

**Программа курса
«ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ»
1-й курс, 1-й поток ММФ НГУ,
осенний семестр 2024-2025 уч. года**

лектор – Н.Т. Когабаев

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ.

Некоторые аксиомы теории множеств.

Некоторые аксиомы теории множеств Цермело-Френкеля. Основные операции над множествами. Упорядоченные кортежи. Декартово произведение. Отношения и функции на множествах. [1, §1], [4, §10, §14]

Алфавиты и формальные языки.

Понятия алфавита и слова. Подслова, префиксы и суффиксы. Операции над словами. Понятие формального языка. Операции объединения, пересечения, дополнения, конкатенации и звёздочки Клини над языками. [1, §8], [6, §1.1], [16, §1.7]

2. КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ И ФОРМАЛЬНЫЕ ГРАММАТИКИ.

Детерминированные конечные автоматы.

Определение детерминированных конечных автоматов. Их графическое изображение. Пути в автомате. Языки, распознаваемые детерминированными конечными автоматами. [1, §9], [6, §2.2], [16, §2.1]

Недетерминированные конечные автоматы.

Определение недетерминированных конечных автоматов. Языки, распознаваемые недетерминированными конечными автоматами. Теорема о детерминизации недетерминированных конечных автоматов. [1, §10], [6, §2.2]

Недетерминированные конечные автоматы с пустыми переходами.

Определение недетерминированных конечных автоматов с пустыми переходами. Языки, распознаваемые недетерминированными конечными автоматами с пустыми переходами. Теорема об элиминации пустых переходов. Эквивалентность трёх видов конечных автоматов. [1, §11], [16, §2.2]

Свойства автоматных языков.

Замкнутость автоматных языков относительно объединения, пересечения, дополнения, конкатенации и звёздочки Клини. Автоматность конечных языков. Лемма о накачивании. Существование неавтоматных языков. [1, §12], [6, §2.3], [16, §§2.3–2.4]

Регулярные выражения и языки.

Регулярные выражения. Определение регулярных языков. Теорема о совпадении класса регулярных и класса автоматных языков. Построение автомата по заданному регулярному выражению. Построение регулярного выражения по заданному автомату. [1, §13], [6, §2.1, §2.3], [16, §2.3]

Формальные грамматики.

Определение и примеры формальных грамматик. Определение языка, порождённого грамматикой. Контекстно-свободные и регулярные грамматики. Теорема о совпадении класса языков, порождаемых регулярными грамматиками, и класса автоматных языков. [1, §14], [6, §1.2, §1.3, §2.3], [16, §§3.1–3.2]

3. ФОРМАЛИЗАЦИИ ПОНЯТИЯ ВЫЧИСЛИМОЙ ФУНКЦИИ.

Определение машины Тьюринга.

Описание машины Тьюринга. Формальное определение машины Тьюринга. Машинные слова и отношения перерабатываемости одних машинных слов в другие. Определение функции, вычислимой по Тьюрингу. Композиция и разветвление машин Тьюринга. [1, §15], [9, §3.2], [10, §12], [18]

Базовые машины Тьюринга.

Перенос нуля. Обнуление. Правый и левый сдвиги. Транспозиция. Удвоение. Циклический сдвиг. Копирование. [1, §16], [9, §3.2], [10, §12], [18]

Частично рекурсивные функции.

Простейшие функции. Операторы суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Определения примитивно рекурсивных, частично рекурсивных и рекурсивных функций. Вычислимость по Тьюрингу простейших функций. Замкнутость семейства вычислимых по Тьюрингу функций относительно операторов суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Теорема о вычислимости ч.р.ф. на машинах Тьюринга. [1, §17], [9, §§3.1–3.2], [10, §2, §12], [18]

Рекурсивность некоторых функций и отношений.

Примитивная рекурсивность нульместных функций и функций $x + y$, $x \cdot y$, x^y , $\text{sg}(x)$, $\overline{\text{sg}}(x)$, $x \dot{-} y$, $|x - y|$. Суммы и произведения с переменным верхним индексом суммирования (произведения). Ограниченная минимизация. Рекурсивные и примитивно рекурсивные отношения. Замкнутость (примитивно) рекурсивных отношений относительно конъюнкции, дизъюнкции, импликации, отрицания и ограниченных кванторов существования и всеобщности. Примитивная рекурсивность отношений $=$, \neq , $<$, $>$, \leq , \geq на натуральных числах. Кусочное задание (примитивно) рекурсивных функций. Примитивная рекурсивность функций $\lfloor x/y \rfloor$, $\text{p}(x)$, $\text{ex}(i, x)$, $\text{long}(x)$ и отношений $\text{Div}(x, y)$, $\text{Prime}(x)$. [1, §18], [9, §3.1, §3.3], [10, §§2–3]

Кодирование машин Тьюринга.

Кодирование конечных последовательностей. Левый и правый коды слов. Коды машинных слов, команд и программ. Примитивно рекурсивные функции одношагового и многошагового преобразования кодов машинных слов. Примитивно рекурсивная функция кодирования входных машинных слов. Примитивно рекурсивный счётчик единиц в коде выходного машинного слова. Примитивно рекурсивная функция текущего состояния. [1, §19], [9, §3.2]

Машины Тьюринга vs Частично рекурсивные функции.

