**Программа курса
«ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ»
1-й курс, 1-й поток ММФ НГУ,
осенний семестр 2025-2026 уч. года**

лектор – Н.Т. Когабаев

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ.

Некоторые аксиомы теории множеств.

Некоторые аксиомы теории множеств Цермело-Френкеля. Основные операции над множествами. Упорядоченные кортежи. Декартово произведение. Отношения и функции на множествах. [1, §1], [3, §10, §14]

Алфавиты и формальные языки.

Понятия алфавита и слова. Подслова, префиксы и суффиксы. Операции над словами. Понятие формального языка. Операции объединения, пересечения, дополнения, конкатенации и звёздочки Клини над языками. [1, §8], [5, §1.1], [14, §1.7]

2. КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ И ФОРМАЛЬНЫЕ ГРАММАТИКИ.

Детерминированные конечные автоматы.

Определение детерминированных конечных автоматов. Их графическое изображение. Пути в автомате. Языки, распознаваемые детерминированными конечными автоматами. [1, §9], [5, §2.2], [14, §2.1]

Недетерминированные конечные автоматы.

Определение недетерминированных конечных автоматов. Языки, распознаваемые недетерминированными конечными автоматами. Теорема о детерминизации недетерминированных конечных автоматов. [1, §10], [5, §2.2]

Недетерминированные конечные автоматы с пустыми переходами.

Определение недетерминированных конечных автоматов с пустыми переходами. Языки, распознаваемые недетерминированными конечными автоматами с пустыми переходами. Теорема об элиминации пустых переходов. Эквивалентность трёх видов конечных автоматов. [1, §11], [14, §2.2]

Свойства автоматных языков.

Замкнутость автоматных языков относительно объединения, пересечения, дополнения, конкатенации и звёздочки Клини. Автоматность конечных языков. Лемма о накачивании. Существование неавтоматных языков. [1, §12], [5, §2.3], [14, §§2.3–2.4]

Регулярные выражения и языки.

Регулярные выражения. Определение регулярных языков. Теорема о совпадении класса регулярных и класса автоматных языков. Построение автомата по заданному регулярному выражению. Построение регулярного выражения по заданному автомату. [1, §13], [5, §2.1, §2.3], [14, §2.3]

Формальные грамматики.

Определение и примеры формальных грамматик. Определение языка, порождённого грамматикой. Контекстно-свободные и регулярные грамматики. Теорема о совпадении класса языков, порождаемых регулярными грамматиками, и класса автоматных языков. [1, §14], [5, §1.2, §1.3, §2.3], [14, §§3.1–3.2]

3. ФОРМАЛИЗАЦИИ ПОНЯТИЯ ВЫЧИСЛИМОЙ ФУНКЦИИ.

Определение машины Тьюринга.

Описание машины Тьюринга. Формальное определение машины Тьюринга. Машинные слова и отношения перерабатываемости одних машинных слов в другие. Определение функции, вычислимой по Тьюрингу. Композиция и разветвление машин Тьюринга. [1, §15], [7, §3.2], [8, §12], [16]

Базовые машины Тьюринга.

Перенос нуля. Обнуление. Правый и левый сдвиги. Транспозиция. Удвоение. Циклический сдвиг. Копирование. [1, §16], [7, §3.2], [8, §12], [16]

Частично рекурсивные функции.

Простейшие функции. Операторы суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Определения примитивно рекурсивных, частично рекурсивных и рекурсивных функций. Вычислимость по Тьюрингу простейших функций. Замкнутость семейства вычислимых по Тьюрингу функций относительно операторов суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Теорема о вычислимости ч.р.ф. на машинах Тьюринга. [1, §17], [7, §§3.1–3.2], [8, §2, §12], [16]

Рекурсивность некоторых функций и отношений.

Примитивная рекурсивность нульместных функций и функций $x + y$, $x \cdot y$, x^y , $\text{sg}(x)$, $\overline{\text{sg}}(x)$, $x \dot{-} y$, $|x - y|$. Суммы и произведения с переменным верхним индексом суммирования (произведения). Ограниченная минимизация. Рекурсивные и примитивно рекурсивные отношения. Замкнутость (примитивно) рекурсивных отношений относительно конъюнкции, дизъюнкции, импликации, отрицания и ограниченных кванторов существования и всеобщности. Примитивная рекурсивность отношений $=$, $\neq$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ на натуральных числах. Кусочное задание (примитивно) рекурсивных функций. Примитивная рекурсивность функций $\lfloor x/y \rfloor$, $\text{p}(x)$, $\text{ex}(i, x)$, $\text{long}(x)$ и отношений $\text{Div}(x, y)$, $\text{Prime}(x)$. [1, §18], [7, §3.1, §3.3], [8, §§2–3]

Кодирование машин Тьюринга.

