МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА
ММФ НГУ, 2-й курс, 1-й поток

Н.Т. Когабаев

Теорема о существовании канонической модели теории Хенкина

(по материалам лекций С.С. Гончарова)

*Используйте просмотр в постраничном режиме

Теория Хенкина. Основная цель лекции.

Напомним, что полная непротиворечивая теория T сигнатуры Σ называется *теорией Хенкина*, если для любого предложения $\exists x \Phi \in T$ существует константный символ $c \in \Sigma$ такой, что $(\Phi)^x_c \in T$.

Теория Хенкина. Основная цель лекции.

Напомним, что полная непротиворечивая теория T сигнатуры Σ называется *теорией Хенкина*, если для любого предложения $\exists x \Phi \in T$ существует константный символ $c \in \Sigma$ такой, что $(\Phi)^x_c \in T$.

Основная цель — доказать теорему о существовании *канонической модели* для теории Хенкина T, т.е. такой модели $\mathfrak{M}$ сигнатуры Σ, что $\mathfrak{M} \models T$ и для любого $a \in M$ найдётся константый символ c из сигнатуры Σ со свойством $a = c^{\mathfrak{M}}$.
(Здесь как обычно через M обозначен носитель модели $\mathfrak{M}$.)

Теория Хенкина. Основная цель лекции.

Напомним, что полная непротиворечивая теория T сигнатуры Σ называется *теорией Хенкина*, если для любого предложения $\exists x \Phi \in T$ существует константный символ $c \in \Sigma$ такой, что $(\Phi)^x_c \in T$.

Основная цель — доказать теорему о существовании *канонической модели* для теории Хенкина T, т.е. такой модели $\mathfrak{M}$ сигнатуры Σ, что $\mathfrak{M} \models T$ и для любого $a \in M$ найдётся константый символ c из сигнатуры Σ со свойством $a = c^{\mathfrak{M}}$.
(Здесь как обычно через M обозначен носитель модели $\mathfrak{M}$.)

Запись $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ будет обозначать результат одновременной подстановки термов $t_1, \ldots, t_n$ вместо всех свободных вхождений переменных $x_1, \ldots, x_n$ в формуле Φ соответственно, при этом предполагается, что $x_1, \ldots, x_n$ попарно различны.

Теория Хенкина. Основная цель лекции.

Напомним, что полная непротиворечивая теория T сигнатуры Σ называется *теорией Хенкина*, если для любого предложения $\exists x \Phi \in T$ существует константный символ $c \in \Sigma$ такой, что $(\Phi)^x_c \in T$.

Основная цель — доказать теорему о существовании *канонической модели* для теории Хенкина T, т.е. такой модели $\mathfrak{M}$ сигнатуры Σ, что $\mathfrak{M} \models T$ и для любого $a \in M$ найдётся константый символ c из сигнатуры Σ со свойством $a = c^{\mathfrak{M}}$.
(Здесь как обычно через M обозначен носитель модели $\mathfrak{M}$.)

Запись $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ будет обозначать результат одновременной подстановки термов $t_1, \ldots, t_n$ вместо всех свободных вхождений переменных $x_1, \ldots, x_n$ в формуле Φ соответственно, при этом предполагается, что $x_1, \ldots, x_n$ попарно различны.

Говорят, что подстановка $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ *допустима*, если для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ ни одно свободное вхождение переменной x_i в Φ не находится в области действия кванторa по некоторой переменной $y \in \mathrm{FV}(t_i)$.

Теория Хенкина. Основная цель лекции.

Напомним, что полная непротиворечивая теория T сигнатуры Σ называется *теорией Хенкина*, если для любого предложения $\exists x \Phi \in T$ существует константный символ $c \in \Sigma$ такой, что $(\Phi)^x_c \in T$.

Основная цель — доказать теорему о существовании *канонической модели* для теории Хенкина T, т.е. такой модели $\mathfrak{M}$ сигнатуры Σ, что $\mathfrak{M} \models T$ и для любого $a \in M$ найдётся константый символ c из сигнатуры Σ со свойством $a = c^{\mathfrak{M}}$.
(Здесь как обычно через M обозначен носитель модели $\mathfrak{M}$.)

Запись $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ будет обозначать результат одновременной подстановки термов $t_1, \ldots, t_n$ вместо всех свободных вхождений переменных $x_1, \ldots, x_n$ в формуле Φ соответственно, при этом предполагается, что $x_1, \ldots, x_n$ попарно различны.

Говорят, что подстановка $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ *допустима*, если для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ ни одно свободное вхождение переменной x_i в Φ не находится в области действия кванторa по некоторой переменной $y \in \mathrm{FV}(t_i)$.

Нам потребуется несколько предварительных лемм из исчисления СИП.

Техническая лемма об одной выводимой секвенции

Лемма 1. *Пусть* Φ *— формула сигнатуры* Σ, $x_1, \ldots, x_n$ *— попарно различные переменные,* $t_1, \ldots, t_n$ *— термы сигнатуры* Σ *такие, что подстановка* $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ *допустима. Тогда в СИП выводима секвенция*

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \Phi \vdash (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}.$$

Техническая лемма об одной выводимой секвенции

Лемма 1. *Пусть Φ — формула сигнатуры Σ, $x_1, \ldots, x_n$ — попарно различные переменные, $t_1, \ldots, t_n$ — термы сигнатуры Σ такие, что подстановка $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ допустима. Тогда в СИП выводима секвенция*

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \Phi \vdash (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}.$$

Доказательство: Заметим, что здесь нельзя воспользоваться n раз правилом введения квантора $\forall x_i$ в левой части секвенции, поскольку, вообще говоря

$$(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n} \neq \big(\ldots\big((\Phi)^{x_1}_{t_1}\big)^{x_2}_{t_2}\ldots\big)^{x_n}_{t_n}.$$

Техническая лемма об одной выводимой секвенции

Лемма 1. *Пусть Φ — формула сигнатуры Σ, $x_1, \ldots, x_n$ — попарно различные переменные, $t_1, \ldots, t_n$ — термы сигнатуры Σ такие, что подстановка $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ допустима. Тогда в СИП выводима секвенция*

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \Phi \vdash (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}.$$

Доказательство: Заметим, что здесь нельзя воспользоваться n раз правилом введения квантора $\forall x_i$ в левой части секвенции, поскольку, вообще говоря

$$(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n} \neq \big(\ldots\big((\Phi)^{x_1}_{t_1}\big)^{x_2}_{t_2}\ldots\big)^{x_n}_{t_n}.$$

(Одновременная и последовательная подстановки могут приводить к разным результатам в случае, когда для некоторого i терм t_i содержит переменные $x_{i+1}, \ldots, x_n$.)

Техническая лемма об одной выводимой секвенции

Лемма 1. *Пусть Φ — формула сигнатуры Σ, $x_1, \ldots, x_n$ — попарно различные переменные, $t_1, \ldots, t_n$ — термы сигнатуры Σ такие, что подстановка $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ допустима. Тогда в СИП выводима секвенция*

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \Phi \vdash (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}.$$

Доказательство: Заметим, что здесь нельзя воспользоваться n раз правилом введения квантора $\forall x_i$ в левой части секвенции, поскольку, вообще говоря

$$(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n} \neq \big(\ldots\big((\Phi)^{x_1}_{t_1}\big)^{x_2}_{t_2}\ldots\big)^{x_n}_{t_n}.$$

(Одновременная и последовательная подстановки могут приводить к разным результатам в случае, когда для некоторого i терм t_i содержит переменные $x_{i+1}, \ldots, x_n$.)

Пусть $y_1, \ldots, y_n$ — попарно различные переменные, не входящие в формулу Φ, в термы $t_1, \ldots, t_n$ и отличные от $x_1, \ldots, x_n$.

Техническая лемма об одной выводимой секвенции

Лемма 1. *Пусть Φ — формула сигнатуры Σ, $x_1, \ldots, x_n$ — попарно различные переменные, $t_1, \ldots, t_n$ — термы сигнатуры Σ такие, что подстановка $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ допустима. Тогда в СИП выводима секвенция*

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \Phi \vdash (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}.$$

Доказательство: Заметим, что здесь нельзя воспользоваться n раз правилом введения квантора $\forall x_i$ в левой части секвенции, поскольку, вообще говоря

$$(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n} \neq \big(\ldots\big((\Phi)^{x_1}_{t_1}\big)^{x_2}_{t_2}\ldots\big)^{x_n}_{t_n}.$$

(Одновременная и последовательная подстановки могут приводить к разным результатам в случае, когда для некоторого i терм t_i содержит переменные $x_{i+1}, \ldots, x_n$.)

Пусть $y_1, \ldots, y_n$ — попарно различные переменные, не входящие в формулу Φ, в термы $t_1, \ldots, t_n$ и отличные от $x_1, \ldots, x_n$. $\Longrightarrow y_1 \ldots, y_n \notin \mathrm{FV}(\Phi)$, подстановка $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n}$ допустима и $\big((\Phi)^{x_1,\ldots,x_{i-1}}_{y_1,\ldots,y_{i-1}}\big)^{x_i}_{y_i} = (\Phi)^{x_1,\ldots,x_i}_{y_1,\ldots,y_i}$ для всех $2 \leqslant i \leqslant n$.

Техническая лемма об одной выводимой секвенции

Вспомним, что если $y \notin \mathrm{FV}(A)$ и подстановка $(A)^x_y$ допустима, то в СИП справедлива основная эквивалентность $\forall x A \equiv \forall y (A)^x_y$.

Техническая лемма об одной выводимой секвенции

Вспомним, что если $y \notin \mathrm{FV}(A)$ и подстановка $(A)^x_y$ допустима, то в СИП справедлива основная эквивалентность $\forall x A \equiv \forall y (A)^x_y$. $\Longrightarrow$ Применив эту основную эквивалентность n раз, получаем

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \Phi \equiv \forall y_1 \ldots \forall y_n (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n}.$$

Техническая лемма об одной выводимой секвенции

Вспомним, что если $y \notin \mathrm{FV}(A)$ и подстановка $(A)^x_y$ допустима, то в СИП справедлива основная эквивалентность $\forall x A \equiv \forall y (A)^x_y$. $\Longrightarrow$ Применив эту основную эквивалентность n раз, получаем

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \Phi \equiv \forall y_1 \ldots \forall y_n (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n}.$$

$\Longrightarrow$ В частности, выводима секвенция $\forall x_1 \ldots \forall x_n \Phi \vdash \forall y_1 \ldots \forall y_n (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n}$.

Техническая лемма об одной выводимой секвенции

Вспомним, что если $y \notin \mathrm{FV}(A)$ и подстановка $(A)^x_y$ допустима, то в СИП справедлива основная эквивалентность $\forall x A \equiv \forall y (A)^x_y$. $\Longrightarrow$ Применив эту основную эквивалентность n раз, получаем

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \Phi \equiv \forall y_1 \ldots \forall y_n (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n}.$$

$\Longrightarrow$ В частности, выводима секвенция $\forall x_1 \ldots \forall x_n \Phi \vdash \forall y_1 \ldots \forall y_n (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n}$.

Обозначим $\Psi = (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n}$.

Техническая лемма об одной выводимой секвенции

Вспомним, что если $y \notin \mathrm{FV}(A)$ и подстановка $(A)^x_y$ допустима, то в СИП справедлива основная эквивалентность $\forall x A \equiv \forall y (A)^x_y$. $\Longrightarrow$ Применив эту основную эквивалентность n раз, получаем

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \Phi \equiv \forall y_1 \ldots \forall y_n (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n}.$$

$\Longrightarrow$ В частности, выводима секвенция $\forall x_1 \ldots \forall x_n \Phi \vdash \forall y_1 \ldots \forall y_n (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n}$.

Обозначим $\Psi = (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n}$. $\Longrightarrow$ Подстановка $(\Psi)^{y_1,\ldots,y_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ допустима и имеет место $\left((\Psi)^{y_1,\ldots,y_{i-1}}_{t_1,\ldots,t_{i-1}}\right)^{y_i}_{t_i} = (\Psi)^{y_1,\ldots,y_i}_{t_1,\ldots,t_i}$ для всех $2 \leqslant i \leqslant n$.

Техническая лемма об одной выводимой секвенции

Вспомним, что если $y \notin \mathrm{FV}(A)$ и подстановка $(A)^x_y$ допустима, то в СИП справедлива основная эквивалентность $\forall x A \equiv \forall y (A)^x_y$. $\Longrightarrow$ Применив эту основную эквивалентность n раз, получаем

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \Phi \equiv \forall y_1 \ldots \forall y_n (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n}.$$

$\Longrightarrow$ В частности, выводима секвенция $\forall x_1 \ldots \forall x_n \Phi \vdash \forall y_1 \ldots \forall y_n (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n}$.

Обозначим $\Psi = (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n}$. $\Longrightarrow$ Подстановка $(\Psi)^{y_1,\ldots,y_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ допустима и имеет место $\left((\Psi)^{y_1,\ldots,y_{i-1}}_{t_1,\ldots,t_{i-1}}\right)^{y_i}_{t_i} = (\Psi)^{y_1,\ldots,y_i}_{t_1,\ldots,t_i}$ для всех $2 \leqslant i \leqslant n$. $\Longrightarrow$ Получаем дерево вывода:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\Psi)^{y_1,\ldots,y_n}_{t_1,\ldots,t_n} \vdash (\Psi)^{y_1,\ldots,y_n}_{t_1,\ldots,t_n}}{\forall y_n (\Psi)^{y_1,\ldots,y_{n-1}}_{t_1,\ldots,t_{n-1}} \vdash (\Psi)^{y_1,\ldots,y_n}_{t_1,\ldots,t_n}}}{\vdots \qquad \vdots}}{\forall y_1 \ldots \forall y_n \Psi \vdash (\Psi)^{y_1,\ldots,y_n}_{t_1,\ldots,t_n}}$$

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Итак, секвенции $\forall x_1 \ldots \forall x_n \Phi \vdash \forall y_1 \ldots \forall y_n (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n}$ и $\forall y_1 \ldots \forall y_n \Psi \vdash (\Psi)^{y_1,\ldots,y_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ выводимы в СИП.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Итак, секвенции $\forall x_1 \ldots \forall x_n \Phi \vdash \forall y_1 \ldots \forall y_n (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n}$ и $\forall y_1 \ldots \forall y_n \Psi \vdash (\Psi)^{y_1,\ldots,y_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ выводимы в СИП. Кроме этого, очевидно $(\Psi)^{y_1,\ldots,y_n}_{t_1,\ldots,t_n} = (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Итак, секвенции $\forall x_1 \ldots \forall x_n \Phi \vdash \forall y_1 \ldots \forall y_n (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n}$ и $\forall y_1 \ldots \forall y_n \Psi \vdash (\Psi)^{y_1,\ldots,y_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ выводимы в СИП. Кроме этого, очевидно $(\Psi)^{y_1,\ldots,y_n}_{t_1,\ldots,t_n} = (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$. $\Longrightarrow$ Получаем окончательное дерево вывода требуемой секвенции:

$$\dfrac{\forall x_1 \ldots \forall x_n \Phi \vdash \forall y_1 \ldots \forall y_n \Psi; \qquad \dfrac{\forall y_1 \ldots \forall y_n \Psi \vdash (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}}{\vdash \forall y_1 \ldots \forall y_n \Psi \to (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}}}{\forall x_1 \ldots \forall x_n \Phi \vdash (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}}$$

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Итак, секвенции $\forall x_1 \ldots \forall x_n \Phi \vdash \forall y_1 \ldots \forall y_n (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n}$ и $\forall y_1 \ldots \forall y_n \Psi \vdash (\Psi)^{y_1,\ldots,y_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ выводимы в СИП. Кроме этого, очевидно $(\Psi)^{y_1,\ldots,y_n}_{t_1,\ldots,t_n} = (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$. $\Longrightarrow$ Получаем окончательное дерево вывода требуемой секвенции:

$$\dfrac{\forall x_1 \ldots \forall x_n \Phi \vdash \forall y_1 \ldots \forall y_n \Psi; \qquad \dfrac{\forall y_1 \ldots \forall y_n \Psi \vdash (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}}{\vdash \forall y_1 \ldots \forall y_n \Psi \to (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}}}{\forall x_1 \ldots \forall x_n \Phi \vdash (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}}$$

Лемма 1 доказана. $\square$

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Итак, секвенции $\forall x_1 \ldots \forall x_n \Phi \vdash \forall y_1 \ldots \forall y_n (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n}$ и $\forall y_1 \ldots \forall y_n \Psi \vdash (\Psi)^{y_1,\ldots,y_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ выводимы в СИП. Кроме этого, очевидно $(\Psi)^{y_1,\ldots,y_n}_{t_1,\ldots,t_n} = (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$. $\Longrightarrow$ Получаем окончательное дерево вывода требуемой секвенции:

$$\dfrac{\forall x_1 \ldots \forall x_n \Phi \vdash \forall y_1 \ldots \forall y_n \Psi; \qquad \dfrac{\forall y_1 \ldots \forall y_n \Psi \vdash (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}}{\vdash \forall y_1 \ldots \forall y_n \Psi \to (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}}}{\forall x_1 \ldots \forall x_n \Phi \vdash (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}}$$

Лемма 1 доказана. $\square$

Лемма 2. *Пусть $\Phi_1, \ldots, \Phi_k, \Psi$ — формулы сигнатуры Σ, $x_1, \ldots, x_n$ — попарно различные переменные, $t_1, \ldots, t_n$ — термы сигнатуры Σ такие, что подстановки $(\Psi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ и $(\Phi_i)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ допустимы для всех $1 \leqslant i \leqslant k$. Тогда правило*

$$\dfrac{\Phi_1, \ldots, \Phi_k \vdash \Psi}{(\Phi_1)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}, \ldots, (\Phi_k)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n} \vdash (\Psi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}}$$

является допустимым в СИП.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Доказательство: Для краткости обозначим $\overline{x} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, $\overline{t} = \langle t_1, \ldots, t_n \rangle$ и $\bigwedge \Phi_i = \Phi_1 \& \ldots \& \Phi_k$.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Доказательство: Для краткости обозначим $\overline{x} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, $\overline{t} = \langle t_1, \ldots, t_n \rangle$ и $\bigwedge \Phi_i = \Phi_1 \& \ldots \& \Phi_k$. $\Longrightarrow$ Следующее дерево вывода доказывает допустимость искомого правила в СИП:

$$
\dfrac{
\dfrac{(\bigwedge \Phi_i)^{\overline{x}}_{\overline{t}} \vdash (\bigwedge \Phi_i)^{\overline{x}}_{\overline{t}};
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\Phi_1, \ldots, \Phi_k \vdash \Psi}{\Phi_1 \& \ldots \& \Phi_k \vdash \Psi}
}{\vdash (\Phi_1 \& \ldots \& \Phi_k) \to \Psi}
}{\vdash \forall x_n (\bigwedge \Phi_i \to \Psi)}
}{\vdots \qquad \vdots}
}{\vdash \forall \overline{x} (\bigwedge \Phi_i \to \Psi);}
\qquad
\dfrac{\forall \overline{x} (\bigwedge \Phi_i \to \Psi) \vdash (\bigwedge \Phi_i \to \Psi)^{\overline{x}}_{\overline{t}}}{\vdash \forall \overline{x} (\bigwedge \Phi_i \to \Psi) \to (\bigwedge \Phi_i \to \Psi)^{\overline{x}}_{\overline{t}}}
\text{ Лемма 1}
}{\vdash (\bigwedge \Phi_i \to \Psi)^{\overline{x}}_{\overline{t}}}
}{
\dfrac{(\Phi_1 \& \ldots \& \Phi_k)^{\overline{x}}_{\overline{t}} \vdash (\Psi)^{\overline{x}}_{\overline{t}}}{(\Phi_1)^{\overline{x}}_{\overline{t}}, \ldots, (\Phi_k)^{\overline{x}}_{\overline{t}} \vdash (\Psi)^{\overline{x}}_{\overline{t}}}
}
$$

