

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

ММФ НГУ, 2-й курс, 1-й поток

Н.Т. Когабаев

Теория Хенкина. Теорема о существовании теории Хенкина.

(по материалам лекций С.С. Гончарова)

*Используйте просмотр в постраничном режиме

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Основная цель — доказать теорему о существовании теории Хенкина T , расширяющей произвольное непротиворечивое множество предложений Γ .

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Основная цель — доказать теорему о существовании теории Хенкина T , расширяющей произвольное непротиворечивое множество предложений Γ .

Для этого потребуются некоторые предварительные сведения о непротиворечивых множествах формул и об элементарных теориях.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Основная цель — доказать теорему о существовании теории Хенкина T , расширяющей произвольное непротиворечивое множество предложений Γ .

Для этого потребуется некоторые предварительные сведения о непротиворечивых множествах формул и об элементарных теориях.

Как обычно, если Φ — формула, то через $FV(\Phi)$ обозначается множество её свободных переменных,

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Основная цель — доказать теорему о существовании теории Хенкина T , расширяющей произвольное непротиворечивое множество предложений Γ .

Для этого потребуется некоторые предварительные сведения о непротиворечивых множествах формул и об элементарных теориях.

Как обычно, если Φ — формула, то через $FV(\Phi)$ обозначается множество её свободных переменных, а если t — терм, то через $FV(t)$ обозначается множество всех переменных, входящих в запись t .

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Основная цель — доказать теорему о существовании теории Хенкина T , расширяющей произвольное непротиворечивое множество предложений Γ .

Для этого потребуется некоторые предварительные сведения о непротиворечивых множествах формул и об элементарных теориях.

Как обычно, если Φ — формула, то через $FV(\Phi)$ обозначается множество её свободных переменных, а если t — терм, то через $FV(t)$ обозначается множество всех переменных, входящих в запись t . Напомним, что подстановка $(\Phi)_t^x$ называется *допустимой*, если ни одно свободное вхождение x в формуле Φ не находится в области действия квантора по некоторой переменной $y \in FV(t)$.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Основная цель — доказать теорему о существовании теории Хенкина T , расширяющей произвольное непротиворечивое множество предложений Γ .

Для этого потребуется некоторые предварительные сведения о непротиворечивых множествах формул и об элементарных теориях.

Как обычно, если Φ — формула, то через $FV(\Phi)$ обозначается множество её свободных переменных, а если t — терм, то через $FV(t)$ обозначается множество всех переменных, входящих в запись t . Напомним, что подстановка $(\Phi)_t^x$ называется *допустимой*, если ни одно свободное вхождение x в формуле Φ не находится в области действия квантора по некоторой переменной $y \in FV(t)$.

Лемма 1. Пусть Γ — конечное множество формул сигнатуры Σ , A — формула сигнатуры Σ , x — переменная, c — константный символ, не входящий в $\Gamma \cup \{A\}$.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Основная цель — доказать теорему о существовании теории Хенкина T , расширяющей произвольное непротиворечивое множество предложений Γ .

Для этого потребуется некоторые предварительные сведения о непротиворечивых множествах формул и об элементарных теориях.

Как обычно, если Φ — формула, то через $FV(\Phi)$ обозначается множество её свободных переменных, а если t — терм, то через $FV(t)$ обозначается множество всех переменных, входящих в запись t . Напомним, что подстановка $(\Phi)_t^x$ называется **допустимой**, если ни одно свободное вхождение x в формуле Φ не находится в области действия квантора по некоторой переменной $y \in FV(t)$.

Лемма 1. Пусть Γ — конечное множество формул сигнатуры Σ , A — формула сигнатуры Σ , x — переменная, c — константный символ, не входящий в $\Gamma \cup \{A\}$. Если секвенция $\Gamma \vdash (A)_c^x$ выводима в СИП, то секвенция $\Gamma \vdash \forall x A$ тоже выводима в СИП.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Основная цель — доказать теорему о существовании теории Хенкина T , расширяющей произвольное непротиворечивое множество предложений Γ .

