\varepsilon, & 6m < i \leq 12m \\ \frac{1}{4} + \varepsilon, & 12m < i \leq 18m \\ \frac{1}{4} - 2\varepsilon, & 18m < i \leq 30m \end{cases}$$

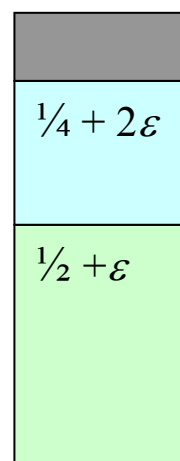


$6m$

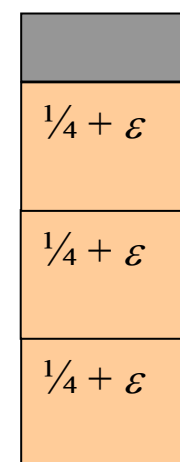


$3m$

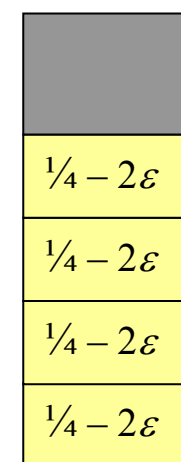
$$OPT(L) = 9m$$



$6m$



$2m$



$3m$

$$FFD(L) = 11m$$

Асимптотические гарантированные оценки точности

Алгоритм	T_A^*	R_A^∞	$R_A^\infty(1/2)$	$R_A^\infty(1/3)$	$R_A^\infty(1/4)$
NF	$O(n)$	2.000	2.000	1.500	1.333
FF	$O(n^2)$	1.700	1.500	1.333	1.250
BF	$O(n^2)$	1.700	1.500	1.333	1.250
NFD	$O(n \log n)$	1.691	1.424	1.302	1.234
FFD	$O(n \log n)$	1.222	1.183	1.183	1.150
BFD	$O(n \log n)$	1.222	1.183	1.183	1.150

$R_A^\infty(\alpha)$ — асимптотическая точность для примеров с весами предметов $w_i \leq \alpha$, для всех $i \in L$.

Теорема. Для любого $\varepsilon \in (0,1]$ существует алгоритм A_ε , который находит упаковку с числом контейнеров не более $(1 + 2\varepsilon) OPT + 1$. Трудоемкость A_ε полиномиально зависит от n .

(Без доказательства)

Алгоритм A_ε

1. Удалить предметы с весом менее ε .
2. Упорядочить оставшиеся предметы и разбить их на $K = \lceil 1/\varepsilon^2 \rceil$ групп.
3. В каждой группе увеличить веса предметов до максимального веса в группе.
4. Найти оптимальную упаковку предметов, имеющих только K различных весов каждый из которых не менее ε .
5. Вернуть исходные веса предметов и применить алгоритм FF для предметов с весом менее ε .

Негативный результат

Теорема. Для любого $\varepsilon > 0$ существование приближенного полиномиально-го алгоритма A с гарантированной точностью $R_A = \frac{3}{2} - \varepsilon$ влечет $P = NP$.

Доказательство. Пусть такой алгоритм A существует. Покажем, как с его помощью можно решить точно одну из NP -полных задач, а именно задачу о разбиении. Дано n неотрицательных чисел a_1, \dots, a_n . Можно ли разбить их на два подмножества так, чтобы сумма чисел в каждом подмножестве равнялась

$C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i$? Рассмотрим задачу упаковки в контейнеры с весами предметов

$w_i = a_i / C$, $i = 1, \dots, n$. Если их можно упаковать в два контейнера, ответ в задаче о разбиении — «ДА». Применим алгоритм A к задаче о контейнерах. Если $OPT = 2$, то алгоритм A тоже дает 2, иначе $R_A \geq \frac{3}{2}$, то есть алгоритм A точный. ■

Нижние оценки

Переменные задачи

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{если используется контейнер } j \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$
$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если предмет } i \text{ помещен в контейнер } j \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Математическая модель

$$\min \sum_{j=1}^n y_j$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^m w_i x_{ij} \leq y_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$y_j, x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Релаксация линейного программирования

Заменим условие Булевости переменных на условия:

$$0 \leq y_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, n$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Тогда одно из оптимальных решений имеет вид

$$x_{ij}^* = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad y_j^* = w_j,$$

что дает нижнюю оценку

$$H_0 = \left[\sum_{i=1}^n w_i \right]$$

(предметы можно резать произвольным образом).