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Доказательство: Для краткости обозначим $\overline{x} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, $\overline{t} = \langle t_1, \ldots, t_n \rangle$ и $\bigwedge \Phi_i = \Phi_1 \& \ldots \& \Phi_k$. $\Longrightarrow$ Следующее дерево вывода доказывает допустимость искомого правила в СИП:

$$
\dfrac{
\dfrac{(\bigwedge \Phi_i)^{\overline{x}}_{\overline{t}} \vdash (\bigwedge \Phi_i)^{\overline{x}}_{\overline{t}};
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\Phi_1, \ldots, \Phi_k \vdash \Psi}{\Phi_1 \& \ldots \& \Phi_k \vdash \Psi}
}{\vdash (\Phi_1 \& \ldots \& \Phi_k) \to \Psi}
}{\vdash \forall x_n (\bigwedge \Phi_i \to \Psi)}
}{\vdots \qquad \vdots}
}{\vdash \forall \overline{x} (\bigwedge \Phi_i \to \Psi);}
\qquad
\dfrac{
\overset{\text{Лемма 1}}{\forall \overline{x} (\bigwedge \Phi_i \to \Psi) \vdash (\bigwedge \Phi_i \to \Psi)^{\overline{x}}_{\overline{t}}}
}{\vdash \forall \overline{x} (\bigwedge \Phi_i \to \Psi) \to (\bigwedge \Phi_i \to \Psi)^{\overline{x}}_{\overline{t}}}
}{\vdash (\bigwedge \Phi_i \to \Psi)^{\overline{x}}_{\overline{t}}}
}{
\dfrac{(\Phi_1 \& \ldots \& \Phi_k)^{\overline{x}}_{\overline{t}} \vdash (\Psi)^{\overline{x}}_{\overline{t}}}{(\Phi_1)^{\overline{x}}_{\overline{t}}, \ldots, (\Phi_k)^{\overline{x}}_{\overline{t}} \vdash (\Psi)^{\overline{x}}_{\overline{t}}}
}
$$

Лемма 2 доказана. $\square$

Лемма о синтаксических свойствах равенства в СИП

Лемма 3. *Пусть* $s, t, q, s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$ *— термы сигнатуры* Σ, $x_1, \ldots, x_n$ *— попарно различные переменные, а* Φ *— формула сигнатуры* Σ *такие, что подстановки* $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{s_1,\ldots,s_n}$ *и* $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ *допустимы. Тогда в СИП выводимы следующие секвенции:*

Лемма о синтаксических свойствах равенства в СИП

Лемма 3. *Пусть* $s, t, q, s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$ *— термы сигнатуры* Σ, $x_1, \ldots, x_n$ *— попарно различные переменные, а* Φ *— формула сигнатуры* Σ *такие, что подстановки* $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{s_1,\ldots,s_n}$ *и* $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ *допустимы. Тогда в СИП выводимы следующие секвенции:*

(a) $\vdash t \approx t$;

Лемма о синтаксических свойствах равенства в СИП

Лемма 3. *Пусть* $s, t, q, s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$ *— термы сигнатуры* Σ*,* $x_1, \ldots, x_n$ *— попарно различные переменные, а* Φ *— формула сигнатуры* Σ *такие, что подстановки* $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{s_1,\ldots,s_n}$ *и* $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ *допустимы. Тогда в СИП выводимы следующие секвенции:*

(а) $\vdash t \approx t$;

(б) $s \approx t \vdash t \approx s$;

Лемма о синтаксических свойствах равенства в СИП

Лемма 3. *Пусть* $s, t, q, s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$ *— термы сигнатуры* Σ, $x_1, \ldots, x_n$ *— попарно различные переменные, а* Φ *— формула сигнатуры* Σ *такие, что подстановки* $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{s_1,\ldots,s_n}$ *и* $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ *допустимы. Тогда в СИП выводимы следующие секвенции:*

(а) $\vdash t \approx t$;

(б) $s \approx t \vdash t \approx s$;

(в) $s \approx t, t \approx q \vdash s \approx q$;

Лемма о синтаксических свойствах равенства в СИП

Лемма 3. *Пусть* $s, t, q, s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$ *— термы сигнатуры* Σ, $x_1, \ldots, x_n$ *— попарно различные переменные, а* Φ *— формула сигнатуры* Σ *такие, что подстановки* $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{s_1,\ldots,s_n}$ *и* $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ *допустимы. Тогда в СИП выводимы следующие секвенции:*

(а) $\vdash t \approx t$;

(б) $s \approx t \vdash t \approx s$;

(в) $s \approx t, t \approx q \vdash s \approx q$;

(г) $s_1 \approx t_1, \ldots, s_n \approx t_n, (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{s_1,\ldots,s_n} \vdash (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$.

Лемма о синтаксических свойствах равенства в СИП

Лемма 3. *Пусть* $s, t, q, s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$ *— термы сигнатуры* Σ, $x_1, \ldots, x_n$ *— попарно различные переменные, а* Φ *— формула сигнатуры* Σ *такие, что подстановки* $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{s_1,\ldots,s_n}$ *и* $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ *допустимы. Тогда в СИП выводимы следующие секвенции:*

(а) $\vdash t \approx t$;

(б) $s \approx t \vdash t \approx s$;

(в) $s \approx t, t \approx q \vdash s \approx q$;

(г) $s_1 \approx t_1, \ldots, s_n \approx t_n, (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{s_1,\ldots,s_n} \vdash (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$.

Доказательство: Пункт (а) сразу получается из аксиомы $\vdash x \approx x$ по Лемме 2.

Лемма о синтаксических свойствах равенства в СИП

Лемма 3. *Пусть* $s, t, q, s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$ *— термы сигнатуры* Σ, $x_1, \ldots, x_n$ *— попарно различные переменные, а* Φ *— формула сигнатуры* Σ *такие, что подстановки* $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{s_1,\ldots,s_n}$ *и* $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ *допустимы. Тогда в СИП выводимы следующие секвенции:*

(а) $\vdash t \approx t$;

(б) $s \approx t \vdash t \approx s$;

(в) $s \approx t, t \approx q \vdash s \approx q$;

(г) $s_1 \approx t_1, \ldots, s_n \approx t_n, (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{s_1,\ldots,s_n} \vdash (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$.

Доказательство: Пункт (а) сразу получается из аксиомы $\vdash x \approx x$ по Лемме 2.

(б) Пусть x, y, z — попарно различные переменные.

Лемма о синтаксических свойствах равенства в СИП

Лемма 3. *Пусть* $s, t, q, s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$ *— термы сигнатуры* Σ, $x_1, \ldots, x_n$ *— попарно различные переменные, а* Φ *— формула сигнатуры* Σ *такие, что подстановки* $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{s_1,\ldots,s_n}$ *и* $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ *допустимы. Тогда в СИП выводимы следующие секвенции:*

(а) $\vdash t \approx t$;

(б) $s \approx t \vdash t \approx s$;

(в) $s \approx t, t \approx q \vdash s \approx q$;

(г) $s_1 \approx t_1, \ldots, s_n \approx t_n, (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{s_1,\ldots,s_n} \vdash (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$.

Доказательство: Пункт (а) сразу получается из аксиомы $\vdash x \approx x$ по Лемме 2.

(б) Пусть x, y, z — попарно различные переменные. $\Longrightarrow$ Получаем дерево вывода:

$$\dfrac{\dfrac{\vdash x \approx x; \qquad \dfrac{x \approx y, x \approx x \vdash y \approx x}{x \approx y \vdash x \approx x \to y \approx x}}{x \approx y \vdash y \approx x}}{s \approx t \vdash t \approx s}$$

Лемма о синтаксических свойствах равенства в СИП

Лемма 3. *Пусть* $s, t, q, s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$ *— термы сигнатуры* Σ, $x_1, \ldots, x_n$ *— попарно различные переменные, а* Φ *— формула сигнатуры* Σ *такие, что подстановки* $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{s_1,\ldots,s_n}$ *и* $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ *допустимы. Тогда в СИП выводимы следующие секвенции:*

(а) $\vdash t \approx t$;

(б) $s \approx t \vdash t \approx s$;

(в) $s \approx t, t \approx q \vdash s \approx q$;

(г) $s_1 \approx t_1, \ldots, s_n \approx t_n, (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{s_1,\ldots,s_n} \vdash (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$.

Доказательство: Пункт (а) сразу получается из аксиомы $\vdash x \approx x$ по Лемме 2.

(б) Пусть x, y, z — попарно различные переменные. $\Longrightarrow$ Получаем дерево вывода:

$$\dfrac{\dfrac{\vdash x \approx x; \qquad \dfrac{x \approx y, x \approx x \vdash y \approx x}{x \approx y \vdash x \approx x \to y \approx x} \longleftarrow \text{Аксиома } x{\approx}y, (z{\approx}x)^z_x \vdash (z{\approx}x)^z_y}{x \approx y \vdash y \approx x}}{s \approx t \vdash t \approx s}$$

Лемма о синтаксических свойствах равенства в СИП

Лемма 3. *Пусть* $s, t, q, s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$ *— термы сигнатуры* Σ, $x_1, \ldots, x_n$ *— попарно различные переменные, а* Φ *— формула сигнатуры* Σ *такие, что подстановки* $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{s_1,\ldots,s_n}$ *и* $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ *допустимы. Тогда в СИП выводимы следующие секвенции:*

(а) $\vdash t \approx t$;

(б) $s \approx t \vdash t \approx s$;

(в) $s \approx t, t \approx q \vdash s \approx q$;

(г) $s_1 \approx t_1, \ldots, s_n \approx t_n, (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{s_1,\ldots,s_n} \vdash (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$.

Доказательство: Пункт (а) сразу получается из аксиомы $\vdash x \approx x$ по Лемме 2.

(б) Пусть x, y, z — попарно различные переменные. $\Longrightarrow$ Получаем дерево вывода:

$$\dfrac{\dfrac{\vdash x \approx x; \qquad \dfrac{x \approx y, x \approx x \vdash y \approx x}{x \approx y \vdash x \approx x \to y \approx x}}{x \approx y \vdash y \approx x}}{s \approx t \vdash t \approx s}$$

$\longleftarrow$ Аксиома $x \approx y, (z \approx x)^z_x \vdash (z \approx x)^z_y$

$\longleftarrow$ Лемма 2

Лемма о синтаксических свойствах равенства в СИП

(в) Пусть x, y, z, u — попарно различные переменные.

Лемма о синтаксических свойствах равенства в СИП

(в) Пусть x, y, z, u — попарно различные переменные. $\Rightarrow$ Получаем дерево вывода:

$$\cfrac{\cfrac{y \approx z, x \approx y \vdash x \approx z}{x \approx y, y \approx z \vdash x \approx z}}{s \approx t, t \approx q \vdash s \approx q}$$

Лемма о синтаксических свойствах равенства в СИП

(в) Пусть x, y, z, u — попарно различные переменные. $\Rightarrow$ Получаем дерево вывода:

$$\dfrac{\dfrac{y \approx z, x \approx y \vdash x \approx z}{x \approx y, y \approx z \vdash x \approx z}}{s \approx t, t \approx q \vdash s \approx q} \longleftarrow \text{Аксиома } y{\approx}z, (x{\approx}u)^u_y \vdash (x{\approx}u)^u_z$$

Лемма о синтаксических свойствах равенства в СИП

(в) Пусть x, y, z, u — попарно различные переменные. $\Rightarrow$ Получаем дерево вывода:

$$\dfrac{\dfrac{y \approx z, x \approx y \vdash x \approx z}{x \approx y, y \approx z \vdash x \approx z}}{s \approx t, t \approx q \vdash s \approx q}$$

$\longleftarrow$ Аксиома $y{\approx}z, (x{\approx}u)^u_y \vdash (x{\approx}u)^u_z$

$\longleftarrow$ Лемма 2

Лемма о синтаксических свойствах равенства в СИП

(в) Пусть x, y, z, u — попарно различные переменные. $\Rightarrow$ Получаем дерево вывода:

$$\dfrac{\dfrac{y \approx z, x \approx y \vdash x \approx z}{x \approx y, y \approx z \vdash x \approx z}}{s \approx t, t \approx q \vdash s \approx q}$$

← Аксиома $y{\approx}z, (x{\approx}u)^u_y \vdash (x{\approx}u)^u_z$

← Лемма 2

(г) Пусть $y_1, \ldots, y_n, z_1 \ldots, z_n$ — попарно различные переменные, отличные от $x_1, \ldots, x_n$, и не входящие в формулу Φ.

Лемма о синтаксических свойствах равенства в СИП

(в) Пусть x, y, z, u — попарно различные переменные. $\Rightarrow$ Получаем дерево вывода:

$$\dfrac{\dfrac{y \approx z, x \approx y \vdash x \approx z}{x \approx y, y \approx z \vdash x \approx z}}{s \approx t, t \approx q \vdash s \approx q}$$

$\longleftarrow$ Аксиома $y{\approx}z, (x{\approx}u)^u_y \vdash (x{\approx}u)^u_z$

$\longleftarrow$ Лемма 2

(г) Пусть $y_1, \ldots, y_n, z_1 \ldots, z_n$ — попарно различные переменные, отличные от $x_1, \ldots, x_n$, и не входящие в формулу Φ. $\Longrightarrow \left((\Phi)^{x_1, x_2, \ldots, x_n}_{y_1, y_2, \ldots, y_n}\right)^{y_1}_{z_1} = (\Phi)^{x_1, x_2, \ldots, x_n}_{z_1, y_2, \ldots, y_n}$.

Лемма о синтаксических свойствах равенства в СИП

(в) Пусть x, y, z, u — попарно различные переменные. $\Rightarrow$ Получаем дерево вывода:

$$\dfrac{\dfrac{y \approx z, x \approx y \vdash x \approx z}{x \approx y, y \approx z \vdash x \approx z}\ \leftarrow \text{Аксиома } y{\approx}z, (x{\approx}u)^u_y \vdash (x{\approx}u)^u_z}{s \approx t, t \approx q \vdash s \approx q}\ \leftarrow \text{Лемма 2}$$

(г) Пусть $y_1, \ldots, y_n, z_1 \ldots, z_n$ — попарно различные переменные, отличные от $x_1, \ldots, x_n$, и не входящие в формулу Φ. $\Longrightarrow \left((\Phi)^{x_1,x_2,\ldots,x_n}_{y_1,y_2,\ldots,y_n}\right)^{y_1}_{z_1} = (\Phi)^{x_1,x_2,\ldots,x_n}_{z_1,y_2,\ldots,y_n}$. $\Longrightarrow$ Следующая секвенция является аксиомой:

$$y_1 \approx z_1, (\Phi)^{x_1,x_2,\ldots,x_n}_{y_1,y_2,\ldots,y_n} \vdash (\Phi)^{x_1,x_2,\ldots,x_n}_{z_1,y_2,\ldots,y_n}. \quad (*)$$

Лемма о синтаксических свойствах равенства в СИП

(в) Пусть x, y, z, u — попарно различные переменные. $\Rightarrow$ Получаем дерево вывода:

$$\dfrac{\dfrac{y \approx z, x \approx y \vdash x \approx z}{x \approx y, y \approx z \vdash x \approx z} \leftarrow \text{Аксиома } y{\approx}z, (x{\approx}u)^u_y \vdash (x{\approx}u)^u_z}{s \approx t, t \approx q \vdash s \approx q} \leftarrow \text{Лемма 2}$$

(г) Пусть $y_1, \ldots, y_n, z_1 \ldots, z_n$ — попарно различные переменные, отличные от $x_1, \ldots, x_n$, и не входящие в формулу Φ. $\Longrightarrow \left((\Phi)^{x_1,x_2,\ldots,x_n}_{y_1,y_2,\ldots,y_n}\right)^{y_1}_{z_1} = (\Phi)^{x_1,x_2,\ldots,x_n}_{z_1,y_2,\ldots,y_n}$. $\Longrightarrow$ Следующая секвенция является аксиомой:

$$y_1 \approx z_1, (\Phi)^{x_1,x_2,\ldots,x_n}_{y_1,y_2,\ldots,y_n} \vdash (\Phi)^{x_1,x_2,\ldots,x_n}_{z_1,y_2,\ldots,y_n}. \quad (*)$$

С другой стороны, из аксиомы $y_2 \approx z_2, (\Phi)^{x_1,x_2,\ldots,x_n}_{z_1,y_2,\ldots,y_n} \vdash \left((\Phi)^{x_1,x_2,\ldots,x_n}_{z_1,y_2,\ldots,y_n}\right)^{y_2}_{z_2}$ по правилу введения импликации получаем выводимость секвенции

$$y_2 \approx z_2 \vdash (\Phi)^{x_1,x_2,\ldots,x_n}_{z_1,y_2,\ldots,y_n} \longrightarrow \left((\Phi)^{x_1,x_2,\ldots,x_n}_{z_1,y_2,\ldots,y_n}\right)^{y_2}_{z_2}. \quad (**)$$

Лемма о синтаксических свойствах равенства в СИП

$\Longrightarrow$ Из $(*)$ и $(**)$ по правилу modus ponens получаем выводимость секвенции

$$y_1 \approx z_1, y_2 \approx z_2, (\Phi)^{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n}_{y_1,y_2,y_3,\ldots,y_n} \vdash (\Phi)^{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n}_{z_1,z_2,y_3,\ldots,y_n}.$$

Лемма о синтаксических свойствах равенства в СИП

$\Longrightarrow$ Из $(*)$ и $(**)$ по правилу modus ponens получаем выводимость секвенции

$$y_1 \approx z_1, y_2 \approx z_2, (\Phi)^{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n}_{y_1,y_2,y_3,\ldots,y_n} \vdash (\Phi)^{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n}_{z_1,z_2,y_3,\ldots,y_n}.$$

Проделав несколько таких шагов, получаем выводимость секвенции

$$y_1 \approx z_1, \ldots, y_n \approx z_n, (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n} \vdash (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{z_1,\ldots,z_n}.$$

Лемма о синтаксических свойствах равенства в СИП

$\Longrightarrow$ Из $(*)$ и $(**)$ по правилу modus ponens получаем выводимость секвенции

$$y_1 \approx z_1, y_2 \approx z_2, (\Phi)^{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n}_{y_1,y_2,y_3,\ldots,y_n} \vdash (\Phi)^{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n}_{z_1,z_2,y_3,\ldots,y_n}.$$

Проделав несколько таких шагов, получаем выводимость секвенции

$$y_1 \approx z_1, \ldots, y_n \approx z_n, (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n} \vdash (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{z_1,\ldots,z_n}.$$

Отсюда по Лемме 2 окончательно получаем выводимость секвенции

$$s_1 \approx t_1, \ldots, s_n \approx t_n, (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{s_1,\ldots,s_n} \vdash (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}.$$

Лемма о синтаксических свойствах равенства в СИП

$\Longrightarrow$ Из $(*)$ и $(**)$ по правилу modus ponens получаем выводимость секвенции

$$y_1 \approx z_1, y_2 \approx z_2, (\Phi)^{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n}_{y_1,y_2,y_3,\ldots,y_n} \vdash (\Phi)^{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n}_{z_1,z_2,y_3,\ldots,y_n}.$$

Проделав несколько таких шагов, получаем выводимость секвенции

$$y_1 \approx z_1, \ldots, y_n \approx z_n, (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n} \vdash (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{z_1,\ldots,z_n}.$$

Отсюда по Лемме 2 окончательно получаем выводимость секвенции

$$s_1 \approx t_1, \ldots, s_n \approx t_n, (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{s_1,\ldots,s_n} \vdash (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}.$$

Лемма 3 доказана. $\square$

Теорема о существовании канонической модели теории Хенкина

Теорема 4 (Хенкин). *Пусть T — теория Хенкина сигнатуры Σ. Тогда существует единственная с точностью до изоморфизма алгебраическая система $\mathfrak{M}$ сигнатуры Σ такая, что $\mathfrak{M} \models T$ и для любого $a \in M$ найдётся константый символ $c \in \Sigma$ со свойством $a = c^{\mathfrak{M}}$.*

Теорема о существовании канонической модели теории Хенкина

Теорема 4 (Хенкин). *Пусть T — теория Хенкина сигнатуры Σ. Тогда существует единственная с точностью до изоморфизма алгебраическая система $\mathfrak{M}$ сигнатуры Σ такая, что $\mathfrak{M} \models T$ и для любого $a \in M$ найдётся константый символ $c \in \Sigma$ со свойством $a = c^{\mathfrak{M}}$.*

(Идея доказательства: Вся информация о системе $\mathfrak{M}$ уже содержится в теории T. Носитель $\mathfrak{M}$ определяется на множестве сигнатурных констант. Структура системы $\mathfrak{M}$ синтаксически кодируется в теории T.)

