Задача коммивояжера

Введем переменные $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если из города } i \text{ едем в город } j \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$

Математическая модель

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j \in J,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i \in J,$$

(исключение подциклов) $$\sum_{i \in S} \sum_{j \in J \setminus S} x_{ij} \geq 1, \quad \forall S \subset J, S \neq \varnothing,$$

или $$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad \forall S \subset J, S \neq \varnothing,$$

или $$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1, \quad u_i, u_j \geq 0 \quad i, j = 2, \ldots, n$$

Нижние оценки в задаче коммивояжера

Примитивная оценка. Плата за выезд $a_i = \min\limits_{j \neq i} c_{ij}, \;\; i = 1, \ldots, n.$

Плата за въезд $b_j = \min\limits_{i \neq j} (c_{ij} - a_i) \;\; j = 1, \ldots, n.$

Теорема. $OPT(c_{ij}) \geq \sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{j=1}^{n} b_j.$

Доказательство. Положим $c'_{ij} = c_{ij} - a_i, \;\; 1 \leq i, j \leq n.$ Тогда

$OPT(c_{ij}) = OPT(c'_{ij}) + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i.$ Аналогично, $c''_{ij} = c'_{ij} - b_j, \;\; 1 \leq i, j \leq n,$ и

$$OPT(c_{ij}) = OPT(c''_{ij}) + \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \geq \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j. \quad \blacksquare$$

Оценка линейного программирования

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j \in J,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i \in J,$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in J \setminus S} x_{ij} \geq 1, \quad \forall S \subset J, S \neq \varnothing,$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1, \; i, j \in J.$$

задача линейного программирования, дает нижнюю оценку для оптимума, не хуже предыдущей.

1–Деревья для симметричных матриц

Хотим найти гамильтонов цикл минимального веса. Необходимо найти:

– ровно n ребер,

– которые покрывают все вершины,

– имеют минимальный суммарный вес и

– каждая вершина инцидентна ровно двум ребрам.

Заменим последнее условие на следующее:

– одна заданная вершина инцидентна ровно двум ребрам.

Ослабили условия, значит, получим нижнюю оценку.

Алгоритм построения 1-дерева

1. Удаляем заданную вершину и строим остовное дерево минимального веса (алгоритм Крускала, Прима).
2. Добавляем два ребра минимального веса, проходящих через заданную вершину, получаем 1-дерево.

Задача о назначениях

Дано: n рабочих, n станков,

c_{ij} — время выполнения работы i-рабочим на j-м станке.

Найти расстановку рабочих по станкам с минимальным суммарным рабочим временем.

Переменные задачи: $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если рабочий } i \text{ получил станок } j \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$.

Математическая модель:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad 1 \le j \le n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad 1 \le i \le n,$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad 1 \le i,j \le n.$$

Оптимальное решение задачи о назначениях дает нижнюю оценку для задачи коммивояжера, не хуже чем оценка 1–деревьев.

Определение. Пусть $\Delta = (\Delta_1,\ldots, \Delta_n)$ — некоторый вектор. Элемент c_{ij} называется *Δ-минимальным*, если $c_{ij} - \Delta_j \le c_{ik} - \Delta_k$ для всех $1 \le k \le n$.

Теорема. Пусть для некоторого Δ существует набор Δ-минимальных элементов $(c_{1\,j(1)},\ldots, c_{n\,j(n)})$ по одному в каждой строке и столбце. Тогда этот набор является оптимальным решением задачи.

Доказательство. Решение $(c_{1\,j(1)},\ldots, c_{n\,j(n)})$ является допустимым и

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij(i)} = \sum_{i=1}^{n} (c_{ij(i)} - \Delta_{j(i)}) + \sum_{j=1}^{n} \Delta_j .$$

В правой части равенства первая сумма является минимальной среди всех допустимых назначений, а вторая сумма является константой, то есть полученное решение является оптимальным. ■

Определение. Для вектора Δ выделим в каждой строке по одному Δ-минимальному элементу и назовем его *Δ-основой*. Другие Δ-минимальные элементы будем называть *альтернативными Δ-основами*. Число столбцов матрицы c_{ij} без Δ-основ назовем *дефектом*.