Кодирование конечных последовательностей. Левый и правый коды слов. Коды машинных слов, команд и программ. Примитивно рекурсивные функции одношагового и многошагового преобразования кодов машинных слов. Примитивно рекурсивная функция кодирования входных машинных слов. Примитивно рекурсивный счётчик единиц в коде выходного машинного слова. Примитивно рекурсивная функция текущего состояния. [1, §19], [7, §3.2]

Машины Тьюринга vs Частично рекурсивные функции.

Теорема о частичной рекурсивности функций, вычислимых по Тьюрингу. Теорема об универсальной ч.р.ф. Определение клиниевской нумерации частично вычислимых функций. Существование невычислимых функций. [1, §20], [7, §3.2]

Универсальные функции.

Отсутствие р.ф. (п.р.ф.), универсальной для семейства всех k -местных р.ф. (п.р.ф.) для $k \geq 1$. Существование р.ф., не являющейся п.р.ф. П.р.ф., универсальная для семейства всех полиномов от одной переменной. [1, §21], [8, §5]

ТЕМЫ СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ:

1. Теоретико-множественные операции. Упорядоченные кортежи. Алфавиты, слова и языки. Конкатенация, звёздочка Клини.
2. Детерминированные конечные автоматы.
3. Недетерминированные конечные автоматы. Теорема о детерминизации.
4. Недетерминированные конечные автоматы с пустыми переходами. Теорема об элиминации пустых переходов. Эквивалентность трёх видов конечных автоматов.
5. Свойства автоматных языков. Лемма о накачивании. Примеры неавтоматных языков.
6. Регулярные выражения и языки. Построение автомата по заданному регулярному выражению. Построение регулярного выражения по заданному автомату.
7. Формальные грамматики. Регулярные грамматики. КС-грамматики.
8. Машины Тьюринга. Базовые машины Тьюринга. Композиция и разветвление машин.
9. Машины Тьюринга. Функции, вычислимые по Тьюрингу.
10. Примитивно рекурсивные функции. Ограниченная минимизация.
11. Неограниченная минимизация. Частично рекурсивные функции.
12. Рекурсивные и примитивно рекурсивные отношения.
13. Кодирование машин Тьюринга. Рекурсивные функции над кодами.
14. Универсальная ч.р.ф. Клиниевская нумерация ч.в.ф.
15. Универсальные функции для различных семейств частичных функций.

Список основной литературы:

- [1] Н. Т. Когабаев, *Дискретная математика и теория алгоритмов*, Новосибирск, НГУ, 2023, онлайн-версия в электронной библиотеке НГУ: <http://e-lib.nsu.ru/dsweb/Get/Resource-8385/page00000.pdf>

Список дополнительной литературы:

- [2] Ю. Л. Ершов, *Теория нумераций*, Москва, Наука, 1977.
- [3] Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин, *Математическая логика*, Санкт-Петербург, Лань, 2004.
- [4] Т. Йех, *Теория множеств и метод форсинга*, Москва, Мир, 1973.
- [5] В. Н. Касьянов, *Лекции по теории формальных языков, автоматов и сложности вычислений*, Новосибирск, НГУ, 1995.
- [6] Н. Т. Когабаев, *Лекции по теории алгоритмов*, Новосибирск, НГУ, 2009.
- [7] И. А. Лавров, Л. Л. Максимова, *Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов*, Москва, Наука, 1984.
- [8] А. И. Мальцев, *Алгоритмы и рекурсивные функции*, Москва, Наука, 1986.
- [9] Э. Мендельсон, *Введение в математическую логику*, Москва, Наука, 1971.
- [10] А. С. Морозов, *Машины Шёнфилда*, Методические указания, Новосибирск, НГУ, 1996.
- [11] Х. Роджерс, *Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость*, Москва, Мир, 1972.
- [12] Р. И. Соар, *Вычислимо перечислимые множества и степени*, Казань, Казанское мат. общество, 2000.
- [13] В. Khoussainov, А. Nerode, *Automata Theory and Its Applications*, Boston, Birkhauser, 2001.
- [14] Н. R. Lewis, С. Н. Papadimitriou, *Elements of the Theory of Computation*, New Jersey, Plentice Hall, 1998.
- [15] J. R. Shoenfield, *Recursion Theory*, Lecture Notes in Logic, Berlin, Springer-Verlag, 1993.

Онлайн-симулятор машины Тьюринга:

- [16] A. Morphet, *A Web-based Turing Machine Simulator*, <http://morphett.info/turing/>