Теорема о существовании канонической модели теории Хенкина

Теорема 4 (Хенкин). *Пусть T — теория Хенкина сигнатуры Σ. Тогда существует единственная с точностью до изоморфизма алгебраическая система $\mathfrak{M}$ сигнатуры Σ такая, что $\mathfrak{M} \models T$ и для любого $a \in M$ найдётся константый символ $c \in \Sigma$ со свойством $a = c^{\mathfrak{M}}$.*

(Идея доказательства: Вся информация о системе $\mathfrak{M}$ уже содержится в теории T. Носитель $\mathfrak{M}$ определяется на множестве сигнатурных констант. Структура системы $\mathfrak{M}$ синтаксически кодируется в теории T.)

Доказательство: Схема доказательства теоремы будет следующей:

Теорема о существовании канонической модели теории Хенкина

Теорема 4 (Хенкин). *Пусть T — теория Хенкина сигнатуры Σ. Тогда существует единственная с точностью до изоморфизма алгебраическая система $\mathfrak{M}$ сигнатуры Σ такая, что $\mathfrak{M} \models T$ и для любого $a \in M$ найдётся константый символ $c \in \Sigma$ со свойством $a = c^{\mathfrak{M}}$.*

(Идея доказательства: Вся информация о системе $\mathfrak{M}$ уже содержится в теории T. Носитель $\mathfrak{M}$ определяется на множестве сигнатурных констант. Структура системы $\mathfrak{M}$ синтаксически кодируется в теории T.)

Доказательство: Схема доказательства теоремы будет следующей:

(1) Определение системы $\mathfrak{M}$,

Теорема о существовании канонической модели теории Хенкина

Теорема 4 (Хенкин). *Пусть T — теория Хенкина сигнатуры Σ. Тогда существует единственная с точностью до изоморфизма алгебраическая система $\mathfrak{M}$ сигнатуры Σ такая, что $\mathfrak{M} \models T$ и для любого $a \in M$ найдётся константый символ $c \in \Sigma$ со свойством $a = c^{\mathfrak{M}}$.*

(Идея доказательства: Вся информация о системе $\mathfrak{M}$ уже содержится в теории T. Носитель $\mathfrak{M}$ определяется на множестве сигнатурных констант. Структура системы $\mathfrak{M}$ синтаксически кодируется в теории T.)

Доказательство: Схема доказательства теоремы будет следующей:

(1) Определение системы $\mathfrak{M}$,

(2) Проверка корректности определения $\mathfrak{M}$,

Теорема о существовании канонической модели теории Хенкина

Теорема 4 (Хенкин). *Пусть T — теория Хенкина сигнатуры Σ. Тогда существует единственная с точностью до изоморфизма алгебраическая система $\mathfrak{M}$ сигнатуры Σ такая, что $\mathfrak{M} \models T$ и для любого $a \in M$ найдётся константый символ $c \in \Sigma$ со свойством $a = c^{\mathfrak{M}}$.*

(Идея доказательства: Вся информация о системе $\mathfrak{M}$ уже содержится в теории T. Носитель $\mathfrak{M}$ определяется на множестве сигнатурных констант. Структура системы $\mathfrak{M}$ синтаксически кодируется в теории T.)

Доказательство: Схема доказательства теоремы будет следующей:

(1) Определение системы $\mathfrak{M}$,

(2) Проверка корректности определения $\mathfrak{M}$,

(3) Доказательство свойства $\mathfrak{M} \models T$,

Теорема о существовании канонической модели теории Хенкина

Теорема 4 (Хенкин). *Пусть T — теория Хенкина сигнатуры Σ. Тогда существует единственная с точностью до изоморфизма алгебраическая система $\mathfrak{M}$ сигнатуры Σ такая, что $\mathfrak{M} \models T$ и для любого $a \in M$ найдётся константый символ $c \in \Sigma$ со свойством $a = c^{\mathfrak{M}}$.*

(Идея доказательства: Вся информация о системе $\mathfrak{M}$ уже содержится в теории T. Носитель $\mathfrak{M}$ определяется на множестве сигнатурных констант. Структура системы $\mathfrak{M}$ синтаксически кодируется в теории T.)

Доказательство: Схема доказательства теоремы будет следующей:

(1) Определение системы $\mathfrak{M}$,

(2) Проверка корректности определения $\mathfrak{M}$,

(3) Доказательство свойства $\mathfrak{M} \models T$,

(4) Доказательство единственности $\mathfrak{M}$ с точностью до изоморфизма.

Теорема о канонической модели: определение системы $\mathfrak{M}$

Определение системы $\mathfrak{M}$:

Теорема о канонической модели: определение системы $\mathfrak{M}$

Определение системы $\mathfrak{M}$: Пусть C — множество всех константных символов из Σ.

Теорема о канонической модели: определение системы $\mathfrak{M}$

Определение системы $\mathfrak{M}$: Пусть C — множество всех константных символов из Σ. Заметим, что $C \neq \varnothing$.

Теорема о канонической модели: определение системы $\mathfrak{M}$

Определение системы $\mathfrak{M}$: Пусть C — множество всех константных символов из Σ. Заметим, что $C \neq \varnothing$. Действительно, например, предложение $\exists x(x \approx x)$ является выводимым в СИП, а значит $\exists x(x \approx x) \in T$ (любое выводимое в СИП предложение лежит в любой теории).

Теорема о канонической модели: определение системы $\mathfrak{M}$

Определение системы $\mathfrak{M}$: Пусть C — множество всех константных символов из Σ. Заметим, что $C \neq \varnothing$. Действительно, например, предложение $\exists x(x \approx x)$ является выводимым в СИП, а значит $\exists x(x \approx x) \in T$ (любое выводимое в СИП предложение лежит в любой теории). $\Longrightarrow$ В силу определения теории Хенкина, найдётся $c \in C$ со свойством $c \approx c \in T$.

Теорема о канонической модели: определение системы $\mathfrak{M}$

Определение системы $\mathfrak{M}$: Пусть C — множество всех константных символов из Σ. Заметим, что $C \neq \varnothing$. Действительно, например, предложение $\exists x(x \approx x)$ является выводимым в СИП, а значит $\exists x(x \approx x) \in T$ (любое выводимое в СИП предложение лежит в любой теории). $\Longrightarrow$ В силу определения теории Хенкина, найдётся $c \in C$ со свойством $c \approx c \in T$.

Определим на множестве C бинарное отношение $\sim$, положив для любых $c, d \in C$

$$c \sim d \Longleftrightarrow c \approx d \in T.$$

Теорема о канонической модели: определение системы $\mathfrak{M}$

Определение системы $\mathfrak{M}$: Пусть C — множество всех константных символов из Σ. Заметим, что $C \neq \varnothing$. Действительно, например, предложение $\exists x(x \approx x)$ является выводимым в СИП, а значит $\exists x(x \approx x) \in T$ (любое выводимое в СИП предложение лежит в любой теории). $\Longrightarrow$ В силу определения теории Хенкина, найдётся $c \in C$ со свойством $c \approx c \in T$.

Определим на множестве C бинарное отношение $\sim$, положив для любых $c, d \in C$

$$c \sim d \Longleftrightarrow c \approx d \in T.$$

Из Леммы 3 (п.п. (а)–(в)) и дедуктивной замкнутости T вытекает, что $\sim$ является отношением эквивалентности на C.

Теорема о канонической модели: определение системы $\mathfrak{M}$

Определение системы $\mathfrak{M}$: Пусть C — множество всех константных символов из Σ. Заметим, что $C \neq \varnothing$. Действительно, например, предложение $\exists x(x \approx x)$ является выводимым в СИП, а значит $\exists x(x \approx x) \in T$ (любое выводимое в СИП предложение лежит в любой теории). $\Longrightarrow$ В силу определения теории Хенкина, найдётся $c \in C$ со свойством $c \approx c \in T$.

Определим на множестве C бинарное отношение $\sim$, положив для любых $c, d \in C$

$$c \sim d \Longleftrightarrow c \approx d \in T.$$

Из Леммы 3 (п.п. (а)–(в)) и дедуктивной замкнутости T вытекает, что $\sim$ является отношением эквивалентности на C. Для любого $c \in C$ обозначим через $[c]$ фактор -класс по отношению $\sim$, содержащий элемент c,

Теорема о канонической модели: определение системы $\mathfrak{M}$

Определение системы $\mathfrak{M}$: Пусть C — множество всех константных символов из Σ. Заметим, что $C \neq \varnothing$. Действительно, например, предложение $\exists x(x \approx x)$ является выводимым в СИП, а значит $\exists x(x \approx x) \in T$ (любое выводимое в СИП предложение лежит в любой теории). $\Longrightarrow$ В силу определения теории Хенкина, найдётся $c \in C$ со свойством $c \approx c \in T$.

Определим на множестве C бинарное отношение $\sim$, положив для любых $c, d \in C$

$$c \sim d \Longleftrightarrow c \approx d \in T.$$

Из Леммы 3 (п.п. (а)–(в)) и дедуктивной замкнутости T вытекает, что $\sim$ является отношением эквивалентности на C. Для любого $c \in C$ обозначим через $[c]$ фактор -класс по отношению $\sim$, содержащий элемент c, а через $C/\sim$ — фактор-множество, состоящее из всех таких фактор-классов.

Теорема о канонической модели: определение системы $\mathfrak{M}$

Определим алгебраическую систему $\mathfrak{M}$ сигнатуры Σ следующим образом:

Теорема о канонической модели: определение системы $\mathfrak{M}$

Определим алгебраическую систему $\mathfrak{M}$ сигнатуры Σ следующим образом:

(a) носитель системы $M = C/{\sim}$;

Теорема о канонической модели: определение системы $\mathfrak{M}$

Определим алгебраическую систему $\mathfrak{M}$ сигнатуры Σ следующим образом:

(а) носитель системы $M = C/{\sim}$;

(б) для любого n-местного предикатного символа P из сигнатуры Σ и любых $c_1, \ldots, c_n \in C$ полагаем:

$$\langle [c_1], \ldots, [c_n] \rangle \in P^{\mathfrak{M}} \iff P(c_1, \ldots, c_n) \in T;$$

Теорема о канонической модели: определение системы $\mathfrak{M}$

Определим алгебраическую систему $\mathfrak{M}$ сигнатуры Σ следующим образом:

(а) носитель системы $M = C/{\sim}$;

(б) для любого n-местного предикатного символа P из сигнатуры Σ и любых $c_1, \ldots, c_n \in C$ полагаем:

$$\langle [c_1], \ldots, [c_n] \rangle \in P^{\mathfrak{M}} \iff P(c_1, \ldots, c_n) \in T;$$

(в) для любого n-местного функционального символа F из сигнатуры Σ и любых $c_1, \ldots, c_n, c \in C$ полагаем:

$$F^{\mathfrak{M}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [c] \iff F(c_1, \ldots, c_n) \approx c \in T;$$

Теорема о канонической модели: определение системы $\mathfrak{M}$

Определим алгебраическую систему $\mathfrak{M}$ сигнатуры Σ следующим образом:

(а) носитель системы $M = C/{\sim}$;

(б) для любого n-местного предикатного символа P из сигнатуры Σ и любых $c_1, \ldots, c_n \in C$ полагаем:

$$\langle [c_1], \ldots, [c_n] \rangle \in P^{\mathfrak{M}} \iff P(c_1, \ldots, c_n) \in T;$$

(в) для любого n-местного функционального символа F из сигнатуры Σ и любых $c_1, \ldots, c_n, c \in C$ полагаем:

$$F^{\mathfrak{M}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [c] \iff F(c_1, \ldots, c_n) \approx c \in T;$$

(г) для любого константного символа c из сигнатуры Σ полагаем $c^{\mathfrak{M}} = [c]$.

Теорема о канонической модели: определение системы $\mathfrak{M}$

Определим алгебраическую систему $\mathfrak{M}$ сигнатуры Σ следующим образом:

(а) носитель системы $M = C/{\sim}$;

(б) для любого n-местного предикатного символа P из сигнатуры Σ и любых $c_1, \ldots, c_n \in C$ полагаем:

$$\langle [c_1], \ldots, [c_n] \rangle \in P^{\mathfrak{M}} \iff P(c_1, \ldots, c_n) \in T;$$

(в) для любого n-местного функционального символа F из сигнатуры Σ и любых $c_1, \ldots, c_n, c \in C$ полагаем:

$$F^{\mathfrak{M}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [c] \iff F(c_1, \ldots, c_n) \approx c \in T;$$

(г) для любого константного символа c из сигнатуры Σ полагаем $c^{\mathfrak{M}} = [c]$.

Из пунктов (а) и (г) очевидно вытекает, что для любого $a \in M$ найдётся $c \in C$ со свойством $a = c^{\mathfrak{M}}$.

Теорема о канонической модели: корректность определения $\mathfrak{M}$

Корректность определения $\mathfrak{M}$:

Теорема о канонической модели: корректность определения $\mathfrak{M}$

Корректность определения $\mathfrak{M}$: Докажем, что определение предиката $P^{\mathfrak{M}}$ не зависит от выбора представителей в фактор-классах $[c_1], \ldots, [c_n]$.

Теорема о канонической модели: корректность определения $\mathfrak{M}$

Корректность определения $\mathfrak{M}$: Докажем, что определение предиката $P^{\mathfrak{M}}$ не зависит от выбора представителей в фактор-классах $[c_1], \ldots, [c_n]$. Пусть справедливо $P(c_1, \ldots, c_n) \in T$ и $c_1 \sim d_1, \ldots, c_n \sim d_n$.

Теорема о канонической модели: корректность определения $\mathfrak{M}$

Корректность определения $\mathfrak{M}$: Докажем, что определение предиката $P^{\mathfrak{M}}$ не зависит от выбора представителей в фактор-классах $[c_1], \ldots, [c_n]$. Пусть справедливо $P(c_1, \ldots, c_n) \in T$ и $c_1 \sim d_1, \ldots, c_n \sim d_n$. $\Longrightarrow$ Формулы $c_1 \approx d_1, \ldots, c_n \approx d_n \in T$.

Теорема о канонической модели: корректность определения $\mathfrak{M}$

Корректность определения $\mathfrak{M}$: Докажем, что определение предиката $P^{\mathfrak{M}}$ не зависит от выбора представителей в фактор-классах $[c_1], \ldots, [c_n]$. Пусть справедливо $P(c_1, \ldots, c_n) \in T$ и $c_1 \sim d_1, \ldots, c_n \sim d_n$. $\Longrightarrow$ Формулы $c_1 \approx d_1, \ldots, c_n \approx d_n \in T$. В силу Леммы 3 (г), секвенция

$$c_1 \approx d_1, \ldots, c_n \approx d_n, P(c_1, \ldots, c_n) \vdash P(d_1, \ldots, d_n)$$

выводима в СИП, и все формулы из её левой части лежат в теории T.

Теорема о канонической модели: корректность определения $\mathfrak{M}$

Корректность определения $\mathfrak{M}$: Докажем, что определение предиката $P^{\mathfrak{M}}$ не зависит от выбора представителей в фактор-классах $[c_1], \ldots, [c_n]$. Пусть справедливо $P(c_1, \ldots, c_n) \in T$ и $c_1 \sim d_1, \ldots, c_n \sim d_n$. $\Longrightarrow$ Формулы $c_1 \approx d_1, \ldots, c_n \approx d_n \in T$. В силу Леммы 3 (г), секвенция

$$c_1 \approx d_1, \ldots, c_n \approx d_n, P(c_1, \ldots, c_n) \vdash P(d_1, \ldots, d_n)$$

выводима в СИП, и все формулы из её левой части лежат в теории T. $\Longrightarrow$ В силу дедуктивной замкнутости T, заключаем, что $P(d_1, \ldots, d_n) \in T$, что и требовалось.

Теорема о канонической модели: корректность определения $\mathfrak{M}$

Корректность определения $\mathfrak{M}$: Докажем, что определение предиката $P^{\mathfrak{M}}$ не зависит от выбора представителей в фактор-классах $[c_1], \ldots, [c_n]$. Пусть справедливо $P(c_1, \ldots, c_n) \in T$ и $c_1 \sim d_1, \ldots, c_n \sim d_n$. $\Longrightarrow$ Формулы $c_1 \approx d_1, \ldots, c_n \approx d_n \in T$. В силу Леммы 3 (г), секвенция

$$c_1 \approx d_1, \ldots, c_n \approx d_n, P(c_1, \ldots, c_n) \vdash P(d_1, \ldots, d_n)$$

выводима в СИП, и все формулы из её левой части лежат в теории T. $\Longrightarrow$ В силу дедуктивной замкнутости T, заключаем, что $P(d_1, \ldots, d_n) \in T$, что и требовалось.

Докажем, что определение функции $F^{\mathfrak{M}}$ не зависит от выбора представителей в фактор-классах $[c_1], \ldots, [c_n]$ и при этом значение функции на аргументах $[c_1], \ldots, [c_n]$ единственно

Теорема о канонической модели: корректность определения $\mathfrak{M}$

Корректность определения $\mathfrak{M}$: Докажем, что определение предиката $P^{\mathfrak{M}}$ не зависит от выбора представителей в фактор-классах $[c_1], \ldots, [c_n]$. Пусть справедливо $P(c_1, \ldots, c_n) \in T$ и $c_1 \sim d_1, \ldots, c_n \sim d_n$. $\Longrightarrow$ Формулы $c_1 \approx d_1, \ldots, c_n \approx d_n \in T$. В силу Леммы 3 (г), секвенция

$$c_1 \approx d_1, \ldots, c_n \approx d_n, P(c_1, \ldots, c_n) \vdash P(d_1, \ldots, d_n)$$

выводима в СИП, и все формулы из её левой части лежат в теории T. $\Longrightarrow$ В силу дедуктивной замкнутости T, заключаем, что $P(d_1, \ldots, d_n) \in T$, что и требовалось.

Докажем, что определение функции $F^{\mathfrak{M}}$ не зависит от выбора представителей в фактор-классах $[c_1], \ldots, [c_n]$ и при этом значение функции на аргументах $[c_1], \ldots, [c_n]$ единственно (оба утверждения докажем одновременно одним рассуждением).

Теорема о канонической модели: корректность определения $\mathfrak{M}$

Корректность определения $\mathfrak{M}$: Докажем, что определение предиката $P^{\mathfrak{M}}$ не зависит от выбора представителей в фактор-классах $[c_1], \ldots, [c_n]$. Пусть справедливо $P(c_1, \ldots, c_n) \in T$ и $c_1 \sim d_1, \ldots, c_n \sim d_n$. $\Longrightarrow$ Формулы $c_1 \approx d_1, \ldots, c_n \approx d_n \in T$. В силу Леммы 3 (г), секвенция

$$c_1 \approx d_1, \ldots, c_n \approx d_n, P(c_1, \ldots, c_n) \vdash P(d_1, \ldots, d_n)$$

выводима в СИП, и все формулы из её левой части лежат в теории T. $\Longrightarrow$ В силу дедуктивной замкнутости T, заключаем, что $P(d_1, \ldots, d_n) \in T$, что и требовалось.

Докажем, что определение функции $F^{\mathfrak{M}}$ не зависит от выбора представителей в фактор-классах $[c_1], \ldots, [c_n]$ и при этом значение функции на аргументах $[c_1], \ldots, [c_n]$ единственно (оба утверждения докажем одновременно одним рассуждением). Пусть $c_1 \sim d_1, \ldots, c_n \sim d_n$, $F(c_1, \ldots, c_n) \approx c \in T$ и $F(d_1, \ldots, d_n) \approx d \in T$.