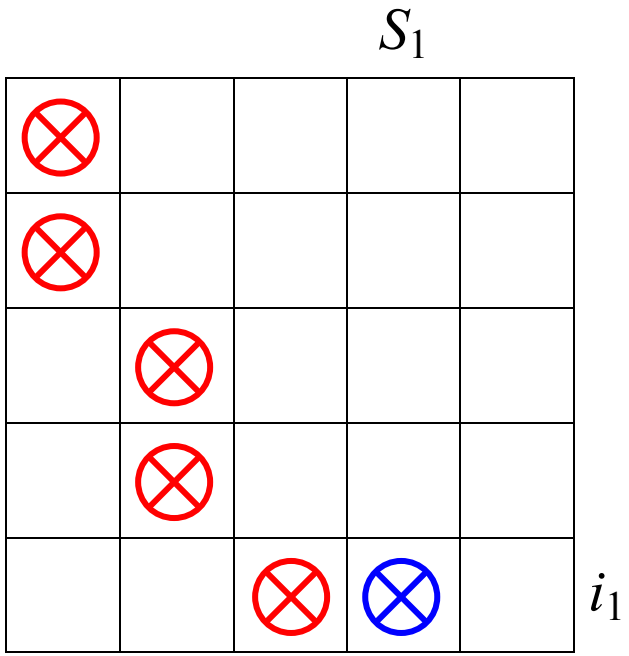
Общая идея алгоритма

Начинаем с $\Delta \equiv 0$. На каждом этапе алгоритма дефект уменьшается на 1, т.е. не более чем за n этапов найдем оптимальное решение задачи.

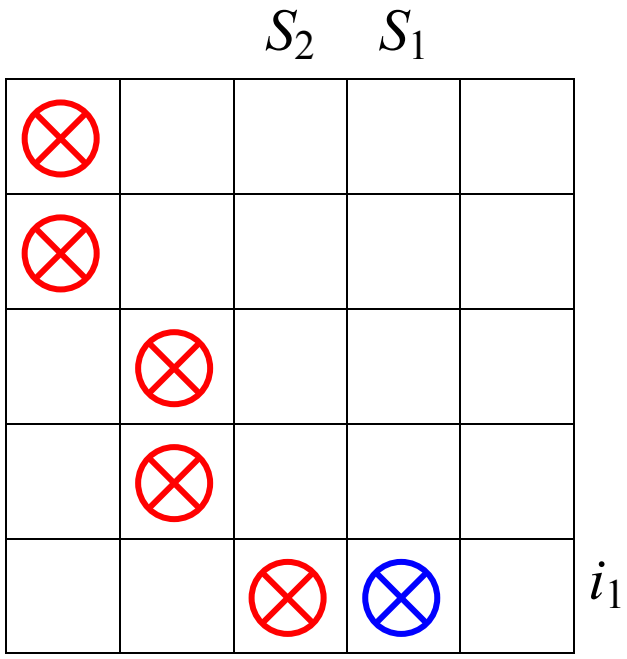
Описание одного этапа

1. Выберем столбец без Δ-основы и обозначим его S_1.

2. Увеличить Δ_{S_1} на максимальное δ так, чтобы все Δ-минимальные элементы остались Δ-минимальными (возможно $\delta = 0$). Получим для некоторой строки i_1 новый Δ-минимальный элемент $c_{i_1 S_1}$, назовем его альтернативной основой для строки i_1.

