

**Программа курса
«ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ»
1-й курс, 1-й поток ММФ НГУ,
осенний семестр 2023-2024 уч. года**

лектор – Н.Т. Когабаев

ГЛАВА I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ.

Некоторые аксиомы теории множеств.

Некоторые аксиомы теории множеств Цермело-Френкеля. Основные операции над множествами. Упорядоченные кортежи. Декартово произведение. Отношение эквивалентности. Фактор-множество. Отношения и функции на множествах. [1, §1], [4, §10, §14]

Время работы алгоритмов и сортировки чисел.

Время работы алгоритма. Использование O -символики. Сортировка вставкой. Время работы алгоритма сортировки вставкой в наилучшем и наихудшем случаях. Сортировка слиянием. Время работы алгоритма сортировки слиянием. [1, §2], [2, §§0.3, 2.3], [8, §§2.1–2.3, 3.1]

ГЛАВА II. АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РАБОТЫ С ГРАФАМИ.

Базовые понятия теории графов.

Ориентированные и неориентированные графы. Пути и циклы в графах. Достижимость вершин графа. Сильно связные и связные компоненты графа. Деревья и их свойства. [1, §3], [2, §3.1], [8, §§Б.4–Б.5]

Поиск в ширину.

Описание алгоритма поиска в ширину. Использование очереди при поиске. Расстояния от исходной вершины до достижимых вершин. Свойства очереди. Дерево поиска. Корректность поиска в ширину. Время работы алгоритма. [1, §4], [2, §§4.1–4.2], [8, §22.2]

Поиск в глубину.

Описание алгоритма поиска в глубину. Использование рекурсии при поиске. Метки открытия и завершения вершин. Лес поиска. Корректность поиска в глубину. Скобочные выражения из меток. Описание потомков и предков в лесу поиска. Классификация рёбер графа. Время работы алгоритма. [1, §5], [2, §§3.2–3.3], [8, §22.3]

Алгоритм Дейкстры.

Задача о кратчайшем пути во взвешенном ориентированном графе. Описание алгоритма Дейкстры. Ослабление рёбер. Использование очереди с приоритетами. Дерево кратчайших путей. Корректность алгоритма Дейкстры. Время работы алгоритма. [1, §6], [2, §§4.3–4.5], [8, §§24.3, 24.5]

ГЛАВА III. КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ И РЕГУЛЯРНЫЕ ЯЗЫКИ.

Алфавиты и формальные языки.

Понятия алфавита и слова. Подслова, префиксы и суффиксы. Операции над словами. Понятие формального языка. Операции объединения, пересечения, дополнения, конкатенации и звёздочки Клини над языками. [1, §8], [6, §1.1], [16, §1.7]

Детерминированные конечные автоматы.

Определение детерминированных конечных автоматов. Их графическое изображение. Пути в автомате. Языки, распознаваемые детерминированными конечными автоматами. [1, §9], [6, §2.2], [16, §2.1]

Недетерминированные конечные автоматы.

Определение недетерминированных конечных автоматов. Языки, распознаваемые недетерминированными конечными автоматами. Теорема о детерминизации недетерминированных конечных автоматов. [1, §10], [6, §2.2]

Недетерминированные конечные автоматы с пустыми переходами.

Определение недетерминированных конечных автоматов с пустыми переходами. Языки, распознаваемые

недетерминированными конечными автоматами с пустыми переходами. Теорема об элиминации пустых переходов. Эквивалентность трёх видов конечных автоматов. [1, §11], [16, §2.2]

Свойства автоматных языков.

Замкнутость автоматных языков относительно объединения, пересечения, дополнения, конкатенации и звёздочки Клини. Автоматность конечных языков. Лемма о накачивании. Существование неавтоматных языков. [1, §12], [6, §2.3], [16, §§2.3–2.4]

Регулярные выражения и языки.

Регулярные выражения. Определение регулярных языков. Теорема о совпадении класса регулярных и класса автоматных языков. Построение автомата по заданному регулярному выражению. Построение регулярного выражения по заданному автомату. [1, §13], [6, §2.1, §2.3], [16, §2.3]

ГЛАВА IV. ФОРМАЛИЗАЦИИ ПОНЯТИЯ ВЫЧИСЛИМОЙ ФУНКЦИИ.

Определение машины Тьюринга.

Описание машины Тьюринга. Формальное определение машины Тьюринга. Машинные слова и отношения перерабатываемости одних машинных слов в другие. Определение функции, вычислимой по Тьюрингу. Композиция и разветвление машин Тьюринга. [1, §15], [9, §3.2], [10, §12], [18]

Базовые машины Тьюринга.

Перенос нуля. Обнуление. Правый и левый сдвиги. Транспозиция. Удвоение. Циклический сдвиг. Копирование. [1, §16], [9, §3.2], [10, §12], [18]

Частично рекурсивные функции.

Простейшие функции. Операторы суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Определения примитивно рекурсивных, частично рекурсивных и рекурсивных функций. Вычислимость по Тьюрингу простейших функций. Замкнутость семейства вычислимых по Тьюрингу функций относительно операторов суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Теорема о вычислимости ч.р.ф. на машинах Тьюринга. [1, §17], [7, §§3.1–3.2], [10, §2, §12], [18]

Рекурсивность некоторых функций и отношений.