Оценки Martello & Toth

Для примера $L = \{1, \dots, n\}$, $0 \leq w_i < 1$ и произвольного $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ положим

$L_1 = \{ i \in L \mid w_i > 1 - \alpha \}$ — крупные предметы

$L_2 = \{ i \in L \mid 1 - \alpha \geq w_i > \frac{1}{2} \}$ — средние предметы

$L_3 = \{ i \in L \mid \frac{1}{2} \geq w_i \geq \alpha \}$ — мелкие предметы

Теорема. Для любого $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ величина

$$H_1(\alpha) = |L_1| + |L_2| + \max \left(0, \left\lceil \sum_{i \in L_3} w_i - (|L_2| - \sum_{i \in L_2} w_i) \right\rceil \right).$$

является нижней оценкой для $OPT(L)$.

Доказательство. Каждый предмет из множества $L_1 \cup L_2$ требует отдельный контейнер. Поэтому в любом допустимом решении не менее $|L_1| + |L_2|$ контейнеров. Предметы из множества L_3 не лежат вместе с предметами из L_1 . Значит, они лежат либо вместе с предметами из L_2 , либо в отдельных контейнерах. В контейнерах для L_2 осталось $S = \left(|L_2| - \sum_{i \in L_2} w_i \right)$ свободного места.

Следовательно, для предметов из множества L_3 требуется как минимум $\left\lceil \sum_{i \in L_3} w_i - S \right\rceil$ отдельных контейнеров. ■

Теорема. Для любого $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ величина

$$H_2(\alpha) = |L_1| + |L_2| + \max \left\{ 0, \left\lceil \frac{|L_3| - \sum_{i \in L_2} \left\lfloor \frac{1-w_i}{\alpha} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor} \right\rceil \right\}$$

является нижней оценкой для $OPT(L)$.

Доказательство. Заменим вес каждого предмета из множества L_3 на α . Тогда в один контейнер войдет $\left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor$ предметов, и для множества L_3 потребовалось бы $\left\lceil \frac{|L_3|}{\left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor} \right\rceil$ дополнительных контейнеров. Но часть предметов из L_3 можно уложить в контейнеры для L_2 . Каждый из них имеет $1 - w_i$, $i \in L_2$ свободного места, где поместится $\left\lfloor \frac{1 - w_i}{\alpha} \right\rfloor$ предметов из L_3 . ■

Следствие 1. Величина $H = \max\{H_1(\alpha), H_2(\alpha), 0 \leq \alpha \leq 0,5\}$

является нижней оценкой для $OPT(L)$.

Следствие 2. $H \geq H_0 \equiv \left\lceil \sum_{i \in L} w_i \right\rceil$.

Доказательство. При $\alpha = 0$ получаем $H \geq H_1(0) = \max\{|L_2|, H_0\} \geq H_0$.

Как найти H , не перебирая все значения α ?

Следствие 3. Пусть V — множество всех различных значений $w_i \leq 0,5$.

Тогда

$$H = \begin{cases} n, & \text{если } V = \emptyset, \\ \max\{H_1(\alpha), H_2(\alpha), \text{ для } \alpha \in V\}, & \text{если } V \neq \emptyset. \end{cases}$$

т. е. после сортировки предметов получаем $T_H = O(n + n \log n)$.

Дополнительная литература

1. E.G. Coffman, M.R. Garey, D.S. Johnson. Approximation algorithms for bin packing: A survey. <http://www.math.nsc.ru/LBRT/k5/bp-chapter.pdf>
2. Э.Х. Гимади. О некоторых математических моделях и методах планирования крупномасштабных проектов //Модели и методы оптимизации. Труды Института математики. Новосибирск. Наука. Сиб. Отд–ние. 1988. с. 89–115.
3. М. Гэри, Д. Джонсон. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. с. 154–191.