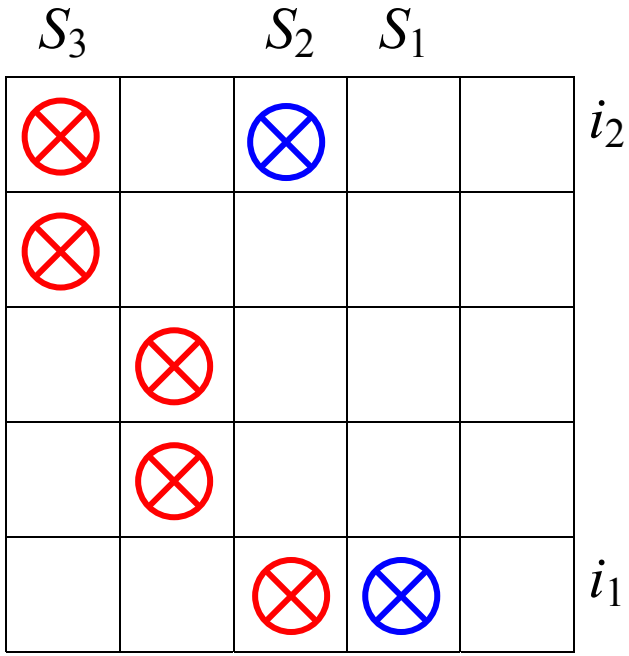


3. Для строки i_1 столбец $j(i_1)$ с Δ-основой пометим меткой S_2.



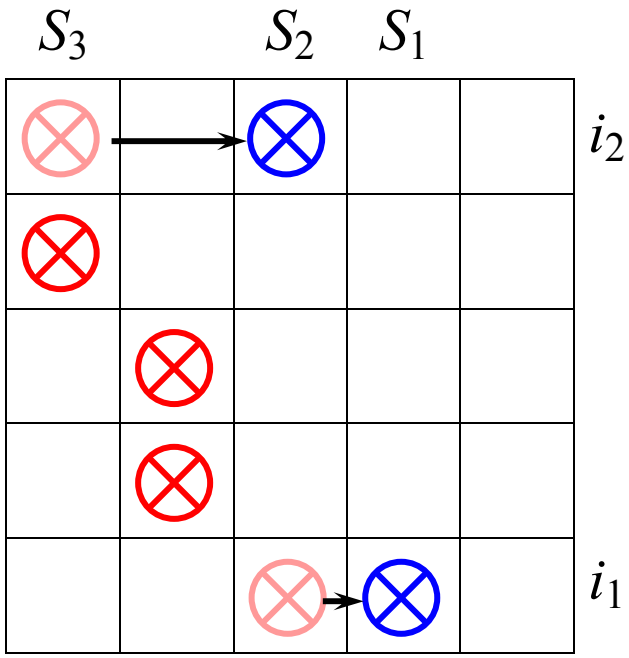
4. Увеличим Δ_{S_1} и Δ_{S_2} на максимальное δ так, чтобы все Δ-основы остались Δ-минимальными элементами.

Найдем новую альтернативную основу в одном из столбцов S_1 или S_2. Пусть она оказалась в строке i_2. Пометим столбец $j(i_2)$ меткой S_3 и будем продолжать этот процесс до тех пор пока не встретим столбец с двумя или более основами.