Теорема о частичной рекурсивности функций, вычислимых по Тьюрингу. Теорема об универсальной ч.р.ф. Определение клиниевской нумерации частично вычислимых функций. Существование невычислимых функций. [1, §20], [9, §3.2]

Универсальные функции.

Отсутствие р.ф. (п.р.ф.), универсальной для семейства всех k -местных р.ф. (п.р.ф.) для $k \geq 1$. Существование р.ф., не являющейся п.р.ф. П.р.ф., универсальная для семейства всех полиномов от одной переменной. [1, §21], [10, §5]

4. ТЕОРИЯ ВЫЧИСЛИМОСТИ.

Теорема о параметризации.

Функция, вычисляющая код композиции машин Тьюринга. Теорема о параметризации. **s-m-n**-теорема. [1, §22], [13, §1.8]

Теорема о неподвижной точке.

Теорема о неподвижной точке. Теорема Райса. Невычислимость множества всех клиниевских номеров фиксированной частично вычислимой функции. [1, §23], [9, §3.4], [13, §§11.1–11.2]

Вычислимо перечислимые множества.

Определение вычислимо перечислимых множеств. Теорема об эквивалентных определениях вычислимо перечислимых множеств. Существование вычислимо перечислимого множества, не являющегося вычислимым. Замкнутость вычислимо перечислимых множеств относительно объединения, пересечения. Теорема Поста. Незамкнутость вычислимо перечислимых множеств относительно дополнения. Теорема о графике. [1, §24], [9, §3.3], [10, §4, §6], [13, §1.9, §§5.1–5.5]

ТЕМЫ СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ:

1. Теоретико-множественные операции. Упорядоченные кортежи. Алфавиты, слова и языки. Конкатенация, звёздочка Клини.
2. Детерминированные конечные автоматы.
3. Недетерминированные конечные автоматы. Теорема о детерминизации.
4. Недетерминированные конечные автоматы с пустыми переходами. Теорема об элиминации пустых переходов. Эквивалентность трёх видов конечных автоматов.
5. Свойства автоматных языков. Лемма о накачивании. Примеры неавтоматных языков.

6. Регулярные выражения и языки. Построение автомата по заданному регулярному выражению. Построение регулярного выражения по заданному автомату.
7. Формальные грамматики. Регулярные грамматики. КС-грамматики.
8. Машины Тьюринга. Базовые машины Тьюринга. Композиция и разветвление машин.
9. Машины Тьюринга. Функции, вычислимые по Тьюрингу.
10. Примитивно рекурсивные функции. Ограниченная минимизация.
11. Неограниченная минимизация. Частично рекурсивные функции.
12. Рекурсивные и примитивно рекурсивные отношения.
13. Кодирование машин Тьюринга.
14. Универсальные функции, s-m-n-теорема, теорема о неподвижной точке.
15. Вычислимо перечислимые множества. Теорема Поста. Теорема о графике.

Список основной литературы:

- [1] Н. Т. Когабаев, *Дискретная математика и теория алгоритмов*, Новосибирск, НГУ, 2023, онлайн-версия в электронной библиотеке НГУ: <http://e-lib.nsu.ru/dsweb/Get/Resource-8385/page00000.pdf>

Список дополнительной литературы:

- [2] С. Дасгупта, Х. Пападимитриу, У. Вазирани, *Алгоритмы*, Москва, МЦНМО, 2014.
- [3] Ю. Л. Ершов, *Теория нумераций*, Москва, Наука, 1977.
- [4] Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин, *Математическая логика*, Санкт-Петербург, Лань, 2004.
- [5] Т. Йех, *Теория множеств и метод форсинга*, Москва, Мир, 1973.
- [6] В. Н. Касьянов, *Лекции по теории формальных языков, автоматов и сложности вычислений*, Новосибирск, НГУ, 1995.
- [7] Н. Т. Когабаев, *Лекции по теории алгоритмов*, Новосибирск, НГУ, 2009.
- [8] Т. Х. Кормен, Ч. И. Лейзерсон, Р. Л. Ривест, К. Штайн, *Алгоритмы: построение и анализ*, 2-е изд., Москва, Издательский дом "Вильямс", 2005.
- [9] И. А. Лавров, Л. Л. Максимова, *Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов*, Москва, Наука, 1984.
- [10] А. И. Мальцев, *Алгоритмы и рекурсивные функции*, Москва, Наука, 1986.
- [11] Э. Мендельсон, *Введение в математическую логику*, Москва, Наука, 1971.
- [12] А. С. Морозов, *Машины Шёнфилда*, Методические указания, Новосибирск, НГУ, 1996.
- [13] Х. Роджерс, *Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость*, Москва, Мир, 1972.
- [14] Р. И. Соар, *Вычислимо перечислимые множества и степени*, Казань, Казанское мат. общество, 2000.
- [15] В. Khoussainov, А. Nerode, *Automata Theory and Its Applications*, Boston, Birkhauser, 2001.
- [16] Н. R. Lewis, С. Н. Papadimitriou, *Elements of the Theory of Computation*, New Jersey, Plentice Hall, 1998.
- [17] J. R. Shoenfield, *Recursion Theory*, Lecture Notes in Logic, Berlin, Springer-Verlag, 1993.

Онлайн-симулятор машины Тьюринга:

- [18] А. Morphett, *A Web-based Turing Machine Simulator*, <http://morphett.info/turing/>