Примитивная рекурсивность нульместных функций и функций $x + y$, $x \cdot y$, x^y , $\text{sg}(x)$, $\overline{\text{sg}}(x)$, $x \dot{-} y$, $|x - y|$. Суммы и произведения с переменным верхним индексом суммирования (произведения). Ограниченная минимизация. Рекурсивные и примитивно рекурсивные отношения. Замкнутость (примитивно) рекурсивных отношений относительно конъюнкции, дизъюнкции, импликации, отрицания и ограниченных кванторов существования и всеобщности. Примитивная рекурсивность отношений $=$, \neq , $<$, $>$, \leq , \geq на натуральных числах. Кусочное задание (примитивно) рекурсивных функций. Примитивная рекурсивность функций $[x/y]$, $\text{p}(x)$, $\text{ex}(i, x)$, $\text{long}(x)$ и отношений $\text{Div}(x, y)$, $\text{Prime}(x)$. Теорема о частичной рекурсивности функций, вычислимых по Тьюрингу (схема доказательства). [1, §18–21], [9, §3.1–3.3], [10, §§2–3]

ТЕМЫ СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ:

1. Теоретико-множественные операции. Упорядоченные кортежи. Функции и отношения.
2. Время работы алгоритмов. O -символика. Сортировки вставкой и слиянием.
3. Базовые понятия теории графов.
4. Алгоритм поиска в ширину. (Если позволяет время, разобрать доказательства свойств и корректности алгоритмов.)
5. Алгоритм поиска в глубину. (Если позволяет время, разобрать доказательства свойств и корректности алгоритмов.)
6. Алгоритм Дейкстры. (Если позволяет время, разобрать доказательства свойств и корректности алгоритма.)
7. Детерминированные конечные автоматы.
8. Недетерминированные конечные автоматы. Теорема о детерминизации.
9. Недетерминированные конечные автоматы с пустыми переходами. Теорема об элиминации пустых переходов. Эквивалентность трёх видов конечных автоматов.
10. Свойства автоматных языков. Лемма о накачивании. Примеры неавтоматных языков.
11. Регулярные выражения и языки. Построение автомата по заданному регулярному выражению. Построение регулярного выражения по заданному автомату.

12. Машины Тьюринга. Базовые машины Тьюринга. Композиция и разветвление машин.
13. Машины Тьюринга. Функции, вычислимые по Тьюрингу.
14. Прimitивно рекурсивные функции. Ограниченная минимизация.
15. Неограниченная минимизация. Частично рекурсивные функции.
16. Рекурсивные и примитивно рекурсивные отношения.

Список основной литературы:

- [1] Н. Т. Когабаев, *Дискретная математика и теория алгоритмов*, Новосибирск, НГУ, 2023, онлайн-версия в электронной библиотеке НГУ: <http://e-lib.nsu.ru/dsweb/Get/Resource-8385/page00000.pdf>

Список дополнительной литературы:

- [2] С. Дасгупта, Х. Пападимитриу, У. Вазирани, *Алгоритмы*, Москва, МЦНМО, 2014.
- [3] Ю. Л. Ершов, *Теория нумераций*, Москва, Наука, 1977.
- [4] Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин, *Математическая логика*, Санкт-Петербург, Лань, 2004.
- [5] Т. Йех, *Теория множеств и метод форсинга*, Москва, Мир, 1973.
- [6] В. Н. Касьянов, *Лекции по теории формальных языков, автоматов и сложности вычислений*, Новосибирск, НГУ, 1995.
- [7] Н. Т. Когабаев, *Лекции по теории алгоритмов*, Новосибирск, НГУ, 2009.
- [8] Т. Х. Кормен, Ч. И. Лейзерсон, Р. Л. Ривест, К. Штайн, *Алгоритмы: построение и анализ*, 2-е изд., Москва, Издательский дом "Вильямс", 2005.
- [9] И. А. Лавров, Л. Л. Максимова, *Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов*, Москва, Наука, 1984.
- [10] А. И. Мальцев, *Алгоритмы и рекурсивные функции*, Москва, Наука, 1986.
- [11] Э. Мендельсон, *Введение в математическую логику*, Москва, Наука, 1971.
- [12] А. С. Морозов, *Машины Шёнфилда*, Методические указания, Новосибирск, НГУ, 1996.
- [13] Х. Роджерс, *Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость*, Москва, Мир, 1972.
- [14] Р. И. Соар, *Вычислимо перечислимые множества и степени*, Казань, Казанское мат. общество, 2000.
- [15] В. Khoussainov, A. Nerode, *Automata Theory and Its Applications*, Boston, Birkhauser, 2001.
- [16] Н. Р. Lewis, С. Н. Papadimitriou, *Elements of the Theory of Computation*, New Jersey, Plentice Hall, 1998.
- [17] J. R. Shoenfield, *Recursion Theory*, Lecture Notes in Logic, Berlin, Springer-Verlag, 1993.

Онлайн-симулятор машины Тьюринга:

- [18] A. Morphett, *A Web-based Turing Machine Simulator*, <http://morphett.info/turing/>