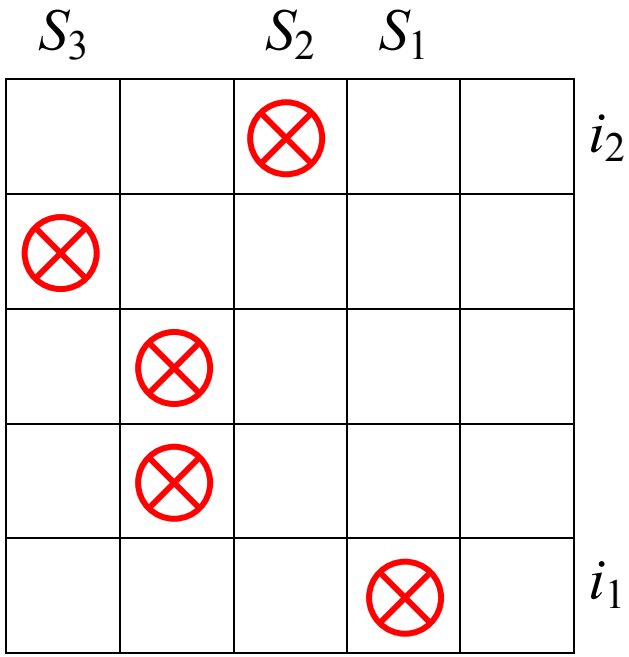


5. Строим новый набор из Δ-основ. Заменой основы в строке назовем следующую операцию: альтернативная основа становится основой, а старая перестает быть основой.

5.1. Произведем замену основ в строке, где лежит последняя альтернативная основа (строка i_k). Тогда в столбце $j(i_k)$ число основ уменьшится на 1, но останется положительным.



В столбце, где появилась новая основа, возьмем старую основу и в этой строке тоже проведем замену основ и т.д. до тех пор, пока не доберемся до столбца S_1. В итоге, столбец S_1 получит основу, а число основ в столбце $j(i_k)$ уменьшится на 1.



Упражнение. Оценить трудоемкость алгоритма решения задачи о назначениях.

Модификация алгоритма решения задачи о назначениях

Пусть S – множество номеров отмеченных столбцов,

R – множество номеров отмеченных строк без альтернативных основ

$$\delta = \min_{i \in R, k \in S} [(a_{ik} - \Delta_k) - (a_{ij(i)} - \Delta_{j(i)})]$$

Перепишем $\delta = \min_{k \in S} (\min_{i \in R} [(a_{ik} - \Delta_k) - (a_{ij(i)} - \Delta_{j(i)})])$

Модификация алгоритма, позволяющая быстро находить

$\min_{i \in R} [(a_{ik} - \Delta_k) - (a_{ij(i)} - \Delta_{j(i)})]$ и требующая $Cn^3 \lg n$ действий.

Пусть для записи упорядочения имеется массив из n ячеек.

В ячейке, соответствующей некоторому элементу массива, храним указатель на предыдущий и последующий (в смысле упорядочения) элементы, т.е. их номера.

При вычеркивании некоторого элемента массива меняется информация в ячейках для соседей этого элемента по упорядочению. Вместо указателей на вычеркиваемый элемент поставим указатели на его противоположного соседа.

Первоначальное упорядочение требует $Cn\lg n$ действий.

Для каждого $k \in S$ используем этот способ для быстрого нахождения $\min\limits_{i \in R}[(a_{ik} - \Delta_k) - (a_{ij(i)} - \Delta_{j(i)})]$.

Пусть $b_{ik} = [(a_{ik} - \Delta_k) - (a_{ij(i)} - \Delta_{j(i)})]$. Каждый из столбцов (b_{ik}) упорядочим и запишем это упорядочение по столбцам таблицы.

Отдельно выпишем строчку минимумов по столбцам равным $\min\limits_{i} b_{ik}$ в начале итерации.

В процессе проведения итерации должны вычеркивать из матрицы B строки, в которых появились альтернативные основы, с тем, чтобы минимум по столбцам матрицы был искомым $\min\limits_{i \in R} b_{ik}$.

Метод ветвей и границ

В основе метода лежит принцип «разделяй и властвуй».

Пусть D — множество допустимых решений задачи

$$\min \{f(x) \mid x \in D\},$$

и для любого подмножества $d \subseteq D$ умеем вычислять:

$LB(d)$ — нижнюю оценку для минимума $f(x)$, $x \in d$,

$UB(d)$ — верхнюю оценку для минимума $f(x)$, $x \in d$,

т. е.

$$LB(d) \le \min \{f(x) \mid x \in d\} \le UB(d), \text{ для любого } d \subseteq D.$$

