

Дискретная математики и теория алгоритмов
ММФ, 2023-2024 учебный год, 1-й семестр, 1-й поток
Список экзаменационных вопросов
Лектор Н.Т. Когабаев

Экзамен по ДМТА состоит из трёх последовательных этапов.

На первом этапе экзаменатор предлагает студенту ответить на 5 вопросов только по формулировкам определений и утверждений из курса лекций (доказательства утверждений приводить не требуется). Время на подготовку ответов на данные 5 вопросов не предусмотрено. Если студент даёт хотя бы один неправильный ответ, то он получает оценку «неуд», и экзамен для него заканчивается. Если же все 5 ответов правильные, то студент допускается на второй этап.

На втором этапе экзаменатор предлагает студенту подготовить доказательство одного или нескольких утверждений из курса лекций¹. На подготовку доказательства отводится 30 минут. Если студенту не удастся привести правильное и полное доказательство, то он получает оценку «удовл», и экзамен для него заканчивается. Если же приводится правильный и полный ответ, то студент допускается на третий этап.

На третьем этапе экзаменатор предлагает студенту решить одну задачу в рамках тех разделов ДМТА, которые были изучены в курсе. На решение задачи студенту даётся 15 минут. Если студенту не удастся привести правильное решение задачи, то он получает оценку «хорошо», и экзамен для него заканчивается. Если же приводится правильное решение задачи, то студент получает оценку «отлично» и поздравления экзаменатора.

Каждый студент в течение всех этапов экзаменуется одним и тем же экзаменатором. Экзаменатор может задавать дополнительные уточняющие вопросы по содержанию билета. Пользование конспектами и литературой, содержание которых близко к содержанию курса, запрещено. Выходить из аудитории можно только между этапами. Ниже приведены экзаменационные вопросы к первому и второму этапам. Условия задач для третьего этапа будут формулироваться только непосредственно на самом экзамене.

В течение семестра предусмотрены две потоковые контрольные. За каждую, написанную на оценку «отлично», контрольную, студент получает один дополнительный балл к своей будущей экзаменационной оценке. Воспользоваться своими дополнительными баллами студент может только после окончания его экзамена и при условии успешного прохождения им первого этапа экзамена. Если студенту не удастся пройти первый этап, его дополнительные баллы аннулируются. Если студент воспользовался своими дополнительными баллами, экзамен для него заканчивается. Нельзя использовать дополнительные баллы дважды.

Вопросы к первому этапу:

1. Понятие времени работы алгоритма. Определение отношения $f(n) = O(g(n))$ для функций f и g .
2. Определения ориентированного и неориентированного графов.
3. Определения пути, простого пути, цикла и простого цикла в графе.
4. Определения сильно связного и связного компонентов графа.
5. Определения леса и дерева.
6. Определение длины кратчайшего пути в графе.
7. Определение веса кратчайшего пути во взвешенном ориентированном графе.
8. Определение детерминированного конечного автомата. Распознаваемость слов на детерминированном конечном автомате.
9. Определение недетерминированного конечного автомата. Распознаваемость слов на недетерминированном конечном автомате.
10. Определение недетерминированного конечного автомата с пустыми переходами. Распознаваемость слов на недетерминированном конечном автомате с пустыми переходами.

¹Во второй этап также включены не содержащие доказательств вопросы по материалу первой и второй глав курса.

11. Лемма о накачивании.
12. Определения регулярного выражения и регулярного языка.
13. Определение машины Тьюринга.
14. Определение машинного слова. Определение машинного слова M'_T , полученного из слова M за один шаг работы машины T . Определения отношений \implies , \Vdash на машинных словах.
15. Определение вычислимой по Тьюрингу функции.
16. Определения композиции и разветвления машин Тьюринга.
17. Определения операторов суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Примитивно рекурсивные, частично рекурсивные и рекурсивные функции.
18. Определение ограниченной минимизации.
19. Определение (примитивно) рекурсивного отношения.

Вопросы ко второму этапу:

1. Описание сортировок вставкой и слиянием. Псевдокоды процедур. Примеры работы алгоритмов. Время работы алгоритмов.
2. Описание алгоритма поиска в ширину. Псевдокод процедуры. Пример работы алгоритма. Корректность алгоритма (без доказательства). Время работы алгоритма.
3. Описание алгоритма поиска в глубину. Псевдокод процедуры. Пример работы алгоритма. Корректность алгоритма и теорема о скобках (без доказательств). Время работы алгоритма.
4. Описание алгоритма Дейкстры. Псевдокод процедуры. Пример работы алгоритма. Корректность алгоритма (без доказательства). Время работы алгоритма.
5. Теорема о детерминизации недетерминированного конечного автомата.
6. Теорема об элиминации пустых переходов в А-н.к.а.
7. Теорема о замкнутости класса автоматных языков относительно объединения, пересечения, дополнения, конкатенации и звёздочки Клини.
8. Лемма о накачивании. Существование неавтоматных языков.
9. Теорема о совпадении класса регулярных языков с классом автоматных языков.
10. Базовые машины Тьюринга (написать программы для переноса нуля, правого и левого сдвигов, обнуления, для остальных машин — только определение).
11. Базовые машины Тьюринга (написать программу для транспозиции, для остальных машин — только определение).
12. Базовые машины Тьюринга (написать программу для удвоения, для остальных машин — только определение).
13. Базовые машины Тьюринга (выписать представления для циклического сдвига и копирования через композиции, для остальных машин — только определение).
14. Предложение о вычислимости простейших функций на машинах Тьюринга. Предложение о замкнутости семейства вычислимых по Тьюрингу функций относительно оператора суперпозиции.
15. Предложение о замкнутости семейства вычислимых по Тьюрингу функций относительно оператора примитивной рекурсии.
16. Предложение о замкнутости семейства вычислимых по Тьюрингу функций относительно оператора минимизации.

17. Лемма о примитивной рекурсивности функций $f = a$, где $a \in \omega$, и функций $x + y$, $x \cdot y$, x^y , $\text{sg}(x)$, $\overline{\text{sg}}(x)$, $x \dot{-} 1$, $x \dot{-} y$, $|x - y|$.
18. Лемма о частичной (примитивной) рекурсивности функций вида $\sum_{i=0}^y g(\bar{x}, i)$ и $\prod_{i=0}^y g(\bar{x}, i)$. Предложение об ограниченной минимизации.
19. Предложение о (примитивной) рекурсивности отношений, полученных из (примитивно) рекурсивных отношений с помощью связок $\&$, \vee , \neg , \rightarrow . Предложение о примитивной рекурсивности отношений $=$, \neq , $<$, $>$, \leq , \geq .
20. Предложения о (примитивной) рекурсивности отношений, полученных из (примитивно) рекурсивных отношений с помощью ограниченных кванторов существования и всеобщности. Предложение о кусочном задании функции.
21. Лемма о примитивной рекурсивности функции $[x/y]$ и отношений $\text{Div}(x, y)$, $\text{Prime}(x)$.
22. Лемма о примитивной рекурсивности функций p_x , $\text{ex}(i, x)$ и $\text{long}(x)$.