Для этого потребуется некоторые предварительные сведения о непротиворечивых множествах формул и об элементарных теориях.

Как обычно, если Φ — формула, то через $FV(\Phi)$ обозначается множество её свободных переменных, а если t — терм, то через $FV(t)$ обозначается множество всех переменных, входящих в запись t . Напомним, что подстановка $(\Phi)_t^x$ называется *допустимой*, если ни одно свободное вхождение x в формуле Φ не находится в области действия квантора по некоторой переменной $y \in FV(t)$.

Лемма 1. Пусть Γ — конечное множество формул сигнатуры Σ , A — формула сигнатуры Σ , x — переменная, c — константный символ, не входящий в $\Gamma \cup \{A\}$. Если секвенция $\Gamma \vdash (A)_c^x$ выводима в СИП, то секвенция $\Gamma \vdash \forall x A$ тоже выводима в СИП. Иначе говоря, следующее правило допустимо в СИП:

$$\frac{\Gamma \vdash (A)_c^x}{\Gamma \vdash \forall x A}.$$

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Доказательство: Пусть D — дерево вывода секвенции $\Gamma \vdash (A)_c^x$.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Доказательство: Пусть D — дерево вывода секвенции $\Gamma \vdash (A)_c^x$. Поскольку D конечно, выберем переменную y , которая не встречается в D , не входит (ни связано, ни свободно) в A , и если в D встречается аксиома вида $u \approx v, (\Phi)_u^w \vdash (\Phi)_v^w$, то y отлична от w .

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Доказательство: Пусть D — дерево вывода секвенции $\Gamma \vdash (A)_c^x$. Поскольку D конечно, выберем переменную y , которая не встречается в D , не входит (ни связано, ни свободно) в A , и если в D встречается аксиома вида $u \approx v, (\Phi)_u^w \vdash (\Phi)_v^w$, то y отлична от w .

Пусть $(D)_y^c$ — дерево, полученное из D заменой всех вхождений символа c на переменную y .

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Доказательство: Пусть D — дерево вывода секвенции $\Gamma \vdash (A)_c^x$. Поскольку D конечно, выберем переменную y , которая не встречается в D , не входит (ни связано, ни свободно) в A , и если в D встречается аксиома вида $u \approx v, (\Phi)_u^w \vdash (\Phi)_v^w$, то y отлична от w .

Пусть $(D)_y^c$ — дерево, полученное из D заменой всех вхождений символа c на переменную y . Покажем, что $(D)_y^c$ является деревом вывода секвенции $\Gamma \vdash (A)_y^x$.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Доказательство: Пусть D — дерево вывода секвенции $\Gamma \vdash (A)_c^x$. Поскольку D конечно, выберем переменную y , которая не встречается в D , не входит (ни связано, ни свободно) в A , и если в D встречается аксиома вида $u \approx v, (\Phi)_u^w \vdash (\Phi)_v^w$, то y отлична от w .

Пусть $(D)_y^c$ — дерево, полученное из D заменой всех вхождений символа c на переменную y . Покажем, что $(D)_y^c$ является деревом вывода секвенции $\Gamma \vdash (A)_y^x$. Для этого достаточно показать, что в результате указанной замены c на y в D :

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Доказательство: Пусть D — дерево вывода секвенции $\Gamma \vdash (A)_c^x$. Поскольку D конечно, выберем переменную y , которая не встречается в D , не входит (ни связано, ни свободно) в A , и если в D встречается аксиома вида $u \approx v, (\Phi)_u^w \vdash (\Phi)_v^w$, то y отлична от w .