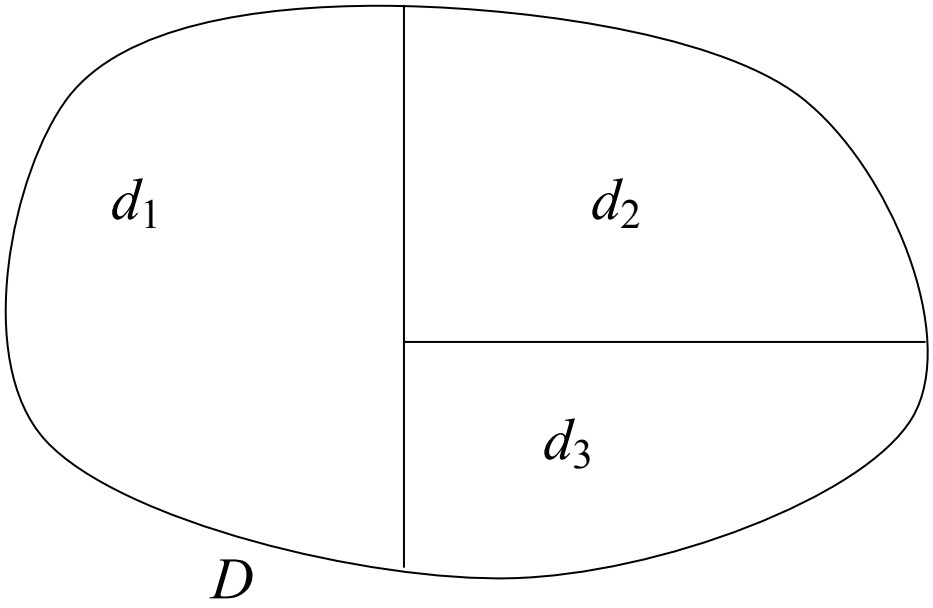
Основная идея

Пусть x^* — текущий рекорд и сначала $f(x^*) = UB(D)$. Вычисляем $LB(D)$ и, если $LB(D) = UB(D)$, то STOP, x^* — оптимальное решение задачи. В противном случае разбиваем D на подмножества $D = d_1 \cup \ldots \cup d_k$. Для каждого подмножества вычисляем $UB(d_i)$, $LB(d_i)$, $i = 1,\ldots, k$.

Если $f(x^*) > UB(d_i)$, то меняем рекорд.

Если $LB(d_i) \geq f(x^*)$, то выбрасываем d_i, иначе дробим d_i на подмножества.

Так как D — конечное множество, то процесс конечен и дает точное решение задачи.



Описание метода

На каждом шаге имеется

– рекорд x^*;

– просмотренная часть $P \subset D$, для которой $f(x) \geq f(x^*)$, $x \in P$;

– разбиение множества $D \setminus P$ на подмножества $d_{i_1}, d_{i_2}, ..., d_{i_k}$.

Шаг состоит в следующем.

1. Выбрать элемент разбиения, например, d_{i_k};
2. Вычислить $UB(d_{i_k})$. Если $f(x^*) > UB(d_{i_k})$, то сменить рекорд x^*.
3. Вычислить $LB(d_{i_k})$.

3.1. Если $LB(d_{i_k}) \geq f(x^*)$, то добавить d_{i_k} к P и перейти к следующему шагу.

3.2. Если $LB(d_{i_k}) \leq f(x^*)$, но в множестве d_{i_k} удалось найти наилучший элемент $\tilde{x}$: $f(\tilde{x}) = \min\{f(x) \mid x \in d_{i_k}\}$, то добавить d_{i_k} к P; если $f(x^*) > f(\tilde{x})$, то положить $x^* := \tilde{x}$.

3.3. Если $LB(d_{i_k}) \leq f(x^*)$, но элемент $\tilde{x}$ найти не удалось, то разбиваем d_{i_k} на подмножества $d_{i_k} = d_{i_{k+1}} \cup ... \cup d_{i_{k+m}}$ и переходим к следующему шагу, имея новое разбиение для $D \setminus P$.