Теорема о канонической модели: корректность определения $\mathfrak{M}$

Корректность определения $\mathfrak{M}$: Докажем, что определение предиката $P^{\mathfrak{M}}$ не зависит от выбора представителей в фактор-классах $[c_1], \ldots, [c_n]$. Пусть справедливо $P(c_1, \ldots, c_n) \in T$ и $c_1 \sim d_1, \ldots, c_n \sim d_n$. $\Longrightarrow$ Формулы $c_1 \approx d_1, \ldots, c_n \approx d_n \in T$. В силу Леммы 3 (г), секвенция

$$c_1 \approx d_1, \ldots, c_n \approx d_n, P(c_1, \ldots, c_n) \vdash P(d_1, \ldots, d_n)$$

выводима в СИП, и все формулы из её левой части лежат в теории T. $\Longrightarrow$ В силу дедуктивной замкнутости T, заключаем, что $P(d_1, \ldots, d_n) \in T$, что и требовалось.

Докажем, что определение функции $F^{\mathfrak{M}}$ не зависит от выбора представителей в фактор-классах $[c_1], \ldots, [c_n]$ и при этом значение функции на аргументах $[c_1], \ldots, [c_n]$ единственно (оба утверждения докажем одновременно одним рассуждением). Пусть $c_1 \sim d_1, \ldots, c_n \sim d_n$, $F(c_1, \ldots, c_n) \approx c \in T$ и $F(d_1, \ldots, d_n) \approx d \in T$. В силу Леммы 3 (г), в СИП выводима секвенция

$$c_1 \approx d_1, \ldots, c_n \approx d_n, F(c_1, \ldots, c_n) \approx c \vdash F(d_1, \ldots, d_n) \approx c.$$

Теорема о канонической модели: корректность определения $\mathfrak{M}$

Корректность определения $\mathfrak{M}$: Докажем, что определение предиката $P^{\mathfrak{M}}$ не зависит от выбора представителей в фактор-классах $[c_1], \ldots, [c_n]$. Пусть справедливо $P(c_1, \ldots, c_n) \in T$ и $c_1 \sim d_1, \ldots, c_n \sim d_n$. $\Longrightarrow$ Формулы $c_1 \approx d_1, \ldots, c_n \approx d_n \in T$. В силу Леммы 3 (г), секвенция

$$c_1 \approx d_1, \ldots, c_n \approx d_n, P(c_1, \ldots, c_n) \vdash P(d_1, \ldots, d_n)$$

выводима в СИП, и все формулы из её левой части лежат в теории T. $\Longrightarrow$ В силу дедуктивной замкнутости T, заключаем, что $P(d_1, \ldots, d_n) \in T$, что и требовалось.

Докажем, что определение функции $F^{\mathfrak{M}}$ не зависит от выбора представителей в фактор-классах $[c_1], \ldots, [c_n]$ и при этом значение функции на аргументах $[c_1], \ldots, [c_n]$ единственно (оба утверждения докажем одновременно одним рассуждением). Пусть $c_1 \sim d_1, \ldots, c_n \sim d_n$, $F(c_1, \ldots, c_n) \approx c \in T$ и $F(d_1, \ldots, d_n) \approx d \in T$. В силу Леммы 3 (г), в СИП выводима секвенция

$$c_1 \approx d_1, \ldots, c_n \approx d_n, F(c_1, \ldots, c_n) \approx c \vdash F(d_1, \ldots, d_n) \approx c.$$

$\Longrightarrow$ Используя дедуктивную замкнутость T, заключаем, что $F(d_1, \ldots, d_n) \approx c \in T$.

Теорема о канонической модели: корректность определения $\mathfrak{M}$

$\Longrightarrow$ В силу Леммы 3 (б), $c \approx F(d_1, \ldots, d_n) \in T$.

Теорема о канонической модели: корректность определения $\mathfrak{M}$

$\Longrightarrow$ В силу Леммы 3 (б), $c \approx F(d_1, \ldots, d_n) \in T$. $\Longrightarrow$ Снова используя Лемму 3 (в), получаем выводимую в СИП секвенцию

$$c \approx F(d_1, \ldots, d_n), F(d_1, \ldots, d_n) \approx d \vdash c \approx d,$$

Теорема о канонической модели: корректность определения $\mathfrak{M}$

$\Longrightarrow$ В силу Леммы 3 (б), $c \approx F(d_1, \ldots, d_n) \in T$. $\Longrightarrow$ Снова используя Лемму 3 (в), получаем выводимую в СИП секвенцию

$$c \approx F(d_1, \ldots, d_n), F(d_1, \ldots, d_n) \approx d \vdash c \approx d,$$

откуда заключаем, что $c \approx d \in T$, то есть $c \sim d$, что и требовалось.

Теорема о канонической модели: корректность определения $\mathfrak{M}$

$\Longrightarrow$ В силу Леммы 3 (б), $c \approx F(d_1, \ldots, d_n) \in T$. $\Longrightarrow$ Снова используя Лемму 3 (в), получаем выводимую в СИП секвенцию

$$c \approx F(d_1, \ldots, d_n), F(d_1, \ldots, d_n) \approx d \vdash c \approx d,$$

откуда заключаем, что $c \approx d \in T$, то есть $c \sim d$, что и требовалось.

Докажем, что функция $F^{\mathfrak{M}}$ всюду определена на M^n.

Теорема о канонической модели: корректность определения $\mathfrak{M}$

$\Longrightarrow$ В силу Леммы 3 (б), $c \approx F(d_1, \ldots, d_n) \in T$. $\Longrightarrow$ Снова используя Лемму 3 (в), получаем выводимую в СИП секвенцию

$$c \approx F(d_1, \ldots, d_n), F(d_1, \ldots, d_n) \approx d \vdash c \approx d,$$

откуда заключаем, что $c \approx d \in T$, то есть $c \sim d$, что и требовалось.

Докажем, что функция $F^{\mathfrak{M}}$ всюду определена на M^n. Пусть $[c_1], \ldots, [c_n]$ — произвольные элементы M.

Теорема о канонической модели: корректность определения $\mathfrak{M}$

$\Longrightarrow$ В силу Леммы 3 (б), $c \approx F(d_1, \ldots, d_n) \in T$. $\Longrightarrow$ Снова используя Лемму 3 (в), получаем выводимую в СИП секвенцию

$$c \approx F(d_1, \ldots, d_n), F(d_1, \ldots, d_n) \approx d \vdash c \approx d,$$

откуда заключаем, что $c \approx d \in T$, то есть $c \sim d$, что и требовалось.

Докажем, что функция $F^{\mathfrak{M}}$ всюду определена на M^n. Пусть $[c_1], \ldots, [c_n]$ — произвольные элементы M. По Лемме 3 (а) секвенция $\vdash (F(c_1, \ldots, c_n) \approx x)^x_{F(c_1, \ldots, c_n)}$ выводима в СИП.

Теорема о канонической модели: корректность определения $\mathfrak{M}$

$\Longrightarrow$ В силу Леммы 3 (б), $c \approx F(d_1, \ldots, d_n) \in T$. $\Longrightarrow$ Снова используя Лемму 3 (в), получаем выводимую в СИП секвенцию

$$c \approx F(d_1, \ldots, d_n), F(d_1, \ldots, d_n) \approx d \vdash c \approx d,$$

откуда заключаем, что $c \approx d \in T$, то есть $c \sim d$, что и требовалось.

Докажем, что функция $F^{\mathfrak{M}}$ всюду определена на M^n. Пусть $[c_1], \ldots, [c_n]$ — произвольные элементы M. По Лемме 3 (а) секвенция $\vdash (F(c_1, \ldots, c_n) \approx x)^x_{F(c_1,\ldots,c_n)}$ выводима в СИП. $\Longrightarrow$ Получаем дерево вывода в СИП:

$$\frac{\vdash (F(c_1, \ldots, c_n) \approx x)^x_{F(c_1,\ldots,c_n)}}{\vdash \exists x (F(c_1, \ldots, c_n) \approx x)}.$$

Теорема о канонической модели: корректность определения $\mathfrak{M}$

$\Longrightarrow$ В силу Леммы 3 (б), $c \approx F(d_1, \ldots, d_n) \in T$. $\Longrightarrow$ Снова используя Лемму 3 (в), получаем выводимую в СИП секвенцию

$$c \approx F(d_1, \ldots, d_n), F(d_1, \ldots, d_n) \approx d \vdash c \approx d,$$

откуда заключаем, что $c \approx d \in T$, то есть $c \sim d$, что и требовалось.

Докажем, что функция $F^{\mathfrak{M}}$ всюду определена на M^n. Пусть $[c_1], \ldots, [c_n]$ — произвольные элементы M. По Лемме 3 (а) секвенция $\vdash (F(c_1, \ldots, c_n) \approx x)^x_{F(c_1,\ldots,c_n)}$ выводима в СИП. $\Longrightarrow$ Получаем дерево вывода в СИП:

$$\frac{\vdash (F(c_1, \ldots, c_n) \approx x)^x_{F(c_1,\ldots,c_n)}}{\vdash \exists x (F(c_1, \ldots, c_n) \approx x)}.$$

$\Longrightarrow$ Предложение $\exists x (F(c_1, \ldots, c_n) \approx x)$ доказуемо в СИП.

Теорема о канонической модели: корректность определения $\mathfrak{M}$

$\Longrightarrow$ В силу Леммы 3 (б), $c \approx F(d_1, \ldots, d_n) \in T$. $\Longrightarrow$ Снова используя Лемму 3 (в), получаем выводимую в СИП секвенцию

$$c \approx F(d_1, \ldots, d_n), F(d_1, \ldots, d_n) \approx d \vdash c \approx d,$$

откуда заключаем, что $c \approx d \in T$, то есть $c \sim d$, что и требовалось.

Докажем, что функция $F^{\mathfrak{M}}$ всюду определена на M^n. Пусть $[c_1], \ldots, [c_n]$ — произвольные элементы M. По Лемме 3 (а) секвенция $\vdash (F(c_1, \ldots, c_n) \approx x)^x_{F(c_1,\ldots,c_n)}$ выводима в СИП. $\Longrightarrow$ Получаем дерево вывода в СИП:

$$\frac{\vdash (F(c_1, \ldots, c_n) \approx x)^x_{F(c_1,\ldots,c_n)}}{\vdash \exists x (F(c_1, \ldots, c_n) \approx x)}.$$

$\Longrightarrow$ Предложение $\exists x (F(c_1, \ldots, c_n) \approx x)$ доказуемо в СИП. $\Longrightarrow$ Предложение $\exists x (F(c_1, \ldots, c_n) \approx x) \in T$.

Теорема о канонической модели: корректность определения $\mathfrak{M}$

$\Longrightarrow$ В силу Леммы 3 (б), $c \approx F(d_1, \ldots, d_n) \in T$. $\Longrightarrow$ Снова используя Лемму 3 (в), получаем выводимую в СИП секвенцию

$$c \approx F(d_1, \ldots, d_n), F(d_1, \ldots, d_n) \approx d \vdash c \approx d,$$

откуда заключаем, что $c \approx d \in T$, то есть $c \sim d$, что и требовалось.

Докажем, что функция $F^{\mathfrak{M}}$ всюду определена на M^n. Пусть $[c_1], \ldots, [c_n]$ — произвольные элементы M. По Лемме 3 (а) секвенция $\vdash (F(c_1, \ldots, c_n) \approx x)^x_{F(c_1,\ldots,c_n)}$ выводима в СИП. $\Longrightarrow$ Получаем дерево вывода в СИП:

$$\frac{\vdash (F(c_1, \ldots, c_n) \approx x)^x_{F(c_1,\ldots,c_n)}}{\vdash \exists x (F(c_1, \ldots, c_n) \approx x)}.$$

$\Longrightarrow$ Предложение $\exists x (F(c_1, \ldots, c_n) \approx x)$ доказуемо в СИП. $\Longrightarrow$ Предложение $\exists x (F(c_1, \ldots, c_n) \approx x) \in T$. $\Longrightarrow$ В силу определения теории Хенкина, найдётся $c \in C$ такой, что $F(c_1, \ldots, c_n) \approx c \in T$, то есть $F^{\mathfrak{M}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [c]$.

Теорема о канонической модели: $t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T$

Доказательство свойства $\mathfrak{M} \models T$:

Теорема о канонической модели: $t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T$

Доказательство свойства $\mathfrak{M} \models T$: Назовём терм t сигнатуры Σ *замкнутым*, если t не содержит вхождений переменных.

Теорема о канонической модели: $t^{\mathfrak{M}} = [c] \Longleftrightarrow t \approx c \in T$

Доказательство свойства $\mathfrak{M} \models T$: Назовём терм t сигнатуры Σ *замкнутым*, если t не содержит вхождений переменных. Индукцией по длине замкнутого терма t сигнатуры Σ докажем, что для любого $c \in C$ справедливо

$$t^{\mathfrak{M}} = [c] \Longleftrightarrow t \approx c \in T. \quad (*)$$

Теорема о канонической модели: $t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T$

Доказательство свойства $\mathfrak{M} \models T$: Назовём терм t сигнатуры Σ *замкнутым*, если t не содержит вхождений переменных. Индукцией по длине замкнутого терма t сигнатуры Σ докажем, что для любого $c \in C$ справедливо

$$t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T. \quad (*)$$

База индукции*: Пусть $t = d$ — константный символ.

Теорема о канонической модели: $t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T$

Доказательство свойства $\mathfrak{M} \models T$: Назовём терм t сигнатуры Σ *замкнутым*, если t не содержит вхождений переменных. Индукцией по длине замкнутого терма t сигнатуры Σ докажем, что для любого $c \in C$ справедливо

$$t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T. \quad (*)$$

База индукции*: Пусть $t = d$ — константный символ. Тогда получаем

$$t^{\mathfrak{M}} = [d] = [c]$$

Теорема о канонической модели: $t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T$

Доказательство свойства $\mathfrak{M} \models T$: Назовём терм t сигнатуры Σ *замкнутым*, если t не содержит вхождений переменных. Индукцией по длине замкнутого терма t сигнатуры Σ докажем, что для любого $c \in C$ справедливо

$$t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T. \quad (*)$$

База индукции*: Пусть $t = d$ — константный символ. Тогда получаем

$$t^{\mathfrak{M}} = [d] = [c] \iff d \sim c$$

Теорема о канонической модели: $t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T$

Доказательство свойства $\mathfrak{M} \models T$: Назовём терм t сигнатуры Σ *замкнутым*, если t не содержит вхождений переменных. Индукцией по длине замкнутого терма t сигнатуры Σ докажем, что для любого $c \in C$ справедливо

$$t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T. \quad (*)$$

База индукции*: Пусть $t = d$ — константный символ. Тогда получаем

$$t^{\mathfrak{M}} = [d] = [c] \iff d \sim c \iff d \approx c \in T.$$

Теорема о канонической модели: $t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T$

Доказательство свойства $\mathfrak{M} \models T$: Назовём терм t сигнатуры Σ *замкнутым*, если t не содержит вхождений переменных. Индукцией по длине замкнутого терма t сигнатуры Σ докажем, что для любого $c \in C$ справедливо

$$t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T. \quad (*)$$

База индукции*: Пусть $t = d$ — константный символ. Тогда получаем

$$t^{\mathfrak{M}} = [d] = [c] \iff d \sim c \iff d \approx c \in T.$$

Случай $t = x$ — переменная, невозможен, т.к. t — замкнутый.

Теорема о канонической модели: $t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T$

Доказательство свойства $\mathfrak{M} \models T$: Назовём терм t сигнатуры Σ *замкнутым*, если t не содержит вхождений переменных. Индукцией по длине замкнутого терма t сигнатуры Σ докажем, что для любого $c \in C$ справедливо

$$t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T. \quad (*)$$

База индукции*: Пусть $t = d$ — константный символ. Тогда получаем

$$t^{\mathfrak{M}} = [d] = [c] \iff d \sim c \iff d \approx c \in T.$$

Случай $t = x$ — переменная, невозможен, т.к. t — замкнутый.

Шаг индукции*: Пусть $t = F(t_1, \ldots, t_n)$, где F — функциональный символ, а $t_1, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

Теорема о канонической модели: $t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T$

Доказательство свойства $\mathfrak{M} \models T$: Назовём терм t сигнатуры Σ *замкнутым*, если t не содержит вхождений переменных. Индукцией по длине замкнутого терма t сигнатуры Σ докажем, что для любого $c \in C$ справедливо

$$t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T. \quad (*)$$

<u>База индукции*</u>: Пусть $t = d$ — константный символ. Тогда получаем

$$t^{\mathfrak{M}} = [d] = [c] \iff d \sim c \iff d \approx c \in T.$$

Случай $t = x$ — переменная, невозможен, т.к. t — замкнутый.

<u>Шаг индукции*</u>: Пусть $t = F(t_1, \ldots, t_n)$, где F — функциональный символ, а $t_1, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

($\Rightarrow$) Если $t^{\mathfrak{M}} = [c]$, то $F^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{M}}) = [c]$.

Теорема о канонической модели: $t^{\mathfrak{M}} = [c] \Longleftrightarrow t \approx c \in T$

Доказательство свойства $\mathfrak{M} \models T$: Назовём терм t сигнатуры Σ *замкнутым*, если t не содержит вхождений переменных. Индукцией по длине замкнутого терма t сигнатуры Σ докажем, что для любого $c \in C$ справедливо

$$t^{\mathfrak{M}} = [c] \Longleftrightarrow t \approx c \in T. \quad (*)$$

База индукции*: Пусть $t = d$ — константный символ. Тогда получаем

$$t^{\mathfrak{M}} = [d] = [c] \Longleftrightarrow d \sim c \Longleftrightarrow d \approx c \in T.$$

Случай $t = x$ — переменная, невозможен, т.к. t — замкнутый.

Шаг индукции*: Пусть $t = F(t_1, \ldots, t_n)$, где F — функциональный символ, а $t_1, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

($\Rightarrow$) Если $t^{\mathfrak{M}} = [c]$, то $F^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{M}}) = [c]$. $\Longrightarrow$ В силу выбора носителя M, существуют $c_1, \ldots, c_n \in C$ такие, что $t_1^{\mathfrak{M}}{=}[c_1], \ldots, t_n^{\mathfrak{M}}{=}[c_n]$ и $F^{\mathfrak{M}}([c_1], \ldots, [c_n]){=}[c]$.

Теорема о канонической модели: $t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T$

Доказательство свойства $\mathfrak{M} \models T$: Назовём терм t сигнатуры Σ *замкнутым*, если t не содержит вхождений переменных. Индукцией по длине замкнутого терма t сигнатуры Σ докажем, что для любого $c \in C$ справедливо

$$t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T. \quad (*)$$

<u>База индукции*</u>: Пусть $t = d$ — константный символ. Тогда получаем

$$t^{\mathfrak{M}} = [d] = [c] \iff d \sim c \iff d \approx c \in T.$$

Случай $t = x$ — переменная, невозможен, т.к. t — замкнутый.

<u>Шаг индукции*</u>: Пусть $t = F(t_1, \ldots, t_n)$, где F — функциональный символ, а $t_1, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

($\Rightarrow$) Если $t^{\mathfrak{M}} = [c]$, то $F^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{M}}) = [c]$. $\Longrightarrow$ В силу выбора носителя M, существуют $c_1, \ldots, c_n \in C$ такие, что $t_1^{\mathfrak{M}}{=}[c_1], \ldots, t_n^{\mathfrak{M}}{=}[c_n]$ и $F^{\mathfrak{M}}([c_1], \ldots, [c_n]){=}[c]$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения и определения функции $F^{\mathfrak{M}}$, получаем $t_1 \approx c_1 \in T, \ldots, t_n \approx c_n \in T, F(c_1, \ldots, c_n) \approx c \in T$.

Теорема о канонической модели: $t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T$

Доказательство свойства $\mathfrak{M} \models T$: Назовём терм t сигнатуры Σ *замкнутым*, если t не содержит вхождений переменных. Индукцией по длине замкнутого терма t сигнатуры Σ докажем, что для любого $c \in C$ справедливо

$$t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T. \quad (*)$$

<u>База индукции*</u>: Пусть $t = d$ — константный символ. Тогда получаем

$$t^{\mathfrak{M}} = [d] = [c] \iff d \sim c \iff d \approx c \in T.$$

Случай $t = x$ — переменная, невозможен, т.к. t — замкнутый.