Пусть $(D)_y^c$ — дерево, полученное из D заменой всех вхождений символа c на переменную y . Покажем, что $(D)_y^c$ является деревом вывода секвенции $\Gamma \vdash (A)_y^x$. Для этого достаточно показать, что в результате указанной замены c на y в D :

- (a) Новым корнем будет секвенция $\Gamma \vdash (A)_y^x$;

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Доказательство: Пусть D — дерево вывода секвенции $\Gamma \vdash (A)_c^x$. Поскольку D конечно, выберем переменную y , которая не встречается в D , не входит (ни связано, ни свободно) в A , и если в D встречается аксиома вида $u \approx v, (\Phi)_u^w \vdash (\Phi)_v^w$, то y отлична от w .

Пусть $(D)_y^c$ — дерево, полученное из D заменой всех вхождений символа c на переменную y . Покажем, что $(D)_y^c$ является деревом вывода секвенции $\Gamma \vdash (A)_y^x$. Для этого достаточно показать, что в результате указанной замены c на y в D :

- (а) Новым корнем будет секвенция $\Gamma \vdash (A)_y^x$;
- (б) Аксиомы СИП преобразуются в аксиомы СИП;

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Доказательство: Пусть D — дерево вывода секвенции $\Gamma \vdash (A)_c^x$. Поскольку D конечно, выберем переменную y , которая не встречается в D , не входит (ни связано, ни свободно) в A , и если в D встречается аксиома вида $u \approx v, (\Phi)_u^w \vdash (\Phi)_v^w$, то y отлична от w .

Пусть $(D)_y^c$ — дерево, полученное из D заменой всех вхождений символа c на переменную y . Покажем, что $(D)_y^c$ является деревом вывода секвенции $\Gamma \vdash (A)_y^x$. Для этого достаточно показать, что в результате указанной замены c на y в D :

- (а) Новым корнем будет секвенция $\Gamma \vdash (A)_y^x$;
- (б) Аксиомы СИП преобразуются в аксиомы СИП;
- (в) Правила вывода СИП преобразуются в правила вывода СИП.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Доказательство: Пусть D — дерево вывода секвенции $\Gamma \vdash (A)_c^x$. Поскольку D конечно, выберем переменную y , которая не встречается в D , не входит (ни связано, ни свободно) в A , и если в D встречается аксиома вида $u \approx v, (\Phi)_u^w \vdash (\Phi)_v^w$, то y отлична от w .

Пусть $(D)_y^c$ — дерево, полученное из D заменой всех вхождений символа c на переменную y . Покажем, что $(D)_y^c$ является деревом вывода секвенции $\Gamma \vdash (A)_y^x$. Для этого достаточно показать, что в результате указанной замены c на y в D :

- (а) Новым корнем будет секвенция $\Gamma \vdash (A)_y^x$;
- (б) Аксиомы СИП преобразуются в аксиомы СИП;
- (в) Правила вывода СИП преобразуются в правила вывода СИП.

Пункт (а) очевиден, т.к. $(\Gamma)_y^c = \Gamma$ и $((A)_c^x)_y^c = (A)_y^x$.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Доказательство: Пусть D — дерево вывода секвенции $\Gamma \vdash (A)_c^x$. Поскольку D конечно, выберем переменную y , которая не встречается в D , не входит (ни связано, ни свободно) в A , и если в D встречается аксиома вида $u \approx v, (\Phi)_u^w \vdash (\Phi)_v^w$, то y отлична от w .

Пусть $(D)_y^c$ — дерево, полученное из D заменой всех вхождений символа c на переменную y . Покажем, что $(D)_y^c$ является деревом вывода секвенции $\Gamma \vdash (A)_y^x$. Для этого достаточно показать, что в результате указанной замены c на y в D :

- (а) Новым корнем будет секвенция $\Gamma \vdash (A)_y^x$;
- (б) Аксиомы СИП преобразуются в аксиомы СИП;
- (в) Правила вывода СИП преобразуются в правила вывода СИП.

Пункт (а) очевиден, т.к. $(\Gamma)_y^c = \Gamma$ и $((A)_c^x)_y^c = (A)_y^x$.

