Дискретная математики и теория алгоритмов
ММФ, 2024-2025 учебный год, 1-й семестр, 1-й поток
Список экзаменационных вопросов
Лектор Н.Т. Когабаев

Экзамен по ДМТА состоит из трёх последовательных этапов.

На первом этапе экзаменатор предлагает студенту ответить на 5 вопросов только по формулировкам определений и утверждений из курса лекций (доказательства утверждений приводить не требуется). Время на подготовку ответов на данные 5 вопросов не предусмотрено. Если студент даёт хотя бы один неправильный ответ, то он получает оценку «неуд», и экзамен для него заканчивается. Если же все 5 ответов правильные, то студент допускается на второй этап.

На втором этапе экзаменатор предлагает студенту подготовить доказательство одного или нескольких утверждений из курса лекций. На подготовку доказательства отводится 30 минут. Если студенту не удаётся привести правильное и полное доказательство, то он получает оценку «удовл», и экзамен для него заканчивается. Если же приводится правильный и полный ответ, то студент допускается на третий этап.

На третьем этапе экзаменатор предлагает студенту решить одну задачу в рамках тех разделов ДМТА, которые были изучены в курсе. На решение задачи студенту даётся 15 минут. Если студенту не удаётся привести правильное решение задачи, то он получает оценку «хорошо», и экзамен для него заканчивается. Если же приводится правильное решение задачи, то студент получает оценку «отлично» и поздравления экзаменатора.

Каждый студент в течение всех этапов экзаменуется одним и тем же экзаменатором. Экзаменатор может задавать дополнительные уточняющие вопросы по содержанию билета. Пользование конспектами и литературой, содержание которых близко к содержанию курса, запрещено. Выходить из аудитории можно только между этапами. Ниже приведены экзаменационные вопросы к первому и второму этапам. Условия задач для третьего этапа будут формулироваться только непосредственно на самом экзамене.

В течение семестра предусмотрены две потоковые контрольные, по результатам которых студент может получить дополнительные баллы к своей будущей экзаменационной оценке. Если обе контрольные написаны на оценку «отлично», студент получает два дополнительных балла. Если одна из контрольных написана на оценку «отлично», а другая — на оценку «хорошо», студент получает один дополнительный балл. Для остальных комбинаций оценок (сумма оценок $\leqslant 8$) дополнительные баллы не предусмотрены. Воспользоваться своими дополнительными баллами студент может только после окончания его экзамена и при условии успешного прохождения им первого этапа экзамена. Если студенту не удаётся пройти первый этап, его дополнительные баллы аннулируются. Если студент воспользовался своими дополнительными баллами, экзамен для него заканчивается. Нельзя использовать дополнительные баллы дважды.

Вопросы к первому этапу:

1. Определение детерминированного конечного автомата. Распознаваемость слов на детерминированном конечном автомате.

2. Определение недетерминированного конечного автомата. Распознаваемость слов на недетерминированном конечном автомате.

3. Определение недетерминированного конечного автомата с пустыми переходами. Распознаваемость слов на недетерминированном конечном автомате с пустыми переходами.

4. Лемма о накачивании.

5. Определения регулярного выражения и регулярного языка.

6. Определение формальной грамматики. Определения отношений $\alpha \underset{\Gamma}{\longrightarrow} \beta$ и $\alpha \overset{*}{\underset{\Gamma}{\longrightarrow}} \beta$ в грамматике. Определение языка, порождённого формальной грамматикой. Типы грамматик.

7. Определение машины Тьюринга.

8. Определение машинного слова. Определение машинного слова M_T', полученного из слова M за один шаг работы машины T. Определения отношений $\Longrightarrow$, $\models\!\Longrightarrow$ на машинных словах.

9. Определение вычислимой по Тьюрингу функции.
10. Определения композиции и разветвления машин Тьюринга.
11. Определения операторов суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Примитивно рекурсивные, частично рекурсивные и рекурсивные функции.
12. Определение ограниченной минимизации.
13. Определение (примитивно) рекурсивного отношения.
14. Определения левого и правого кодов слов, кода машинного слова, кода команды и кода машины Тьюринга.
15. Определения функций одношагового и многошагового преобразования кодов машинных слов.
16. Определения функции кодирования входных машинных слов, счётчика единиц в коде выходного машинного слова и функции текущего состояния.
17. Определение функции, универсальной для некоторого семейства частичных функций.
18. Определение клиниевской нумерации частично вычислимых функций.
19. Определение вычислимо перечислимого множества.