<u>Шаг индукции*</u>: Пусть $t = F(t_1, \ldots, t_n)$, где F — функциональный символ, а $t_1, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

($\Rightarrow$) Если $t^{\mathfrak{M}} = [c]$, то $F^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{M}}) = [c]$. $\Longrightarrow$ В силу выбора носителя M, существуют $c_1, \ldots, c_n \in C$ такие, что $t_1^{\mathfrak{M}}{=}[c_1], \ldots, t_n^{\mathfrak{M}}{=}[c_n]$ и $F^{\mathfrak{M}}([c_1], \ldots, [c_n]){=}[c]$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения и определения функции $F^{\mathfrak{M}}$, получаем $t_1 \approx c_1 \in T, \ldots, t_n \approx c_n \in T, F(c_1, \ldots, c_n) \approx c \in T$. $\Longrightarrow$ Используя Лемму 3 и дедуктивную замкнутость T, заключаем, что $F(t_1, \ldots, t_n) \approx c \in T$, т.е. $t \approx c \in T$.

Теорема о канонической модели: $t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T$

($\Leftarrow$) Пусть $F(t_1, \ldots, t_n) \approx c \in T$.

Теорема о канонической модели: $t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T$

($\Leftarrow$) Пусть $F(t_1, \ldots, t_n) \approx c \in T$. Для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ можно построить дерево вывода

$$\frac{\vdash (t_i \approx x)^x_{t_i}}{\vdash \exists x (t_i \approx x)}.$$

Теорема о канонической модели: $t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T$

($\Leftarrow$) Пусть $F(t_1, \ldots, t_n) \approx c \in T$. Для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ можно построить дерево вывода

$$\frac{\vdash (t_i \approx x)^x_{t_i}}{\vdash \exists x (t_i \approx x)}.$$

$\Longrightarrow$ Предложение $\exists x (t_i \approx x)$ выводимо в СИП.

Теорема о канонической модели: $t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T$

($\Leftarrow$) Пусть $F(t_1, \ldots, t_n) \approx c \in T$. Для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ можно построить дерево вывода

$$\frac{\vdash (t_i \approx x)^x_{t_i}}{\vdash \exists x (t_i \approx x)}.$$

$\Longrightarrow$ Предложение $\exists x (t_i \approx x)$ выводимо в СИП. $\Longrightarrow \exists x (t_i \approx x) \in T$.

Теорема о канонической модели: $t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T$

($\Leftarrow$) Пусть $F(t_1, \ldots, t_n) \approx c \in T$. Для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ можно построить дерево вывода

$$\frac{\vdash (t_i \approx x)^x_{t_i}}{\vdash \exists x (t_i \approx x)}.$$

$\Longrightarrow$ Предложение $\exists x (t_i \approx x)$ выводимо в СИП. $\Longrightarrow \exists x (t_i \approx x) \in T$. $\Longrightarrow$ В силу определения теории Хенкина, найдётся $c_i \in C$ такой, что $t_i \approx c_i \in T$.

Теорема о канонической модели: $t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T$

($\Leftarrow$) Пусть $F(t_1, \ldots, t_n) \approx c \in T$. Для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ можно построить дерево вывода

$$\frac{\vdash (t_i \approx x)^x_{t_i}}{\vdash \exists x (t_i \approx x)}.$$

$\Longrightarrow$ Предложение $\exists x (t_i \approx x)$ выводимо в СИП. $\Longrightarrow \exists x (t_i \approx x) \in T$. $\Longrightarrow$ В силу определения теории Хенкина, найдётся $c_i \in C$ такой, что $t_i \approx c_i \in T$. $\Longrightarrow$ Используя Лемму 3, из того, что $F(t_1, \ldots, t_n) \approx c \in T, t_1 \approx c_1 \in T, \ldots, t_n \approx c_n \in T$, получаем $F(c_1, \ldots, c_n) \approx c \in T$.

Теорема о канонической модели: $t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T$

($\Leftarrow$) Пусть $F(t_1, \ldots, t_n) \approx c \in T$. Для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ можно построить дерево вывода

$$\frac{\vdash (t_i \approx x)^x_{t_i}}{\vdash \exists x (t_i \approx x)}.$$

$\Longrightarrow$ Предложение $\exists x (t_i \approx x)$ выводимо в СИП. $\Longrightarrow \exists x (t_i \approx x) \in T$. $\Longrightarrow$ В силу определения теории Хенкина, найдётся $c_i \in C$ такой, что $t_i \approx c_i \in T$. $\Longrightarrow$ Используя Лемму 3, из того, что $F(t_1, \ldots, t_n) \approx c \in T, t_1 \approx c_1 \in T, \ldots, t_n \approx c_n \in T$, получаем $F(c_1, \ldots, c_n) \approx c \in T$. $\Longrightarrow F^{\mathfrak{M}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [c]$.

Теорема о канонической модели: $t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T$

($\Leftarrow$) Пусть $F(t_1, \ldots, t_n) \approx c \in T$. Для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ можно построить дерево вывода

$$\frac{\vdash (t_i \approx x)^x_{t_i}}{\vdash \exists x (t_i \approx x)}.$$

$\Longrightarrow$ Предложение $\exists x (t_i \approx x)$ выводимо в СИП. $\Longrightarrow \exists x (t_i \approx x) \in T$. $\Longrightarrow$ В силу определения теории Хенкина, найдётся $c_i \in C$ такой, что $t_i \approx c_i \in T$. $\Longrightarrow$ Используя Лемму 3, из того, что $F(t_1, \ldots, t_n) \approx c \in T, t_1 \approx c_1 \in T, \ldots, t_n \approx c_n \in T$, получаем $F(c_1, \ldots, c_n) \approx c \in T$. $\Longrightarrow F^{\mathfrak{M}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [c]$. Кроме этого, в силу индукционного предположения, $t_i^{\mathfrak{M}} = [c_i]$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$.

Теорема о канонической модели: $t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T$

($\Leftarrow$) Пусть $F(t_1, \ldots, t_n) \approx c \in T$. Для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ можно построить дерево вывода

$$\frac{\vdash (t_i \approx x)^x_{t_i}}{\vdash \exists x (t_i \approx x)}.$$

$\Longrightarrow$ Предложение $\exists x (t_i \approx x)$ выводимо в СИП. $\Longrightarrow \exists x (t_i \approx x) \in T$. $\Longrightarrow$ В силу определения теории Хенкина, найдётся $c_i \in C$ такой, что $t_i \approx c_i \in T$. $\Longrightarrow$ Используя Лемму 3, из того, что $F(t_1, \ldots, t_n) \approx c \in T, t_1 \approx c_1 \in T, \ldots, t_n \approx c_n \in T$, получаем $F(c_1, \ldots, c_n) \approx c \in T$. $\Longrightarrow F^{\mathfrak{M}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [c]$. Кроме этого, в силу индукционного предположения, $t_i^{\mathfrak{M}} = [c_i]$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$. $\Longrightarrow F^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{M}}) = [c]$, то есть $t^{\mathfrak{M}} = [c]$.

Теорема о канонической модели: $t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T$

($\Leftarrow$) Пусть $F(t_1, \ldots, t_n) \approx c \in T$. Для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ можно построить дерево вывода

$$\frac{\vdash (t_i \approx x)^x_{t_i}}{\vdash \exists x (t_i \approx x)}.$$

$\Longrightarrow$ Предложение $\exists x (t_i \approx x)$ выводимо в СИП. $\Longrightarrow \exists x (t_i \approx x) \in T$. $\Longrightarrow$ В силу определения теории Хенкина, найдётся $c_i \in C$ такой, что $t_i \approx c_i \in T$. $\Longrightarrow$ Используя Лемму 3, из того, что $F(t_1, \ldots, t_n) \approx c \in T, t_1 \approx c_1 \in T, \ldots, t_n \approx c_n \in T$, получаем $F(c_1, \ldots, c_n) \approx c \in T$. $\Longrightarrow F^{\mathfrak{M}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [c]$. Кроме этого, в силу индукционного предположения, $t_i^{\mathfrak{M}} = [c_i]$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$. $\Longrightarrow F^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{M}}) = [c]$, то есть $t^{\mathfrak{M}} = [c]$.

Теперь индукцией по длине предложения Φ сигнатуры Σ докажем свойство:

$$\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T. \quad (**)$$

Теорема о канонической модели: $t^{\mathfrak{M}} = [c] \iff t \approx c \in T$

($\Leftarrow$) Пусть $F(t_1, \ldots, t_n) \approx c \in T$. Для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ можно построить дерево вывода

$$\frac{\vdash (t_i \approx x)^x_{t_i}}{\vdash \exists x (t_i \approx x)}.$$

$\Longrightarrow$ Предложение $\exists x (t_i \approx x)$ выводимо в СИП. $\Longrightarrow \exists x (t_i \approx x) \in T$. $\Longrightarrow$ В силу определения теории Хенкина, найдётся $c_i \in C$ такой, что $t_i \approx c_i \in T$. $\Longrightarrow$ Используя Лемму 3, из того, что $F(t_1, \ldots, t_n) \approx c \in T, t_1 \approx c_1 \in T, \ldots, t_n \approx c_n \in T$, получаем $F(c_1, \ldots, c_n) \approx c \in T$. $\Longrightarrow F^{\mathfrak{M}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [c]$. Кроме этого, в силу индукционного предположения, $t_i^{\mathfrak{M}} = [c_i]$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$. $\Longrightarrow F^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{M}}) = [c]$, то есть $t^{\mathfrak{M}} = [c]$.

Теперь индукцией по длине предложения Φ сигнатуры Σ докажем свойство:

$$\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T. \quad (**)$$

Из свойства $(**)$ очевидно следует, что $\mathfrak{M} \models T$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>База индукции**</u>: Здесь возможно два случая:

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>База индукции**</u>: Здесь возможно два случая: $\Phi = t_1 \approx t_2$, где t_1, t_2 — термы,

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>База индукции**</u>: Здесь возможно два случая: $\Phi = t_1 \approx t_2$, где t_1, t_2 — термы, или $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$, где P — предикатный символ из сигнатуры Σ, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>База индукции**</u>: Здесь возможно два случая: $\Phi = t_1 \approx t_2$, где t_1, t_2 — термы, или $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$, где P — предикатный символ из сигнатуры Σ, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы. Причём поскольку Φ — предложение, то в любом случае $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>База индукции**</u>: Здесь возможно два случая: $\Phi = t_1 \approx t_2$, где t_1, t_2 — термы, или $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$, где P — предикатный символ из сигнатуры Σ, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы. Причём поскольку Φ — предложение, то в любом случае $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

Пусть $\Phi = t_1 \approx t_2$, где t_1, t_2 — замкнутые термы.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>База индукции**</u>: Здесь возможно два случая: $\Phi = t_1 \approx t_2$, где t_1, t_2 — термы, или $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$, где P — предикатный символ из сигнатуры Σ, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы. Причём поскольку Φ — предложение, то в любом случае $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

Пусть $\Phi = t_1 \approx t_2$, где t_1, t_2 — замкнутые термы.

($\Rightarrow$) Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $t_1^{\mathfrak{M}} = t_2^{\mathfrak{M}}$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>База индукции**</u>: Здесь возможно два случая: $\Phi = t_1 \approx t_2$, где t_1, t_2 — термы, или $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$, где P — предикатный символ из сигнатуры Σ, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы. Причём поскольку Φ — предложение, то в любом случае $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

Пусть $\Phi = t_1 \approx t_2$, где t_1, t_2 — замкнутые термы.

($\Rightarrow$) Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $t_1^{\mathfrak{M}} = t_2^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ В силу определения носителя M, существует $c \in C$ такой, что $t_1^{\mathfrak{M}}{=}[c]$ и $t_2^{\mathfrak{M}}{=}[c]$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>База индукции**</u>: Здесь возможно два случая: $\Phi = t_1 \approx t_2$, где t_1, t_2 — термы, или $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$, где P — предикатный символ из сигнатуры Σ, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы. Причём поскольку Φ — предложение, то в любом случае $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

Пусть $\Phi = t_1 \approx t_2$, где t_1, t_2 — замкнутые термы.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $t_1^{\mathfrak{M}} = t_2^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ В силу определения носителя M, существует $c \in C$ такой, что $t_1^{\mathfrak{M}} = [c]$ и $t_2^{\mathfrak{M}} = [c]$. $\Longrightarrow$ В силу $(*)$ получаем $t_1 \approx c \in T$ и $t_2 \approx c \in T$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>База индукции**</u>: Здесь возможно два случая: $\Phi = t_1 \approx t_2$, где t_1, t_2 — термы, или $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$, где P — предикатный символ из сигнатуры Σ, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы. Причём поскольку Φ — предложение, то в любом случае $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

Пусть $\Phi = t_1 \approx t_2$, где t_1, t_2 — замкнутые термы.

($\Rightarrow$) Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $t_1^{\mathfrak{M}} = t_2^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ В силу определения носителя M, существует $c \in C$ такой, что $t_1^{\mathfrak{M}}{=}[c]$ и $t_2^{\mathfrak{M}}{=}[c]$. $\Longrightarrow$ В силу $(*)$ получаем $t_1{\approx}c \in T$ и $t_2{\approx}c \in T$. $\Longrightarrow$ Используя Лемму 3 (б,в) и дедуктивную замкнутость T, получаем $t_1 \approx t_2 \in T$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>База индукции**</u>: Здесь возможно два случая: $\Phi = t_1 \approx t_2$, где t_1, t_2 — термы, или $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$, где P — предикатный символ из сигнатуры Σ, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы. Причём поскольку Φ — предложение, то в любом случае $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

Пусть $\Phi = t_1 \approx t_2$, где t_1, t_2 — замкнутые термы.

($\Rightarrow$) Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $t_1^{\mathfrak{M}} = t_2^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ В силу определения носителя M, существует $c \in C$ такой, что $t_1^{\mathfrak{M}} = [c]$ и $t_2^{\mathfrak{M}} = [c]$. $\Longrightarrow$ В силу $(*)$ получаем $t_1 \approx c \in T$ и $t_2 \approx c \in T$. $\Longrightarrow$ Используя Лемму 3 (б,в) и дедуктивную замкнутость T, получаем $t_1 \approx t_2 \in T$.

($\Leftarrow$) Пусть $t_1 \approx t_2 \in T$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>База индукции**</u>: Здесь возможно два случая: $\Phi = t_1 \approx t_2$, где t_1, t_2 — термы, или $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$, где P — предикатный символ из сигнатуры Σ, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы. Причём поскольку Φ — предложение, то в любом случае $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

Пусть $\Phi = t_1 \approx t_2$, где t_1, t_2 — замкнутые термы.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $t_1^{\mathfrak{M}} = t_2^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ В силу определения носителя M, существует $c \in C$ такой, что $t_1^{\mathfrak{M}}{=}[c]$ и $t_2^{\mathfrak{M}}{=}[c]$. $\Longrightarrow$ В силу $(*)$ получаем $t_1{\approx}c \in T$ и $t_2{\approx}c \in T$. $\Longrightarrow$ Используя Лемму 3 (б,в) и дедуктивную замкнутость T, получаем $t_1 \approx t_2 \in T$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $t_1 \approx t_2 \in T$. Так же как и выше можно построить дерево вывода для формулы $\exists x(t_1 \approx x)$ и найти $c \in C$ такой, что $t_1 \approx c \in T$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>База индукции**</u>: Здесь возможно два случая: $\Phi = t_1 \approx t_2$, где t_1, t_2 — термы, или $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$, где P — предикатный символ из сигнатуры Σ, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы. Причём поскольку Φ — предложение, то в любом случае $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

Пусть $\Phi = t_1 \approx t_2$, где t_1, t_2 — замкнутые термы.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $t_1^{\mathfrak{M}} = t_2^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ В силу определения носителя M, существует $c \in C$ такой, что $t_1^{\mathfrak{M}}{=}[c]$ и $t_2^{\mathfrak{M}}{=}[c]$. $\Longrightarrow$ В силу $(*)$ получаем $t_1{\approx}c \in T$ и $t_2{\approx}c \in T$. $\Longrightarrow$ Используя Лемму 3 (б,в) и дедуктивную замкнутость T, получаем $t_1 \approx t_2 \in T$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $t_1 \approx t_2 \in T$. Так же как и выше можно построить дерево вывода для формулы $\exists x(t_1 \approx x)$ и найти $c \in C$ такой, что $t_1 \approx c \in T$. $\Longrightarrow$ В силу Леммы 3 (б,в) и дедуктивной замкнутости T, заключаем, что $t_2 \approx c \in T$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>База индукции**</u>: Здесь возможно два случая: $\Phi = t_1 \approx t_2$, где t_1, t_2 — термы, или $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$, где P — предикатный символ из сигнатуры Σ, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы. Причём поскольку Φ — предложение, то в любом случае $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

Пусть $\Phi = t_1 \approx t_2$, где t_1, t_2 — замкнутые термы.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $t_1^{\mathfrak{M}} = t_2^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ В силу определения носителя M, существует $c \in C$ такой, что $t_1^{\mathfrak{M}}{=}[c]$ и $t_2^{\mathfrak{M}}{=}[c]$. $\Longrightarrow$ В силу $(*)$ получаем $t_1{\approx}c \in T$ и $t_2{\approx}c \in T$. $\Longrightarrow$ Используя Лемму 3 (б,в) и дедуктивную замкнутость T, получаем $t_1 \approx t_2 \in T$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $t_1 \approx t_2 \in T$. Так же как и выше можно построить дерево вывода для формулы $\exists x(t_1 \approx x)$ и найти $c \in C$ такой, что $t_1 \approx c \in T$. $\Longrightarrow$ В силу Леммы 3 (б,в) и дедуктивной замкнутости T, заключаем, что $t_2 \approx c \in T$. $\Longrightarrow$ По свойству $(*)$ следует, что $t_1^{\mathfrak{M}} = [c]$ и $t_2^{\mathfrak{M}} = [c]$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>База индукции**</u>: Здесь возможно два случая: $\Phi = t_1 \approx t_2$, где t_1, t_2 — термы, или $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$, где P — предикатный символ из сигнатуры Σ, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы. Причём поскольку Φ — предложение, то в любом случае $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

Пусть $\Phi = t_1 \approx t_2$, где t_1, t_2 — замкнутые термы.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $t_1^{\mathfrak{M}} = t_2^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ В силу определения носителя M, существует $c \in C$ такой, что $t_1^{\mathfrak{M}}{=}[c]$ и $t_2^{\mathfrak{M}}{=}[c]$. $\Longrightarrow$ В силу $(*)$ получаем $t_1{\approx}c \in T$ и $t_2{\approx}c \in T$. $\Longrightarrow$ Используя Лемму 3 (б,в) и дедуктивную замкнутость T, получаем $t_1 \approx t_2 \in T$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $t_1 \approx t_2 \in T$. Так же как и выше можно построить дерево вывода для формулы $\exists x(t_1 \approx x)$ и найти $c \in C$ такой, что $t_1 \approx c \in T$. $\Longrightarrow$ В силу Леммы 3 (б,в) и дедуктивной замкнутости T, заключаем, что $t_2 \approx c \in T$. $\Longrightarrow$ По свойству $(*)$ следует, что $t_1^{\mathfrak{M}} = [c]$ и $t_2^{\mathfrak{M}} = [c]$. $\Longrightarrow t_1^{\mathfrak{M}} = t_2^{\mathfrak{M}}$, то есть $\mathfrak{M} \models \Phi$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$, где P — предикатный символ из Σ, а $t_1, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$, где P — предикатный символ из Σ, а $t_1, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

($\Rightarrow$) Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\langle t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{M}} \rangle \in P^{\mathfrak{M}}$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$, где P — предикатный символ из Σ, а $t_1, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

($\Rightarrow$) Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\langle t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{M}} \rangle \in P^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ В силу определения носителя M, существуют $c_1, \ldots, c_n \in C$ такие, что $t_1^{\mathfrak{M}} = [c_1], \ldots, t_n^{\mathfrak{M}} = [c_n]$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$, где P — предикатный символ из Σ, а $t_1, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

($\Rightarrow$) Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\langle t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{M}} \rangle \in P^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ В силу определения носителя M, существуют $c_1, \ldots, c_n \in C$ такие, что $t_1^{\mathfrak{M}} = [c_1], \ldots, t_n^{\mathfrak{M}} = [c_n]$. $\Longrightarrow$ $\langle [c_1], \ldots, [c_n] \rangle \in P^{\mathfrak{M}}$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$, где P — предикатный символ из Σ, а $t_1, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

($\Rightarrow$) Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\langle t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{M}} \rangle \in P^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ В силу определения носителя M, существуют $c_1, \ldots, c_n \in C$ такие, что $t_1^{\mathfrak{M}} = [c_1], \ldots, t_n^{\mathfrak{M}} = [c_n]$. $\Longrightarrow$ $\langle [c_1], \ldots, [c_n] \rangle \in P^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ В силу $(*)$ и в силу определения предиката $P^{\mathfrak{M}}$, получаем $t_1 \approx c_1 \in T, \ldots,$ $t_n \approx c_n \in T$ и $P(c_1, \ldots, c_n) \in T$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$, где P — предикатный символ из Σ, а $t_1, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

($\Rightarrow$) Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\langle t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{M}} \rangle \in P^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ В силу определения носителя M, существуют $c_1, \ldots, c_n \in C$ такие, что $t_1^{\mathfrak{M}} = [c_1], \ldots, t_n^{\mathfrak{M}} = [c_n]$. $\Longrightarrow$ $\langle [c_1], \ldots, [c_n] \rangle \in P^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ В силу $(*)$ и в силу определения предиката $P^{\mathfrak{M}}$, получаем $t_1 \approx c_1 \in T, \ldots,$ $t_n \approx c_n \in T$ и $P(c_1, \ldots, c_n) \in T$. $\Longrightarrow$ По Лемме 3 (б,г) и дедуктивной замкнутости T заключаем, что $P(t_1, \ldots, t_n) \in T$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$, где P — предикатный символ из Σ, а $t_1, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

($\Rightarrow$) Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\langle t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{M}} \rangle \in P^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ В силу определения носителя M, существуют $c_1, \ldots, c_n \in C$ такие, что $t_1^{\mathfrak{M}} = [c_1], \ldots, t_n^{\mathfrak{M}} = [c_n]$. $\Longrightarrow$ $\langle [c_1], \ldots, [c_n] \rangle \in P^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ В силу $(*)$ и в силу определения предиката $P^{\mathfrak{M}}$, получаем $t_1 \approx c_1 \in T, \ldots,$ $t_n \approx c_n \in T$ и $P(c_1, \ldots, c_n) \in T$. $\Longrightarrow$ По Лемме 3 (б,г) и дедуктивной замкнутости T заключаем, что $P(t_1, \ldots, t_n) \in T$.