Пункт (б) для аксиом вида $\vdash u \approx u$ и $\Phi \vdash \Phi$ очевиден.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Доказательство: Пусть D — дерево вывода секвенции $\Gamma \vdash (A)_c^x$. Поскольку D конечно, выберем переменную y , которая не встречается в D , не входит (ни связано, ни свободно) в A , и если в D встречается аксиома вида $u \approx v, (\Phi)_u^w \vdash (\Phi)_v^w$, то y отлична от w .

Пусть $(D)_y^c$ — дерево, полученное из D заменой всех вхождений символа c на переменную y . Покажем, что $(D)_y^c$ является деревом вывода секвенции $\Gamma \vdash (A)_y^x$. Для этого достаточно показать, что в результате указанной замены c на y в D :

- (а) Новым корнем будет секвенция $\Gamma \vdash (A)_y^x$;
- (б) Аксиомы СИП преобразуются в аксиомы СИП;
- (в) Правила вывода СИП преобразуются в правила вывода СИП.

Пункт (а) очевиден, т.к. $(\Gamma)_y^c = \Gamma$ и $((A)_c^x)_y^c = (A)_y^x$.

Пункт (б) для аксиом вида $\vdash u \approx u$ и $\Phi \vdash \Phi$ очевиден. Рассмотрим аксиому вида

$$u \approx v, (\Phi)_u^w \vdash (\Phi)_v^w,$$

где подстановки $(\Phi)_u^w$ и $(\Phi)_v^w$ допустимы.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Эта аксиома преобразуется в секвенцию

$$u \approx v, ((\Phi)_u^w)_y^c \vdash ((\Phi)_v^w)_y^c.$$

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Эта аксиома преобразуется в секвенцию

$$u \approx v, ((\Phi)_u^w)_y^c \vdash ((\Phi)_v^w)_y^c.$$

Причём, поскольку $y \neq w$, заключаем, что

$$((\Phi)_u^w)_y^c = ((\Phi)_y^c)_u^w, \quad ((\Phi)_v^w)_y^c = ((\Phi)_y^c)_v^w.$$

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Эта аксиома преобразуется в секвенцию

$$u \approx v, ((\Phi)_u^w)_y^c \vdash ((\Phi)_v^w)_y^c.$$

Причём, поскольку $y \neq w$, заключаем, что

$$((\Phi)_u^w)_y^c = ((\Phi)_y^c)_u^w, \quad ((\Phi)_v^w)_y^c = ((\Phi)_y^c)_v^w.$$

Действительно, эти тождества можно проиллюстрировать графически:

$$\Phi = (\dots w \dots c \dots)$$

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Эта аксиома преобразуется в секвенцию

$$u \approx v, ((\Phi)_u^w)_y^c \vdash ((\Phi)_v^w)_y^c.$$

Причём, поскольку $y \neq w$, заключаем, что

$$((\Phi)_u^w)_y^c = ((\Phi)_y^c)_u^w, \quad ((\Phi)_v^w)_y^c = ((\Phi)_y^c)_v^w.$$

Действительно, эти тождества можно проиллюстрировать графически:

$$\begin{array}{c} \Phi = (\dots w \dots c \dots) \\ \quad \quad \quad \swarrow \\ (\Phi)_u^w = (\dots u \dots c \dots) \end{array}$$

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Эта аксиома преобразуется в секвенцию

$$u \approx v, ((\Phi)_u^w)_y^c \vdash ((\Phi)_v^w)_y^c.$$

Причём, поскольку $y \neq w$, заключаем, что

$$((\Phi)_u^w)_y^c = ((\Phi)_y^c)_u^w, \quad ((\Phi)_v^w)_y^c = ((\Phi)_y^c)_v^w.$$

Действительно, эти тождества можно проиллюстрировать графически:

$$\begin{array}{c} \Phi = (\dots w \dots c \dots) \\ \quad \swarrow \text{blue arrow} \\ (\Phi)_u^w = (\dots \textcolor{blue}{u} \dots c \dots) \\ \quad \searrow \text{red arrow} \\ ((\Phi)_u^w)_y^c = (\dots \textcolor{blue}{u} \dots \textcolor{red}{y} \dots) \end{array}$$