Метод B&Г для задачи коммивояжера

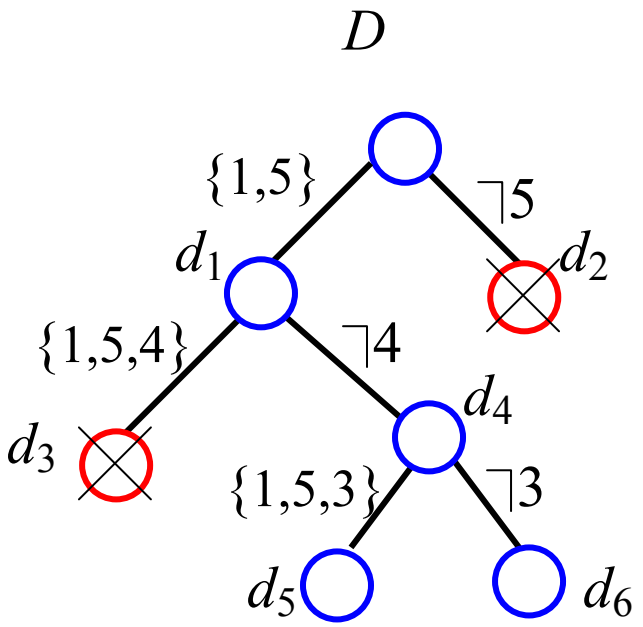
Разбиение множества D представляется в виде бинарного дерева.

Каждой вершине дерева соответствует частичный тур и список запретов.

Например, вершине d_6 соответствует

частичный тур 1,5 и запреты {4,3}

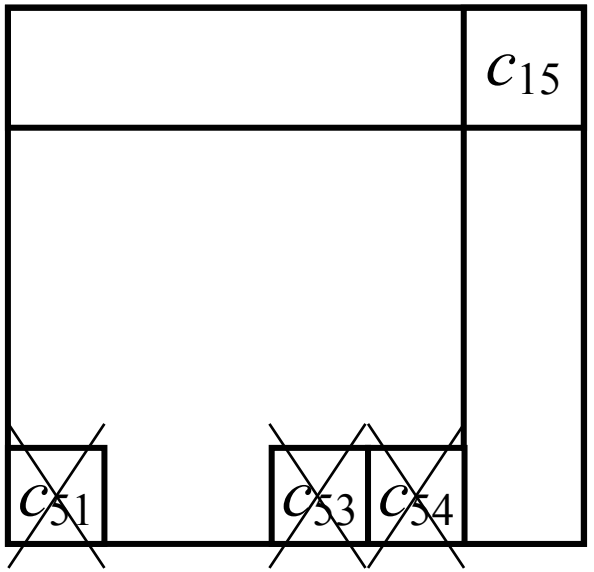
на выход из города 5.



Метод B&Г для задачи коммивояжера

Примитивная нижняя оценка для вершины дерева, например, d_6 при $n = 5$:

$$LB(d_6) = c_{15} + \sum_{i=2}^{5} a_i + \sum_{j=1}^{4} b_j.$$



Задача о назначениях:

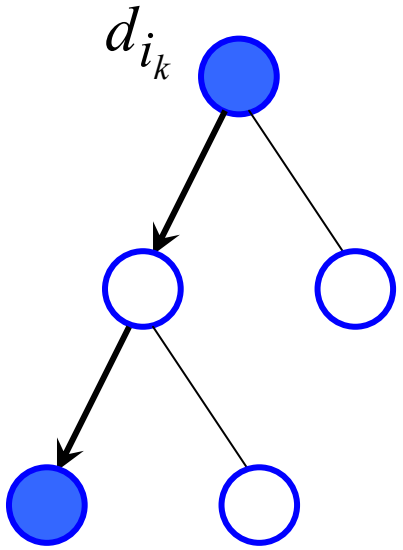
$$LB(d_6) = c_{15} + \sum_{i=2}^{5} c_{ij(i)}, \text{ при } c_{53} = c_{54} = c_{51} = +\infty.$$

Верхняя оценка — алгоритм «Иди в ближайший».