($\Leftarrow$) Пусть $P(t_1, \ldots, t_n) \in T$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$, где P — предикатный символ из Σ, а $t_1, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

($\Rightarrow$) Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\langle t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{M}} \rangle \in P^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ В силу определения носителя M, существуют $c_1, \ldots, c_n \in C$ такие, что $t_1^{\mathfrak{M}} = [c_1], \ldots, t_n^{\mathfrak{M}} = [c_n]$. $\Longrightarrow$ $\langle [c_1], \ldots, [c_n] \rangle \in P^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ В силу $(*)$ и в силу определения предиката $P^{\mathfrak{M}}$, получаем $t_1 \approx c_1 \in T, \ldots,$ $t_n \approx c_n \in T$ и $P(c_1, \ldots, c_n) \in T$. $\Longrightarrow$ По Лемме 3 (б,г) и дедуктивной замкнутости T заключаем, что $P(t_1, \ldots, t_n) \in T$.

($\Leftarrow$) Пусть $P(t_1, \ldots, t_n) \in T$. Так же как и выше для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ можно построить дерево вывода для формулы $\exists x (t_i \approx x)$ и найти $c_i \in C$ такой, что $t_i \approx c_i \in T$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$, где P — предикатный символ из Σ, а $t_1, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

($\Rightarrow$) Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\langle t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{M}} \rangle \in P^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ В силу определения носителя M, существуют $c_1, \ldots, c_n \in C$ такие, что $t_1^{\mathfrak{M}} = [c_1], \ldots, t_n^{\mathfrak{M}} = [c_n]$. $\Longrightarrow$ $\langle [c_1], \ldots, [c_n] \rangle \in P^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ В силу $(*)$ и в силу определения предиката $P^{\mathfrak{M}}$, получаем $t_1 \approx c_1 \in T, \ldots,$ $t_n \approx c_n \in T$ и $P(c_1, \ldots, c_n) \in T$. $\Longrightarrow$ По Лемме 3 (б,г) и дедуктивной замкнутости T заключаем, что $P(t_1, \ldots, t_n) \in T$.

($\Leftarrow$) Пусть $P(t_1, \ldots, t_n) \in T$. Так же как и выше для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ можно построить дерево вывода для формулы $\exists x (t_i \approx x)$ и найти $c_i \in C$ такой, что $t_i \approx c_i \in T$. $\Longrightarrow$ В силу Леммы 3 (г) и дедуктивной замкнутости T, получаем $P(c_1, \ldots, c_n) \in T$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$, где P — предикатный символ из Σ, а $t_1, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

($\Rightarrow$) Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\langle t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{M}} \rangle \in P^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ В силу определения носителя M, существуют $c_1, \ldots, c_n \in C$ такие, что $t_1^{\mathfrak{M}} = [c_1], \ldots, t_n^{\mathfrak{M}} = [c_n]$. $\Longrightarrow$ $\langle [c_1], \ldots, [c_n] \rangle \in P^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ В силу $(*)$ и в силу определения предиката $P^{\mathfrak{M}}$, получаем $t_1 \approx c_1 \in T, \ldots,$ $t_n \approx c_n \in T$ и $P(c_1, \ldots, c_n) \in T$. $\Longrightarrow$ По Лемме 3 (б,г) и дедуктивной замкнутости T заключаем, что $P(t_1, \ldots, t_n) \in T$.

($\Leftarrow$) Пусть $P(t_1, \ldots, t_n) \in T$. Так же как и выше для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ можно построить дерево вывода для формулы $\exists x (t_i \approx x)$ и найти $c_i \in C$ такой, что $t_i \approx c_i \in T$. $\Longrightarrow$ В силу Леммы 3 (г) и дедуктивной замкнутости T, получаем $P(c_1, \ldots, c_n) \in T$. $\Longrightarrow$ По определению предиката $P^{\mathfrak{M}}$, получаем $\langle [c_1], \ldots, [c_n] \rangle \in P^{\mathfrak{M}}$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$, где P — предикатный символ из Σ, а $t_1, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

($\Rightarrow$) Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\langle t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{M}} \rangle \in P^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ В силу определения носителя M, существуют $c_1, \ldots, c_n \in C$ такие, что $t_1^{\mathfrak{M}} = [c_1], \ldots, t_n^{\mathfrak{M}} = [c_n]$. $\Longrightarrow$ $\langle [c_1], \ldots, [c_n] \rangle \in P^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ В силу $(*)$ и в силу определения предиката $P^{\mathfrak{M}}$, получаем $t_1 \approx c_1 \in T, \ldots,$ $t_n \approx c_n \in T$ и $P(c_1, \ldots, c_n) \in T$. $\Longrightarrow$ По Лемме 3 (б,г) и дедуктивной замкнутости T заключаем, что $P(t_1, \ldots, t_n) \in T$.

($\Leftarrow$) Пусть $P(t_1, \ldots, t_n) \in T$. Так же как и выше для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ можно построить дерево вывода для формулы $\exists x (t_i \approx x)$ и найти $c_i \in C$ такой, что $t_i \approx c_i \in T$. $\Longrightarrow$ В силу Леммы 3 (г) и дедуктивной замкнутости T, получаем $P(c_1, \ldots, c_n) \in T$. $\Longrightarrow$ По определению предиката $P^{\mathfrak{M}}$, получаем $\langle [c_1], \ldots, [c_n] \rangle \in P^{\mathfrak{M}}$. С другой стороны, в силу $(*)$, имеем $t_1^{\mathfrak{M}} = [c_1], \ldots, t_n^{\mathfrak{M}} = [c_n]$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$, где P — предикатный символ из Σ, а $t_1, \ldots, t_n$ — замкнутые термы.

($\Rightarrow$) Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\langle t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{M}} \rangle \in P^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ В силу определения носителя M, существуют $c_1, \ldots, c_n \in C$ такие, что $t_1^{\mathfrak{M}} = [c_1], \ldots, t_n^{\mathfrak{M}} = [c_n]$. $\Longrightarrow$ $\langle [c_1], \ldots, [c_n] \rangle \in P^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ В силу $(*)$ и в силу определения предиката $P^{\mathfrak{M}}$, получаем $t_1 \approx c_1 \in T, \ldots,$ $t_n \approx c_n \in T$ и $P(c_1, \ldots, c_n) \in T$. $\Longrightarrow$ По Лемме 3 (б,г) и дедуктивной замкнутости T заключаем, что $P(t_1, \ldots, t_n) \in T$.

($\Leftarrow$) Пусть $P(t_1, \ldots, t_n) \in T$. Так же как и выше для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ можно построить дерево вывода для формулы $\exists x (t_i \approx x)$ и найти $c_i \in C$ такой, что $t_i \approx c_i \in T$. $\Longrightarrow$ В силу Леммы 3 (г) и дедуктивной замкнутости T, получаем $P(c_1, \ldots, c_n) \in T$. $\Longrightarrow$ По определению предиката $P^{\mathfrak{M}}$, получаем $\langle [c_1], \ldots, [c_n] \rangle \in P^{\mathfrak{M}}$. С другой стороны, в силу $(*)$, имеем $t_1^{\mathfrak{M}} = [c_1], \ldots, t_n^{\mathfrak{M}} = [c_n]$. $\Longrightarrow$ Тогда $\langle t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{M}} \rangle \in P^{\mathfrak{M}}$, то есть $\mathfrak{M} \models \Phi$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>Шаг индукции**</u>: Здесь мы рассмотрим четыре случая:

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>Шаг индукции**</u>: Здесь мы рассмотрим четыре случая: $\Phi = \Phi_1 \& \Phi_2$,

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>Шаг индукции**</u>: Здесь мы рассмотрим четыре случая: $\Phi = \Phi_1 \& \Phi_2$, или $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$,

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>Шаг индукции**</u>: Здесь мы рассмотрим четыре случая: $\Phi = \Phi_1 \& \Phi_2$, или $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, или $\Phi = \neg\Phi_1$,

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>Шаг индукции**</u>: Здесь мы рассмотрим четыре случая: $\Phi = \Phi_1 \& \Phi_2$, или $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, или $\Phi = \neg\Phi_1$, или $\Phi = \exists x \Phi_1$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>Шаг индукции**</u>: Здесь мы рассмотрим четыре случая: $\Phi = \Phi_1 \& \Phi_2$, или $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, или $\Phi = \neg\Phi_1$, или $\Phi = \exists x \Phi_1$. Случаи $\Phi = \Phi_1 \to \Phi_2$ и $\Phi = \forall x \Phi_1$ разбираются аналогично.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>Шаг индукции**</u>: Здесь мы рассмотрим четыре случая: $\Phi = \Phi_1 \& \Phi_2$, или $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, или $\Phi = \neg\Phi_1$, или $\Phi = \exists x \Phi_1$. Случаи $\Phi = \Phi_1 \to \Phi_2$ и $\Phi = \forall x \Phi_1$ разбираются аналогично.

Пусть $\Phi = \Phi_1 \& \Phi_2$, и для предложений Φ_1 и Φ_2 свойство $(**)$ уже доказано.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>Шаг индукции**</u>: Здесь мы рассмотрим четыре случая: $\Phi = \Phi_1 \& \Phi_2$, или $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, или $\Phi = \neg\Phi_1$, или $\Phi = \exists x \Phi_1$. Случаи $\Phi = \Phi_1 \to \Phi_2$ и $\Phi = \forall x \Phi_1$ разбираются аналогично.

Пусть $\Phi = \Phi_1 \& \Phi_2$, и для предложений Φ_1 и Φ_2 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1$ и $\mathfrak{M} \models \Phi_2$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>Шаг индукции**</u>: Здесь мы рассмотрим четыре случая: $\Phi = \Phi_1 \& \Phi_2$, или $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, или $\Phi = \neg\Phi_1$, или $\Phi = \exists x \Phi_1$. Случаи $\Phi = \Phi_1 \to \Phi_2$ и $\Phi = \forall x \Phi_1$ разбираются аналогично.

Пусть $\Phi = \Phi_1 \& \Phi_2$, и для предложений Φ_1 и Φ_2 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1$ и $\mathfrak{M} \models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \in T$ и $\Phi_2 \in T$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>Шаг индукции**</u>: Здесь мы рассмотрим четыре случая: $\Phi = \Phi_1 \& \Phi_2$, или $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, или $\Phi = \neg\Phi_1$, или $\Phi = \exists x \Phi_1$. Случаи $\Phi = \Phi_1 \to \Phi_2$ и $\Phi = \forall x \Phi_1$ разбираются аналогично.

Пусть $\Phi = \Phi_1 \& \Phi_2$, и для предложений Φ_1 и Φ_2 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1$ и $\mathfrak{M} \models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \in T$ и $\Phi_2 \in T$. $\Longrightarrow$ Поскольку секвенция $\Phi_1, \Phi_2 \vdash \Phi_1 \& \Phi_2$ выводима в СИП и T — теория, получаем $\Phi_1 \& \Phi_2 \in T$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>Шаг индукции**</u>: Здесь мы рассмотрим четыре случая: $\Phi = \Phi_1 \& \Phi_2$, или $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, или $\Phi = \neg\Phi_1$, или $\Phi = \exists x \Phi_1$. Случаи $\Phi = \Phi_1 \to \Phi_2$ и $\Phi = \forall x \Phi_1$ разбираются аналогично.

Пусть $\Phi = \Phi_1 \& \Phi_2$, и для предложений Φ_1 и Φ_2 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1$ и $\mathfrak{M} \models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \in T$ и $\Phi_2 \in T$. $\Longrightarrow$ Поскольку секвенция $\Phi_1, \Phi_2 \vdash \Phi_1 \& \Phi_2$ выводима в СИП и T — теория, получаем $\Phi_1 \& \Phi_2 \in T$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\Phi_1 \& \Phi_2 \in T$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>Шаг индукции**</u>: Здесь мы рассмотрим четыре случая: $\Phi = \Phi_1 \& \Phi_2$, или $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, или $\Phi = \neg\Phi_1$, или $\Phi = \exists x \Phi_1$. Случаи $\Phi = \Phi_1 \to \Phi_2$ и $\Phi = \forall x \Phi_1$ разбираются аналогично.

Пусть $\Phi = \Phi_1 \& \Phi_2$, и для предложений Φ_1 и Φ_2 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1$ и $\mathfrak{M} \models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \in T$ и $\Phi_2 \in T$. $\Longrightarrow$ Поскольку секвенция $\Phi_1, \Phi_2 \vdash \Phi_1 \& \Phi_2$ выводима в СИП и T — теория, получаем $\Phi_1 \& \Phi_2 \in T$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\Phi_1 \& \Phi_2 \in T$. В СИП выводимы секвенции $\Phi_1 \& \Phi_2 \vdash \Phi_1$ и $\Phi_1 \& \Phi_2 \vdash \Phi_2$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>Шаг индукции**</u>: Здесь мы рассмотрим четыре случая: $\Phi = \Phi_1 \& \Phi_2$, или $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, или $\Phi = \neg\Phi_1$, или $\Phi = \exists x \Phi_1$. Случаи $\Phi = \Phi_1 \to \Phi_2$ и $\Phi = \forall x \Phi_1$ разбираются аналогично.

Пусть $\Phi = \Phi_1 \& \Phi_2$, и для предложений Φ_1 и Φ_2 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1$ и $\mathfrak{M} \models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \in T$ и $\Phi_2 \in T$. $\Longrightarrow$ Поскольку секвенция $\Phi_1, \Phi_2 \vdash \Phi_1 \& \Phi_2$ выводима в СИП и T — теория, получаем $\Phi_1 \& \Phi_2 \in T$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\Phi_1 \& \Phi_2 \in T$. В СИП выводимы секвенции $\Phi_1 \& \Phi_2 \vdash \Phi_1$ и $\Phi_1 \& \Phi_2 \vdash \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу дедуктивной замкнутости T, имеет место $\Phi_1 \in T$ и $\Phi_2 \in T$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>Шаг индукции**</u>: Здесь мы рассмотрим четыре случая: $\Phi = \Phi_1 \& \Phi_2$, или $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, или $\Phi = \neg\Phi_1$, или $\Phi = \exists x \Phi_1$. Случаи $\Phi = \Phi_1 \to \Phi_2$ и $\Phi = \forall x \Phi_1$ разбираются аналогично.

Пусть $\Phi = \Phi_1 \& \Phi_2$, и для предложений Φ_1 и Φ_2 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1$ и $\mathfrak{M} \models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \in T$ и $\Phi_2 \in T$. $\Longrightarrow$ Поскольку секвенция $\Phi_1, \Phi_2 \vdash \Phi_1 \& \Phi_2$ выводима в СИП и T — теория, получаем $\Phi_1 \& \Phi_2 \in T$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\Phi_1 \& \Phi_2 \in T$. В СИП выводимы секвенции $\Phi_1 \& \Phi_2 \vdash \Phi_1$ и $\Phi_1 \& \Phi_2 \vdash \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу дедуктивной замкнутости T, имеет место $\Phi_1 \in T$ и $\Phi_2 \in T$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\mathfrak{M} \models \Phi_1$ и $\mathfrak{M} \models \Phi_2$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

<u>Шаг индукции**</u>: Здесь мы рассмотрим четыре случая: $\Phi = \Phi_1 \& \Phi_2$, или $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, или $\Phi = \neg\Phi_1$, или $\Phi = \exists x \Phi_1$. Случаи $\Phi = \Phi_1 \to \Phi_2$ и $\Phi = \forall x \Phi_1$ разбираются аналогично.