Вопросы ко второму этапу:

1. Теорема о детерминизации недетерминированного конечного автомата.
2. Теорема об элиминации пустых переходов в Λ-н.к.а.
3. Теорема о замкнутости класса автоматных языков относительно объединения, пересечения, дополнения, конкатенации и звёздочки Клини.
4. Лемма о накачивании. Существование неавтоматных языков.
5. Теорема о совпадении класса регулярных языков с классом автоматных языков.
6. Теорема о совпадении класса автоматных языков с классом языков, порождённых регулярными грамматиками.
7. Базовые машины Тьюринга (написать программы для переноса нуля, правого и левого сдвигов, обнуления, для остальных машин — только определение).
8. Базовые машины Тьюринга (написать программу для транспозиции, для остальных машин — только определение).
9. Базовые машины Тьюринга (написать программу для удвоения, для остальных машин — только определение).
10. Базовые машины Тьюринга (выписать представления для циклического сдвига и копирования через композиции, для остальных машин — только определение).
11. Предложение о вычислимости простейших функций на машинах Тьюринга. Предложение о замкнутости семейства вычислимых по Тьюрингу функций относительно оператора суперпозиции.
12. Предложение о замкнутости семейства вычислимых по Тьюрингу функций относительно оператора примитивной рекурсии.
13. Предложение о замкнутости семейства вычислимых по Тьюрингу функций относительно оператора минимизации.
14. Лемма о примитивной рекурсивности функций $f = a$, где $a \in \omega$, и функций $x + y$, $x \cdot y$, x^y, $\mathrm{sg}(x)$, $\overline{\mathrm{sg}}(x)$, $x \dot{-} 1$, $x \dot{-} y$, $|x - y|$.

15. Лемма о частичной (примитивной) рекурсивности функций вида $\sum\limits_{i=0}^{y} g(\overline{x}, i)$ и $\prod\limits_{i=0}^{y} g(\overline{x}, i)$. Предложение об ограниченной минимизации.
16. Предложение о (примитивной) рекурсивности отношений, полученных из (примитивно) рекурсивных отношений с помощью связок $\&$, $\vee$, $\neg$, $\to$. Предложение о примитивной рекурсивности отношений $=$, $\neq$, $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$.
17. Предложения о (примитивной) рекурсивности отношений, полученных из (примитивно) рекурсивных отношений с помощью ограниченных кванторов существования и всеобщности. Предложение о кусочном задании функции.
18. Лемма о примитивной рекурсивности функции $[x/y]$ и отношений $\mathrm{Div}(x, y)$, $\mathrm{Prime}(x)$.
19. Лемма о примитивной рекурсивности функций p_x, $\mathrm{ex}(i, x)$ и $\mathrm{long}(x)$.
20. Предложения о существовании примитивно рекурсивных функций $\mathrm{step}(t, w)$ и $\mathrm{run}(t, w, y)$.
21. Предложения о существовании примитивно рекурсивных функций $\mathrm{in}^k(x_1, \ldots, x_k)$, $\mathrm{out}(y)$ и $q(t, x_1, \ldots, x_k, y)$.
22. Теорема о частичной рекурсивности функций, вычислимых по Тьюрингу, и её следствия.
23. Теорема об универсальной ч.р.ф. Существование функций, не являющихся частично рекурсивными.
24. Предложение об отсутствии п.р.ф. (р.ф.), универсальной для семейства всех k-местных п.р.ф. (р.ф.).
25. Лемма о существовании вычислимой функции $x \circ y$, вычисляющей код композиции машин с кодами x и y.
26. Теорема о параметризации и **s-m-n**-теорема.
27. Теорема о неподвижной точке и теорема Райса.
28. Теорема об эквивалентных определениях вычислимо перечислимых множеств.
29. Предложение о вычислимой перечислимости вычислимых множеств. Существование вычислимо перечислимого множества, не являющегося вычислимым.
30. Предложение о замкнутости класса вычислимо перечислимых множеств относительно объединения и пересечения.
31. Теорема Поста. Следствие о незамкнутости класса вычислимо перечислимых множеств относительно дополнения.
32. Теорема о графике.