Выбор переменной для ветвления

Основная идея — угадать оптимальное решение на подмножестве d_{i_k} и ветвиться по дугам этого тура:

- для частичного тура $i_1,\ldots, i_k$ выбираем минимальный элемент в строке i_k матрицы $c''_{ij} = c_{ij} - a_i - b_j, j \neq i_1,\ldots,i_k$
- для частичного тура $i_1,\ldots, i_k$ строим верхнюю оценку и ветвимся по дуге $(i_1,\ldots, i_{k+1})$.
- для частичного тура $i_1,\ldots, i_k$ решаем задачу о назначениях и ветвимся вдоль цикла, проходящего через вершину i_k.



Выбор подмножества из разбиения $D \setminus P$

Две основные схемы:

- ***многосторонняя схема ветвления***, когда выбирается подмножество d' такое, что

  $$LB(d') = \min \{LB(d_i) \mid i = i_1, \ldots, i_k\}.$$

  Среди элементов разбиения $D \setminus P = d_{i_1} \cup \ldots d_{i_k}$ выбирается подмножество с наименьшей нижней границей.

- ***односторонняя схема ветвления***, когда всегда выбираем последний элемент $d' = d_{i_k}$.

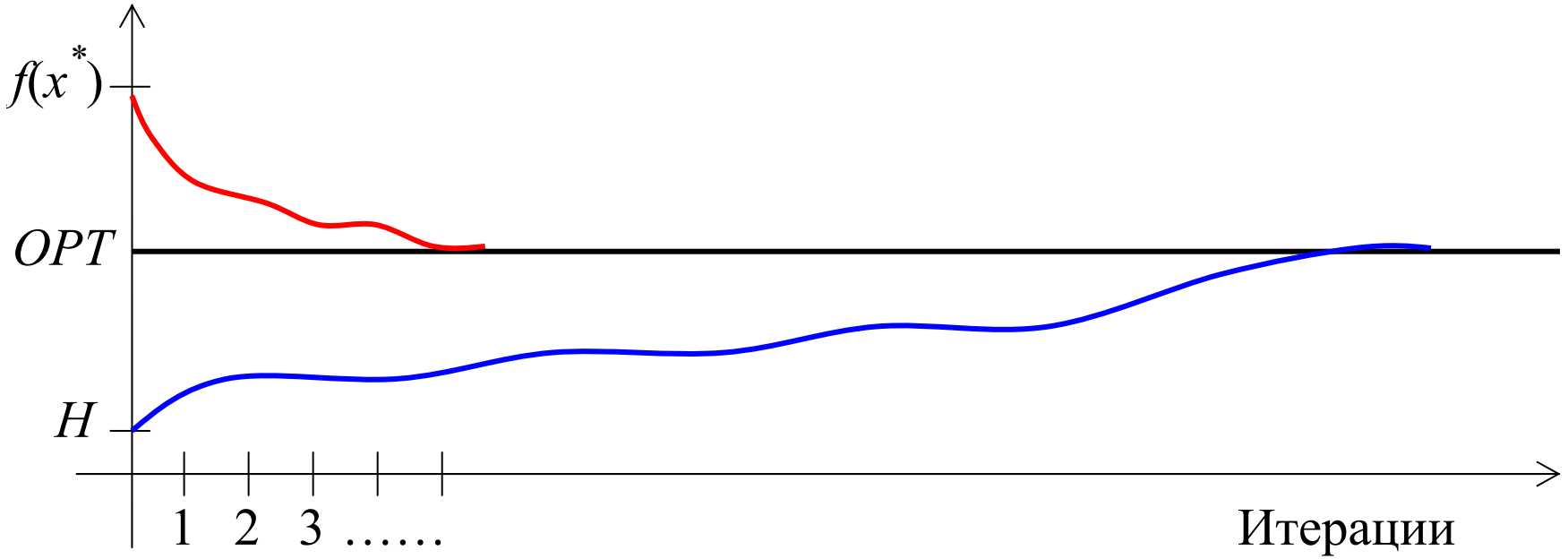
Первая схема требует много оперативной памяти, но в среднем просматривает меньше вершин, чем вторая. Возможна комбинация этих схем: сначала первая, пока хватает памяти, затем вторая.