Пусть $\Phi = \Phi_1 \& \Phi_2$, и для предложений Φ_1 и Φ_2 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1$ и $\mathfrak{M} \models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \in T$ и $\Phi_2 \in T$. $\Longrightarrow$ Поскольку секвенция $\Phi_1, \Phi_2 \vdash \Phi_1 \& \Phi_2$ выводима в СИП и T — теория, получаем $\Phi_1 \& \Phi_2 \in T$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\Phi_1 \& \Phi_2 \in T$. В СИП выводимы секвенции $\Phi_1 \& \Phi_2 \vdash \Phi_1$ и $\Phi_1 \& \Phi_2 \vdash \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу дедуктивной замкнутости T, имеет место $\Phi_1 \in T$ и $\Phi_2 \in T$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\mathfrak{M} \models \Phi_1$ и $\mathfrak{M} \models \Phi_2$. Таким образом, $\mathfrak{M} \models \Phi$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, и для предложений Φ_1 и Φ_2 свойство $(**)$ уже доказано.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, и для предложений Φ_1 и Φ_2 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1$ или $\mathfrak{M} \models \Phi_2$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, и для предложений Φ_1 и Φ_2 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1$ или $\mathfrak{M} \models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \in T$ или $\Phi_2 \in T$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, и для предложений Φ_1 и Φ_2 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1$ или $\mathfrak{M} \models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \in T$ или $\Phi_2 \in T$. Секвенции $\Phi_1 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ и $\Phi_2 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ выводимы в СИП.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, и для предложений Φ_1 и Φ_2 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1$ или $\mathfrak{M} \models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \in T$ или $\Phi_2 \in T$. Секвенции $\Phi_1 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ и $\Phi_2 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ выводимы в СИП. $\Longrightarrow$ В любом случае, в силу дедуктивной замкнутости T, получаем $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in T$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, и для предложений Φ_1 и Φ_2 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1$ или $\mathfrak{M} \models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \in T$ или $\Phi_2 \in T$. Секвенции $\Phi_1 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ и $\Phi_2 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ выводимы в СИП. $\Longrightarrow$ В любом случае, в силу дедуктивной замкнутости T, получаем $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in T$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in T$ и, напротив, справедливо $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1 \vee \Phi_2$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, и для предложений Φ_1 и Φ_2 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1$ или $\mathfrak{M} \models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \in T$ или $\Phi_2 \in T$. Секвенции $\Phi_1 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ и $\Phi_2 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ выводимы в СИП. $\Longrightarrow$ В любом случае, в силу дедуктивной замкнутости T, получаем $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in T$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in T$ и, напротив, справедливо $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1 \vee \Phi_2$. $\Longrightarrow$ $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1$ и $\mathfrak{M} \not\models \Phi_2$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, и для предложений Φ_1 и Φ_2 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1$ или $\mathfrak{M} \models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \in T$ или $\Phi_2 \in T$. Секвенции $\Phi_1 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ и $\Phi_2 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ выводимы в СИП. $\Longrightarrow$ В любом случае, в силу дедуктивной замкнутости T, получаем $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in T$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in T$ и, напротив, справедливо $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1 \vee \Phi_2$. $\Longrightarrow$ $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1$ и $\mathfrak{M} \not\models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \notin T$ и $\Phi_2 \notin T$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, и для предложений Φ_1 и Φ_2 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1$ или $\mathfrak{M} \models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \in T$ или $\Phi_2 \in T$. Секвенции $\Phi_1 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ и $\Phi_2 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ выводимы в СИП. $\Longrightarrow$ В любом случае, в силу дедуктивной замкнутости T, получаем $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in T$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in T$ и, напротив, справедливо $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1 \vee \Phi_2$. $\Longrightarrow$ $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1$ и $\mathfrak{M} \not\models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \notin T$ и $\Phi_2 \notin T$. $\Longrightarrow$ В силу полноты теории T, заключаем, что $\neg\Phi_1 \in T$ и $\neg\Phi_2 \in T$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, и для предложений Φ_1 и Φ_2 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1$ или $\mathfrak{M} \models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \in T$ или $\Phi_2 \in T$. Секвенции $\Phi_1 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ и $\Phi_2 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ выводимы в СИП. $\Longrightarrow$ В любом случае, в силу дедуктивной замкнутости T, получаем $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in T$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in T$ и, напротив, справедливо $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1 \vee \Phi_2$. $\Longrightarrow$ $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1$ и $\mathfrak{M} \not\models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \notin T$ и $\Phi_2 \notin T$. $\Longrightarrow$ В силу полноты теории T, заключаем, что $\neg\Phi_1 \in T$ и $\neg\Phi_2 \in T$. $\Longrightarrow$ В силу выводимости секвенции $\neg\Phi_1, \neg\Phi_2 \vdash \neg\Phi_1 \& \neg\Phi_2$ и дедуктивной замкнутости T, получаем, что справедливо $\neg\Phi_1 \& \neg\Phi_2 \in T$,

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, и для предложений Φ_1 и Φ_2 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1$ или $\mathfrak{M} \models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \in T$ или $\Phi_2 \in T$. Секвенции $\Phi_1 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ и $\Phi_2 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ выводимы в СИП. $\Longrightarrow$ В любом случае, в силу дедуктивной замкнутости T, получаем $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in T$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in T$ и, напротив, справедливо $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1 \vee \Phi_2$. $\Longrightarrow$ $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1$ и $\mathfrak{M} \not\models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \notin T$ и $\Phi_2 \notin T$. $\Longrightarrow$ В силу полноты теории T, заключаем, что $\neg\Phi_1 \in T$ и $\neg\Phi_2 \in T$. $\Longrightarrow$ В силу выводимости секвенции $\neg\Phi_1, \neg\Phi_2 \vdash \neg\Phi_1 \& \neg\Phi_2$ и дедуктивной замкнутости T, получаем, что справедливо $\neg\Phi_1 \& \neg\Phi_2 \in T$, что невозможно в силу непротиворечивости T.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, и для предложений Φ_1 и Φ_2 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1$ или $\mathfrak{M} \models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \in T$ или $\Phi_2 \in T$. Секвенции $\Phi_1 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ и $\Phi_2 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ выводимы в СИП. $\Longrightarrow$ В любом случае, в силу дедуктивной замкнутости T, получаем $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in T$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in T$ и, напротив, справедливо $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1 \vee \Phi_2$. $\Longrightarrow$ $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1$ и $\mathfrak{M} \not\models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \notin T$ и $\Phi_2 \notin T$. $\Longrightarrow$ В силу полноты теории T, заключаем, что $\neg\Phi_1 \in T$ и $\neg\Phi_2 \in T$. $\Longrightarrow$ В силу выводимости секвенции $\neg\Phi_1, \neg\Phi_2 \vdash \neg\Phi_1 \& \neg\Phi_2$ и дедуктивной замкнутости T, получаем, что справедливо $\neg\Phi_1 \& \neg\Phi_2 \in T$, что невозможно в силу непротиворечивости T.

Пусть $\Phi = \neg\Phi_1$, и для предложения Φ_1 свойство $(**)$ уже доказано.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, и для предложений Φ_1 и Φ_2 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1$ или $\mathfrak{M} \models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \in T$ или $\Phi_2 \in T$. Секвенции $\Phi_1 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ и $\Phi_2 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ выводимы в СИП. $\Longrightarrow$ В любом случае, в силу дедуктивной замкнутости T, получаем $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in T$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in T$ и, напротив, справедливо $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1 \vee \Phi_2$. $\Longrightarrow$ $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1$ и $\mathfrak{M} \not\models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \notin T$ и $\Phi_2 \notin T$. $\Longrightarrow$ В силу полноты теории T, заключаем, что $\neg\Phi_1 \in T$ и $\neg\Phi_2 \in T$. $\Longrightarrow$ В силу выводимости секвенции $\neg\Phi_1, \neg\Phi_2 \vdash \neg\Phi_1 \& \neg\Phi_2$ и дедуктивной замкнутости T, получаем, что справедливо $\neg\Phi_1 \& \neg\Phi_2 \in T$, что невозможно в силу непротиворечивости T.

Пусть $\Phi = \neg\Phi_1$, и для предложения Φ_1 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \neg\Phi_1$, то $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, и для предложений Φ_1 и Φ_2 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1$ или $\mathfrak{M} \models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \in T$ или $\Phi_2 \in T$. Секвенции $\Phi_1 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ и $\Phi_2 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ выводимы в СИП. $\Longrightarrow$ В любом случае, в силу дедуктивной замкнутости T, получаем $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in T$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in T$ и, напротив, справедливо $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1 \vee \Phi_2$. $\Longrightarrow$ $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1$ и $\mathfrak{M} \not\models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \notin T$ и $\Phi_2 \notin T$. $\Longrightarrow$ В силу полноты теории T, заключаем, что $\neg\Phi_1 \in T$ и $\neg\Phi_2 \in T$. $\Longrightarrow$ В силу выводимости секвенции $\neg\Phi_1, \neg\Phi_2 \vdash \neg\Phi_1 \& \neg\Phi_2$ и дедуктивной замкнутости T, получаем, что справедливо $\neg\Phi_1 \& \neg\Phi_2 \in T$, что невозможно в силу непротиворечивости T.

Пусть $\Phi = \neg\Phi_1$, и для предложения Φ_1 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \neg\Phi_1$, то $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1$. $\Rightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \notin T$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, и для предложений Φ_1 и Φ_2 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1$ или $\mathfrak{M} \models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \in T$ или $\Phi_2 \in T$. Секвенции $\Phi_1 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ и $\Phi_2 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ выводимы в СИП. $\Longrightarrow$ В любом случае, в силу дедуктивной замкнутости T, получаем $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in T$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in T$ и, напротив, справедливо $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1 \vee \Phi_2$. $\Longrightarrow$ $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1$ и $\mathfrak{M} \not\models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \notin T$ и $\Phi_2 \notin T$. $\Longrightarrow$ В силу полноты теории T, заключаем, что $\neg\Phi_1 \in T$ и $\neg\Phi_2 \in T$. $\Longrightarrow$ В силу выводимости секвенции $\neg\Phi_1, \neg\Phi_2 \vdash \neg\Phi_1 \& \neg\Phi_2$ и дедуктивной замкнутости T, получаем, что справедливо $\neg\Phi_1 \& \neg\Phi_2 \in T$, что невозможно в силу непротиворечивости T.

Пусть $\Phi = \neg\Phi_1$, и для предложения Φ_1 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \neg\Phi_1$, то $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1$. $\Rightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \notin T$. $\Longrightarrow$ В силу полноты теории T, заключаем $\neg\Phi_1 \in T$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, и для предложений Φ_1 и Φ_2 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1$ или $\mathfrak{M} \models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \in T$ или $\Phi_2 \in T$. Секвенции $\Phi_1 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ и $\Phi_2 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ выводимы в СИП. $\Longrightarrow$ В любом случае, в силу дедуктивной замкнутости T, получаем $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in T$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in T$ и, напротив, справедливо $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1 \vee \Phi_2$. $\Longrightarrow$ $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1$ и $\mathfrak{M} \not\models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \notin T$ и $\Phi_2 \notin T$. $\Longrightarrow$ В силу полноты теории T, заключаем, что $\neg\Phi_1 \in T$ и $\neg\Phi_2 \in T$. $\Longrightarrow$ В силу выводимости секвенции $\neg\Phi_1, \neg\Phi_2 \vdash \neg\Phi_1 \& \neg\Phi_2$ и дедуктивной замкнутости T, получаем, что справедливо $\neg\Phi_1 \& \neg\Phi_2 \in T$, что невозможно в силу непротиворечивости T.

Пусть $\Phi = \neg\Phi_1$, и для предложения Φ_1 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \neg\Phi_1$, то $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1$. $\Rightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \notin T$. $\Longrightarrow$ В силу полноты теории T, заключаем $\neg\Phi_1 \in T$.

$(\Leftarrow)$ Если $\neg\Phi_1 \in T$, то из непротиворечивости теории T получаем $\Phi_1 \notin T$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, и для предложений Φ_1 и Φ_2 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \Phi$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1$ или $\mathfrak{M} \models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \in T$ или $\Phi_2 \in T$. Секвенции $\Phi_1 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ и $\Phi_2 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2$ выводимы в СИП. $\Longrightarrow$ В любом случае, в силу дедуктивной замкнутости T, получаем $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in T$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in T$ и, напротив, справедливо $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1 \vee \Phi_2$. $\Longrightarrow$ $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1$ и $\mathfrak{M} \not\models \Phi_2$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \notin T$ и $\Phi_2 \notin T$. $\Longrightarrow$ В силу полноты теории T, заключаем, что $\neg\Phi_1 \in T$ и $\neg\Phi_2 \in T$. $\Longrightarrow$ В силу выводимости секвенции $\neg\Phi_1, \neg\Phi_2 \vdash \neg\Phi_1 \& \neg\Phi_2$ и дедуктивной замкнутости T, получаем, что справедливо $\neg\Phi_1 \& \neg\Phi_2 \in T$, что невозможно в силу непротиворечивости T.

Пусть $\Phi = \neg\Phi_1$, и для предложения Φ_1 свойство $(**)$ уже доказано.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \neg\Phi_1$, то $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1$. $\Rightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1 \notin T$. $\Longrightarrow$ В силу полноты теории T, заключаем $\neg\Phi_1 \in T$.

$(\Leftarrow)$ Если $\neg\Phi_1 \in T$, то из непротиворечивости теории T получаем $\Phi_1 \notin T$. $\Longrightarrow$ По индукционному предположению, имеем $\mathfrak{M} \not\models \Phi_1$, то есть $\mathfrak{M} \models \neg\Phi_1$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \exists x \Phi_1(x)$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \exists x \Phi_1(x)$. Отметим, что здесь $\Phi_1(x)$ не является предложением и мы не можем по индукции предполагать для него справедливость $(**)$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \exists x \Phi_1(x)$. Отметим, что здесь $\Phi_1(x)$ не является предложением и мы не можем по индукции предполагать для него справедливость $(**)$. Однако, если $c \in C$, то $\Phi_1(c)$ — это предложение и его длина меньше длины предложения $\exists x \Phi_1(x)$,

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \exists x \Phi_1(x)$. Отметим, что здесь $\Phi_1(x)$ не является предложением и мы не можем по индукции предполагать для него справедливость $(**)$. Однако, если $c \in C$, то $\Phi_1(c)$ — это предложение и его длина меньше длины предложения $\exists x \Phi_1(x)$, поэтому для $\Phi_1(c)$ можно предполагать справедливость $(**)$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \exists x \Phi_1(x)$. Отметим, что здесь $\Phi_1(x)$ не является предложением и мы не можем по индукции предполагать для него справедливость $(**)$. Однако, если $c \in C$, то $\Phi_1(c)$ — это предложение и его длина меньше длины предложения $\exists x \Phi_1(x)$, поэтому для $\Phi_1(c)$ можно предполагать справедливость $(**)$.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \exists x \Phi_1(x)$, то существует $[c] \in M$ такой, что $\mathfrak{M} \models \Phi_1([c])$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \exists x \Phi_1(x)$. Отметим, что здесь $\Phi_1(x)$ не является предложением и мы не можем по индукции предполагать для него справедливость $(**)$. Однако, если $c \in C$, то $\Phi_1(c)$ — это предложение и его длина меньше длины предложения $\exists x \Phi_1(x)$, поэтому для $\Phi_1(c)$ можно предполагать справедливость $(**)$.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \exists x \Phi_1(x)$, то существует $[c] \in M$ такой, что $\mathfrak{M} \models \Phi_1([c])$. $\Longrightarrow$ Т.к. $[c] = c^{\mathfrak{M}}$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1(c)$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \exists x \Phi_1(x)$. Отметим, что здесь $\Phi_1(x)$ не является предложением и мы не можем по индукции предполагать для него справедливость $(**)$. Однако, если $c \in C$, то $\Phi_1(c)$ — это предложение и его длина меньше длины предложения $\exists x \Phi_1(x)$, поэтому для $\Phi_1(c)$ можно предполагать справедливость $(**)$.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \exists x \Phi_1(x)$, то существует $[c] \in M$ такой, что $\mathfrak{M} \models \Phi_1([c])$. $\Longrightarrow$ Т.к. $[c] = c^{\mathfrak{M}}$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1(c)$.$\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1(c) \in T$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \exists x \Phi_1(x)$. Отметим, что здесь $\Phi_1(x)$ не является предложением и мы не можем по индукции предполагать для него справедливость $(**)$. Однако, если $c \in C$, то $\Phi_1(c)$ — это предложение и его длина меньше длины предложения $\exists x \Phi_1(x)$, поэтому для $\Phi_1(c)$ можно предполагать справедливость $(**)$.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \exists x \Phi_1(x)$, то существует $[c] \in M$ такой, что $\mathfrak{M} \models \Phi_1([c])$. $\Longrightarrow$ Т.к. $[c] = c^{\mathfrak{M}}$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1(c)$.$\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1(c) \in T$. $\Longrightarrow$ Поскольку в СИП выводима секвенция $\Phi_1(c) \vdash \exists x \Phi_1(x)$ и T дедуктивно замкнута, заключаем, что справедливо $\exists x \Phi_1(x) \in T$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \exists x \Phi_1(x)$. Отметим, что здесь $\Phi_1(x)$ не является предложением и мы не можем по индукции предполагать для него справедливость $(**)$. Однако, если $c \in C$, то $\Phi_1(c)$ — это предложение и его длина меньше длины предложения $\exists x \Phi_1(x)$, поэтому для $\Phi_1(c)$ можно предполагать справедливость $(**)$.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \exists x \Phi_1(x)$, то существует $[c] \in M$ такой, что $\mathfrak{M} \models \Phi_1([c])$. $\Longrightarrow$ Т.к. $[c] = c^{\mathfrak{M}}$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1(c)$.$\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1(c) \in T$. $\Longrightarrow$ Поскольку в СИП выводима секвенция $\Phi_1(c) \vdash \exists x \Phi_1(x)$ и T дедуктивно замкнута, заключаем, что справедливо $\exists x \Phi_1(x) \in T$.

$(\Leftarrow)$ Если $\exists x \Phi_1(x) \in T$, то в силу того, что T — теория Хенкина, найдётся $c \in C$ со свойством $\Phi_1(c) \in T$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \exists x \Phi_1(x)$. Отметим, что здесь $\Phi_1(x)$ не является предложением и мы не можем по индукции предполагать для него справедливость $(**)$. Однако, если $c \in C$, то $\Phi_1(c)$ — это предложение и его длина меньше длины предложения $\exists x \Phi_1(x)$, поэтому для $\Phi_1(c)$ можно предполагать справедливость $(**)$.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \exists x \Phi_1(x)$, то существует $[c] \in M$ такой, что $\mathfrak{M} \models \Phi_1([c])$. $\Longrightarrow$ Т.к. $[c] = c^{\mathfrak{M}}$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1(c)$.$\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1(c) \in T$. $\Longrightarrow$ Поскольку в СИП выводима секвенция $\Phi_1(c) \vdash \exists x \Phi_1(x)$ и T дедуктивно замкнута, заключаем, что справедливо $\exists x \Phi_1(x) \in T$.

$(\Leftarrow)$ Если $\exists x \Phi_1(x) \in T$, то в силу того, что T — теория Хенкина, найдётся $c \in C$ со свойством $\Phi_1(c) \in T$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, справедливо $\mathfrak{M} \models \Phi_1(c)$.

Теорема о канонической модели: $\mathfrak{M} \models \Phi \iff \Phi \in T$

Пусть $\Phi = \exists x \Phi_1(x)$. Отметим, что здесь $\Phi_1(x)$ не является предложением и мы не можем по индукции предполагать для него справедливость $(**)$. Однако, если $c \in C$, то $\Phi_1(c)$ — это предложение и его длина меньше длины предложения $\exists x \Phi_1(x)$, поэтому для $\Phi_1(c)$ можно предполагать справедливость $(**)$.

$(\Rightarrow)$ Если $\mathfrak{M} \models \exists x \Phi_1(x)$, то существует $[c] \in M$ такой, что $\mathfrak{M} \models \Phi_1([c])$. $\Longrightarrow$ Т.к. $[c] = c^{\mathfrak{M}}$, то $\mathfrak{M} \models \Phi_1(c)$.$\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, $\Phi_1(c) \in T$. $\Longrightarrow$ Поскольку в СИП выводима секвенция $\Phi_1(c) \vdash \exists x \Phi_1(x)$ и T дедуктивно замкнута, заключаем, что справедливо $\exists x \Phi_1(x) \in T$.

$(\Leftarrow)$ Если $\exists x \Phi_1(x) \in T$, то в силу того, что T — теория Хенкина, найдётся $c \in C$ со свойством $\Phi_1(c) \in T$. $\Longrightarrow$ В силу индукционного предположения, справедливо $\mathfrak{M} \models \Phi_1(c)$. $\Longrightarrow \mathfrak{M} \models \exists x \Phi_1(x)$.

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Единственность $\mathfrak{M} \models T$:

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Единственность $\mathfrak{M} \models T$: Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — две алгебраические системы, удовлетворяющие условию теоремы.

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Единственность $\mathfrak{M} \models T$: Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — две алгебраические системы, удовлетворяющие условию теоремы. Определим отображение $f : M \to N$ следующим образом:

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Единственность $\mathfrak{M} \models T$: Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — две алгебраические системы, удовлетворяющие условию теоремы. Определим отображение $f : M \to N$ следующим образом: если $a \in M$, то существует $c \in C$ такой, что $a = c^{\mathfrak{M}}$, и в этом случае полагаем $f(a) = c^{\mathfrak{N}}$.

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Единственность $\mathfrak{M} \models T$: Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — две алгебраические системы, удовлетворяющие условию теоремы. Определим отображение $f : M \to N$ следующим образом: если $a \in M$, то существует $c \in C$ такой, что $a = c^{\mathfrak{M}}$, и в этом случае полагаем $f(a) = c^{\mathfrak{N}}$.

Покажем, что такое определение отображения f корректно.

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Единственность $\mathfrak{M} \models T$: Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — две алгебраические системы, удовлетворяющие условию теоремы. Определим отображение $f : M \to N$ следующим образом: если $a \in M$, то существует $c \in C$ такой, что $a = c^{\mathfrak{M}}$, и в этом случае полагаем $f(a) = c^{\mathfrak{N}}$.

Покажем, что такое определение отображения f корректно. Допустим, для $a \in M$ найдутся два константных символа $c, d \in C$ с условием $a = c^{\mathfrak{M}} = d^{\mathfrak{M}}$.

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Единственность $\mathfrak{M} \models T$: Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — две алгебраические системы, удовлетворяющие условию теоремы. Определим отображение $f : M \to N$ следующим образом: если $a \in M$, то существует $c \in C$ такой, что $a = c^{\mathfrak{M}}$, и в этом случае полагаем $f(a) = c^{\mathfrak{N}}$.

Покажем, что такое определение отображения f корректно. Допустим, для $a \in M$ найдутся два константных символа $c, d \in C$ с условием $a = c^{\mathfrak{M}} = d^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ Имеет место $\mathfrak{M} \models c \approx d$.

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Единственность $\mathfrak{M} \models T$: Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — две алгебраические системы, удовлетворяющие условию теоремы. Определим отображение $f : M \to N$ следующим образом: если $a \in M$, то существует $c \in C$ такой, что $a = c^{\mathfrak{M}}$, и в этом случае полагаем $f(a) = c^{\mathfrak{N}}$.

Покажем, что такое определение отображения f корректно. Допустим, для $a \in M$ найдутся два константных символа $c, d \in C$ с условием $a = c^{\mathfrak{M}} = d^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ Имеет место $\mathfrak{M} \models c \approx d$. $\Longrightarrow$ Поскольку T — полная теория и $\mathfrak{M} \models T$, заключаем, что $c \approx d \in T$.

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Единственность $\mathfrak{M} \models T$: Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — две алгебраические системы, удовлетворяющие условию теоремы. Определим отображение $f : M \to N$ следующим образом: если $a \in M$, то существует $c \in C$ такой, что $a = c^{\mathfrak{M}}$, и в этом случае полагаем $f(a) = c^{\mathfrak{N}}$.

Покажем, что такое определение отображения f корректно. Допустим, для $a \in M$ найдутся два константных символа $c, d \in C$ с условием $a = c^{\mathfrak{M}} = d^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ Имеет место $\mathfrak{M} \models c \approx d$. $\Longrightarrow$ Поскольку T — полная теория и $\mathfrak{M} \models T$, заключаем, что $c \approx d \in T$. $\Longrightarrow$ $\mathfrak{N} \models c \approx d$, то есть $c^{\mathfrak{N}} = d^{\mathfrak{N}}$, что и требовалось.

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Единственность $\mathfrak{M} \models T$: Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — две алгебраические системы, удовлетворяющие условию теоремы. Определим отображение $f : M \to N$ следующим образом: если $a \in M$, то существует $c \in C$ такой, что $a = c^{\mathfrak{M}}$, и в этом случае полагаем $f(a) = c^{\mathfrak{N}}$.

Покажем, что такое определение отображения f корректно. Допустим, для $a \in M$ найдутся два константных символа $c, d \in C$ с условием $a = c^{\mathfrak{M}} = d^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ Имеет место $\mathfrak{M} \models c \approx d$. $\Longrightarrow$ Поскольку T — полная теория и $\mathfrak{M} \models T$, заключаем, что $c \approx d \in T$. $\Longrightarrow \mathfrak{N} \models c \approx d$, то есть $c^{\mathfrak{N}} = d^{\mathfrak{N}}$, что и требовалось.

Ясно, что f сюръективно.

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Единственность $\mathfrak{M} \models T$: Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — две алгебраические системы, удовлетворяющие условию теоремы. Определим отображение $f : M \to N$ следующим образом: если $a \in M$, то существует $c \in C$ такой, что $a = c^{\mathfrak{M}}$, и в этом случае полагаем $f(a) = c^{\mathfrak{N}}$.

Покажем, что такое определение отображения f корректно. Допустим, для $a \in M$ найдутся два константных символа $c, d \in C$ с условием $a = c^{\mathfrak{M}} = d^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ Имеет место $\mathfrak{M} \models c \approx d$. $\Longrightarrow$ Поскольку T — полная теория и $\mathfrak{M} \models T$, заключаем, что $c \approx d \in T$. $\Longrightarrow \mathfrak{N} \models c \approx d$, то есть $c^{\mathfrak{N}} = d^{\mathfrak{N}}$, что и требовалось.

Ясно, что f сюръективно. Докажем инъективность f.

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Единственность $\mathfrak{M} \models T$: Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — две алгебраические системы, удовлетворяющие условию теоремы. Определим отображение $f : M \to N$ следующим образом: если $a \in M$, то существует $c \in C$ такой, что $a = c^{\mathfrak{M}}$, и в этом случае полагаем $f(a) = c^{\mathfrak{N}}$.

Покажем, что такое определение отображения f корректно. Допустим, для $a \in M$ найдутся два константных символа $c, d \in C$ с условием $a = c^{\mathfrak{M}} = d^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ Имеет место $\mathfrak{M} \models c \approx d$. $\Longrightarrow$ Поскольку T — полная теория и $\mathfrak{M} \models T$, заключаем, что $c \approx d \in T$. $\Longrightarrow \mathfrak{N} \models c \approx d$, то есть $c^{\mathfrak{N}} = d^{\mathfrak{N}}$, что и требовалось.

Ясно, что f сюръективно. Докажем инъективность f. Пусть $a_1, a_2 \in M$, $a_1 = c_1^{\mathfrak{M}}$ и $a_2 = c_2^{\mathfrak{M}}$ для некоторых $c_1, c_2 \in C$.

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Единственность $\mathfrak{M} \models T$: Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — две алгебраические системы, удовлетворяющие условию теоремы. Определим отображение $f : M \to N$ следующим образом: если $a \in M$, то существует $c \in C$ такой, что $a = c^{\mathfrak{M}}$, и в этом случае полагаем $f(a) = c^{\mathfrak{N}}$.

Покажем, что такое определение отображения f корректно. Допустим, для $a \in M$ найдутся два константных символа $c, d \in C$ с условием $a = c^{\mathfrak{M}} = d^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ Имеет место $\mathfrak{M} \models c \approx d$. $\Longrightarrow$ Поскольку T — полная теория и $\mathfrak{M} \models T$, заключаем, что $c \approx d \in T$. $\Longrightarrow \mathfrak{N} \models c \approx d$, то есть $c^{\mathfrak{N}} = d^{\mathfrak{N}}$, что и требовалось.

Ясно, что f сюръективно. Докажем инъективность f. Пусть $a_1, a_2 \in M$, $a_1 = c_1^{\mathfrak{M}}$ и $a_2 = c_2^{\mathfrak{M}}$ для некоторых $c_1, c_2 \in C$. Если $f(a_1)=f(a_2)$, то $c_1^{\mathfrak{N}}=c_2^{\mathfrak{N}}$.

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Единственность $\mathfrak{M} \models T$: Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — две алгебраические системы, удовлетворяющие условию теоремы. Определим отображение $f : M \to N$ следующим образом: если $a \in M$, то существует $c \in C$ такой, что $a = c^{\mathfrak{M}}$, и в этом случае полагаем $f(a) = c^{\mathfrak{N}}$.

Покажем, что такое определение отображения f корректно. Допустим, для $a \in M$ найдутся два константных символа $c, d \in C$ с условием $a = c^{\mathfrak{M}} = d^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ Имеет место $\mathfrak{M} \models c \approx d$. $\Longrightarrow$ Поскольку T — полная теория и $\mathfrak{M} \models T$, заключаем, что $c \approx d \in T$. $\Longrightarrow \mathfrak{N} \models c \approx d$, то есть $c^{\mathfrak{N}} = d^{\mathfrak{N}}$, что и требовалось.

Ясно, что f сюръективно. Докажем инъективность f. Пусть $a_1, a_2 \in M$, $a_1 = c_1^{\mathfrak{M}}$ и $a_2 = c_2^{\mathfrak{M}}$ для некоторых $c_1, c_2 \in C$. Если $f(a_1)=f(a_2)$, то $c_1^{\mathfrak{N}}=c_2^{\mathfrak{N}}$. $\Longrightarrow \mathfrak{N} \models c_1 \approx c_2$.

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Единственность $\mathfrak{M} \models T$: Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — две алгебраические системы, удовлетворяющие условию теоремы. Определим отображение $f : M \to N$ следующим образом: если $a \in M$, то существует $c \in C$ такой, что $a = c^{\mathfrak{M}}$, и в этом случае полагаем $f(a) = c^{\mathfrak{N}}$.

Покажем, что такое определение отображения f корректно. Допустим, для $a \in M$ найдутся два константных символа $c, d \in C$ с условием $a = c^{\mathfrak{M}} = d^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ Имеет место $\mathfrak{M} \models c \approx d$. $\Longrightarrow$ Поскольку T — полная теория и $\mathfrak{M} \models T$, заключаем, что $c \approx d \in T$. $\Longrightarrow \mathfrak{N} \models c \approx d$, то есть $c^{\mathfrak{N}} = d^{\mathfrak{N}}$, что и требовалось.

Ясно, что f сюръективно. Докажем инъективность f. Пусть $a_1, a_2 \in M$, $a_1 = c_1^{\mathfrak{M}}$ и $a_2 = c_2^{\mathfrak{M}}$ для некоторых $c_1, c_2 \in C$. Если $f(a_1)=f(a_2)$, то $c_1^{\mathfrak{N}}=c_2^{\mathfrak{N}}$. $\Longrightarrow \mathfrak{N} \models c_1 \approx c_2$. $\Longrightarrow$ В силу полноты T, заключаем, что $c_1 \approx c_2 \in T$.

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Единственность $\mathfrak{M} \models T$: Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — две алгебраические системы, удовлетворяющие условию теоремы. Определим отображение $f : M \to N$ следующим образом: если $a \in M$, то существует $c \in C$ такой, что $a = c^{\mathfrak{M}}$, и в этом случае полагаем $f(a) = c^{\mathfrak{N}}$.

Покажем, что такое определение отображения f корректно. Допустим, для $a \in M$ найдутся два константных символа $c, d \in C$ с условием $a = c^{\mathfrak{M}} = d^{\mathfrak{M}}$. $\Longrightarrow$ Имеет место $\mathfrak{M} \models c \approx d$. $\Longrightarrow$ Поскольку T — полная теория и $\mathfrak{M} \models T$, заключаем, что $c \approx d \in T$. $\Longrightarrow \mathfrak{N} \models c \approx d$, то есть $c^{\mathfrak{N}} = d^{\mathfrak{N}}$, что и требовалось.

Ясно, что f сюръективно. Докажем инъективность f. Пусть $a_1, a_2 \in M$, $a_1 = c_1^{\mathfrak{M}}$ и $a_2 = c_2^{\mathfrak{M}}$ для некоторых $c_1, c_2 \in C$. Если $f(a_1)=f(a_2)$, то $c_1^{\mathfrak{N}}=c_2^{\mathfrak{N}}$. $\Longrightarrow \mathfrak{N} \models c_1 \approx c_2$. $\Longrightarrow$ В силу полноты T, заключаем, что $c_1 \approx c_2 \in T$. $\Longrightarrow \mathfrak{M} \models c_1 \approx c_2$, то есть $a_1 = c_1^{\mathfrak{M}} = c_2^{\mathfrak{M}} = a_2$, что и требовалось.

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Очевидно, отображение f сохраняет сигнатурные константы.

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Очевидно, отображение f сохраняет сигнатурные константы.

Докажем, что f сохраняет сигнатурные предикаты.

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Очевидно, отображение f сохраняет сигнатурные константы.

Докажем, что f сохраняет сигнатурные предикаты. В силу полноты T и в силу выбора систем $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, справедливо тождество $T = \mathrm{Th}\,\mathfrak{M} = \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$.

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Очевидно, отображение f сохраняет сигнатурные константы.

Докажем, что f сохраняет сигнатурные предикаты. В силу полноты T и в силу выбора систем $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, справедливо тождество $T = \mathrm{Th}\,\mathfrak{M} = \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$. Тогда для произвольного n-местного предикатного символа P из Σ и любых $c_1, \ldots, c_n \in C$ имеет место цепочка эквивалентных утверждений:

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Очевидно, отображение f сохраняет сигнатурные константы.

Докажем, что f сохраняет сигнатурные предикаты. В силу полноты T и в силу выбора систем $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, справедливо тождество $T = \mathrm{Th}\,\mathfrak{M} = \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$. Тогда для произвольного n-местного предикатного символа P из Σ и любых $c_1, \ldots, c_n \in C$ имеет место цепочка эквивалентных утверждений:

$$\langle c_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{M}} \rangle \in P^{\mathfrak{M}}$$

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Очевидно, отображение f сохраняет сигнатурные константы.

Докажем, что f сохраняет сигнатурные предикаты. В силу полноты T и в силу выбора систем $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, справедливо тождество $T = \mathrm{Th}\,\mathfrak{M} = \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$. Тогда для произвольного n-местного предикатного символа P из Σ и любых $c_1, \ldots, c_n \in C$ имеет место цепочка эквивалентных утверждений:

$$\langle c_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{M}} \rangle \in P^{\mathfrak{M}} \Longleftrightarrow \mathfrak{M} \models P(c_1, \ldots, c_n)$$

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Очевидно, отображение f сохраняет сигнатурные константы.

Докажем, что f сохраняет сигнатурные предикаты. В силу полноты T и в силу выбора систем $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, справедливо тождество $T = \operatorname{Th}\mathfrak{M} = \operatorname{Th}\mathfrak{N}$. Тогда для произвольного n-местного предикатного символа P из Σ и любых $c_1, \ldots, c_n \in C$ имеет место цепочка эквивалентных утверждений:

$$\langle c_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{M}} \rangle \in P^{\mathfrak{M}} \Longleftrightarrow \mathfrak{M} \models P(c_1, \ldots, c_n) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow P(c_1, \ldots, c_n) \in \operatorname{Th}\mathfrak{M}$$

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Очевидно, отображение f сохраняет сигнатурные константы.

Докажем, что f сохраняет сигнатурные предикаты. В силу полноты T и в силу выбора систем $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, справедливо тождество $T = \operatorname{Th}\mathfrak{M} = \operatorname{Th}\mathfrak{N}$. Тогда для произвольного n-местного предикатного символа P из Σ и любых $c_1, \ldots, c_n \in C$ имеет место цепочка эквивалентных утверждений:

$$\langle c_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{M}} \rangle \in P^{\mathfrak{M}} \iff \mathfrak{M} \models P(c_1, \ldots, c_n) \iff$$

$$\iff P(c_1, \ldots, c_n) \in \operatorname{Th}\mathfrak{M} \iff P(c_1, \ldots, c_n) \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}$$

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Очевидно, отображение f сохраняет сигнатурные константы.

Докажем, что f сохраняет сигнатурные предикаты. В силу полноты T и в силу выбора систем $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, справедливо тождество $T = \operatorname{Th}\mathfrak{M} = \operatorname{Th}\mathfrak{N}$. Тогда для произвольного n-местного предикатного символа P из Σ и любых $c_1, \ldots, c_n \in C$ имеет место цепочка эквивалентных утверждений:

$$\langle c_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{M}} \rangle \in P^{\mathfrak{M}} \iff \mathfrak{M} \models P(c_1, \ldots, c_n) \iff$$

$$\iff P(c_1, \ldots, c_n) \in \operatorname{Th}\mathfrak{M} \iff P(c_1, \ldots, c_n) \in \operatorname{Th}\mathfrak{N} \iff$$

$$\iff \mathfrak{N} \models P(c_1, \ldots, c_n)$$

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Очевидно, отображение f сохраняет сигнатурные константы.

Докажем, что f сохраняет сигнатурные предикаты. В силу полноты T и в силу выбора систем $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, справедливо тождество $T = \operatorname{Th}\mathfrak{M} = \operatorname{Th}\mathfrak{N}$. Тогда для произвольного n-местного предикатного символа P из Σ и любых $c_1, \ldots, c_n \in C$ имеет место цепочка эквивалентных утверждений:

$$\langle c_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{M}} \rangle \in P^{\mathfrak{M}} \iff \mathfrak{M} \models P(c_1, \ldots, c_n) \iff$$

$$\iff P(c_1, \ldots, c_n) \in \operatorname{Th}\mathfrak{M} \iff P(c_1, \ldots, c_n) \in \operatorname{Th}\mathfrak{N} \iff$$

$$\iff \mathfrak{N} \models P(c_1, \ldots, c_n) \iff \langle c_1^{\mathfrak{N}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{N}} \rangle \in P^{\mathfrak{N}}$$

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Очевидно, отображение f сохраняет сигнатурные константы.

Докажем, что f сохраняет сигнатурные предикаты. В силу полноты T и в силу выбора систем $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, справедливо тождество $T = \operatorname{Th}\mathfrak{M} = \operatorname{Th}\mathfrak{N}$. Тогда для произвольного n-местного предикатного символа P из Σ и любых $c_1, \ldots, c_n \in C$ имеет место цепочка эквивалентных утверждений:

$$\langle c_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{M}} \rangle \in P^{\mathfrak{M}} \iff \mathfrak{M} \models P(c_1, \ldots, c_n) \iff$$

$$\iff P(c_1, \ldots, c_n) \in \operatorname{Th}\mathfrak{M} \iff P(c_1, \ldots, c_n) \in \operatorname{Th}\mathfrak{N} \iff$$

$$\iff \mathfrak{N} \models P(c_1, \ldots, c_n) \iff \langle c_1^{\mathfrak{N}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{N}} \rangle \in P^{\mathfrak{N}} \iff$$

$$\iff \langle\langle f(c_1^{\mathfrak{M}}), \ldots, f(c_n^{\mathfrak{M}}) \rangle \in P^{\mathfrak{N}}.$$

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Очевидно, отображение f сохраняет сигнатурные константы.

Докажем, что f сохраняет сигнатурные предикаты. В силу полноты T и в силу выбора систем $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, справедливо тождество $T = \operatorname{Th}\mathfrak{M} = \operatorname{Th}\mathfrak{N}$. Тогда для произвольного n-местного предикатного символа P из Σ и любых $c_1, \ldots, c_n \in C$ имеет место цепочка эквивалентных утверждений:

$$\langle c_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{M}} \rangle \in P^{\mathfrak{M}} \iff \mathfrak{M} \models P(c_1, \ldots, c_n) \iff$$

$$\iff P(c_1, \ldots, c_n) \in \operatorname{Th}\mathfrak{M} \iff P(c_1, \ldots, c_n) \in \operatorname{Th}\mathfrak{N} \iff$$

$$\iff \mathfrak{N} \models P(c_1, \ldots, c_n) \iff \langle c_1^{\mathfrak{N}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{N}} \rangle \in P^{\mathfrak{N}} \iff$$

$$\iff \langle \langle f(c_1^{\mathfrak{M}}), \ldots, f(c_n^{\mathfrak{M}}) \rangle \in P^{\mathfrak{N}}.$$

Аналогично доказывается, что f сохраняет сигнатурные функции.

Теорема о канонической модели: единственность системы $\mathfrak{M}$

Очевидно, отображение f сохраняет сигнатурные константы.

Докажем, что f сохраняет сигнатурные предикаты. В силу полноты T и в силу выбора систем $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, справедливо тождество $T = \operatorname{Th}\mathfrak{M} = \operatorname{Th}\mathfrak{N}$. Тогда для произвольного n-местного предикатного символа P из Σ и любых $c_1, \ldots, c_n \in C$ имеет место цепочка эквивалентных утверждений:

$$\langle c_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{M}} \rangle \in P^{\mathfrak{M}} \Longleftrightarrow \mathfrak{M} \models P(c_1, \ldots, c_n) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow P(c_1, \ldots, c_n) \in \operatorname{Th}\mathfrak{M} \Longleftrightarrow P(c_1, \ldots, c_n) \in \operatorname{Th}\mathfrak{N} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \mathfrak{N} \models P(c_1, \ldots, c_n) \Longleftrightarrow \langle c_1^{\mathfrak{N}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{N}} \rangle \in P^{\mathfrak{N}} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \langle \langle f(c_1^{\mathfrak{M}}), \ldots, f(c_n^{\mathfrak{M}}) \rangle \in P^{\mathfrak{N}}.$$

Аналогично доказывается, что f сохраняет сигнатурные функции.

Теорема 4 доказана. $\square$