Влияние основных элементов на трудоемкость

Верхняя оценка *UB*

Нижняя оценка *LB*

Схема ветвления и выбор переменной для ветвления



$$H = \min_{i_1,\ldots,i_k} LB(d_i)$$

Задача коммивояжера в Интернет

- TSPBIB Home Page
  http://www.ing.unlp.edu.ar/cetad/mos/TSPBIB_home.html
- The Hamiltonian Page: **Hamiltonian cycle and path problems, their generalizations and variations**
  http://www.ing.unlp.edu.ar/cetad/mos/Hamilton.html

- Fractal Instances of the Traveling Salesman Problem
  http://www.ing.unlp.edu.ar/cetad/mos/FRACTAL_TSP_home.html

- **DIMACS:** The Traveling Salesman Problem
  http://www.research.att.com/~dsj/chtsp/

Задача маршрутизации

Дано: множество клиентов $J = \{2, 3, \ldots, n\}$,

$j = 1$ — гараж,

множество грузовиков $K = \{1, \ldots, m\}$

Q_k — грузоподъемность k-го грузовика

q_j — вес груза для j-го клиента

c_{ij} — расстояние между клиентами i и j.

Найти: набор циклов, начинающихся и заканчивающихся в гараже $j = 1$ (по одному циклу на транспортное средство) такой, что суммарная длина циклов была бы минимальной и позволила бы обслужить всех клиентов данным набором транспортных средств.

Математическая модель

Переменные задачи

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если транспорт } k \text{ посещает клиента } j \text{ сразу после клиента } i, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$y_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если транспорт } k \text{ посещает клиента } i, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Модель

$$\min \sum_{ij \in J} c_{ij} \sum_{k \in K} x_{ijk}$$

при ограничениях

$$\sum_{k \in K} y_{ik} = \begin{cases} 1, & i = 2,\ldots,n \\ m, & i = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{i \in J} y_{ik} q_i \le Q_k, \quad k \in K$$

$$\sum_{j} x_{ijk} = \sum_{j} x_{jik} = y_{ik}, \quad i \in J, k \in K$$

$$\sum_{ij \in S} x_{ijk} \le |S| - 1, \text{ для всех } S \subseteq \{2,\ldots,n\}, \quad k \in K$$

$$y_{ik} \in \{0,1\}, \quad x_{ijk} \in \{0,1\}, \quad i,j \in J, \quad k \in K.$$

Возможные обобщения модели

1. Каждый клиент имеет «временное окно», в течение которого транспортное средство должно его посетить.
2. Клиенты могут не только получать продукцию, но и отправлять ее в гараж.
3. Обслуживание клиентов происходит не мгновенно, а в течение определенного времени: разгрузка, загрузка, оформление документов и т.п.
4. Транспортное средство может несколько раз вернуться в гараж (пройти несколько циклов).
5. Транспортное средство имеет временное окно (рабочий день водителя) для обслуживания клиентов.

Целевые функции

- Суммарное расстояние или расход бензина (каждое транспортное средство имеет свой расход на 100 км).
- Зарплата водителей и эксплуатационные расходы на транспортные средства.
- Оптимизация парка транспортных средств (расширить или сузить, заменить тяжелые на легкие или наоборот, …).
- Оптимальное размещение гаражей, их количество и вместимость.

Системы поддержки решений по оперативному управлению транспортными средствами, замена водителей, форс-мажорные обстоятельства, изменения потребностей клиентов,….