Техническая лемма об одном допустимом правиле

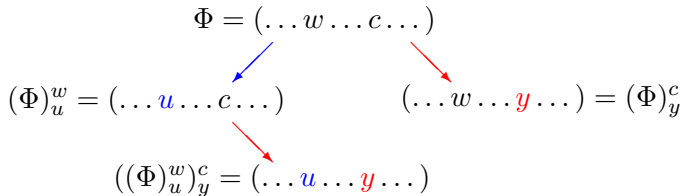
Эта аксиома преобразуется в секвенцию

$$u \approx v, ((\Phi)_u^w)_y^c \vdash ((\Phi)_v^w)_y^c.$$

Причём, поскольку $y \neq w$, заключаем, что

$$((\Phi)_u^w)_y^c = ((\Phi)_y^c)_u^w, \quad ((\Phi)_v^w)_y^c = ((\Phi)_y^c)_v^w.$$

Действительно, эти тождества можно проиллюстрировать графически:



Техническая лемма об одном допустимом правиле

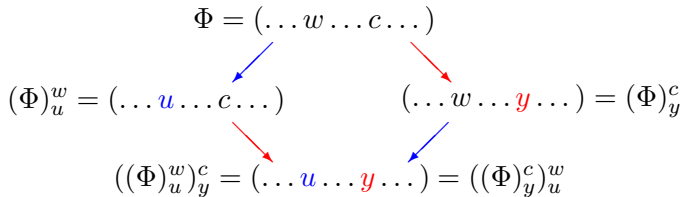
Эта аксиома преобразуется в секвенцию

$$u \approx v, ((\Phi)_u^w)_y^c \vdash ((\Phi)_v^w)_y^c.$$

Причём, поскольку $y \neq w$, заключаем, что

$$((\Phi)_u^w)_y^c = ((\Phi)_y^c)_u^w, \quad ((\Phi)_v^w)_y^c = ((\Phi)_y^c)_v^w.$$

Действительно, эти тождества можно проиллюстрировать графически:



Техническая лемма об одном допустимом правиле

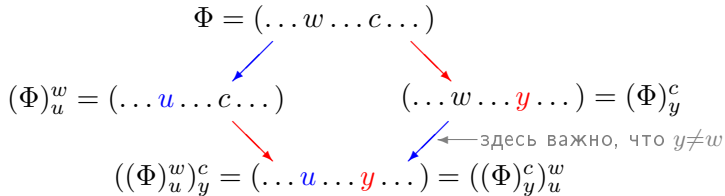
Эта аксиома преобразуется в секвенцию

$$u \approx v, ((\Phi)_u^w)_y^c \vdash ((\Phi)_v^w)_y^c.$$

Причём, поскольку $y \neq w$, заключаем, что

$$((\Phi)_u^w)_y^c = ((\Phi)_y^c)_u^w, \quad ((\Phi)_v^w)_y^c = ((\Phi)_y^c)_v^w.$$

Действительно, эти тождества можно проиллюстрировать графически:



Техническая лемма об одном допустимом правиле

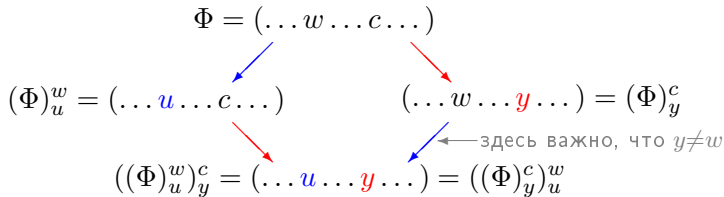
Эта аксиома преобразуется в секвенцию

$$u \approx v, ((\Phi)_u^w)_y^c \vdash ((\Phi)_v^w)_y^c.$$

Причём, поскольку $y \neq w$, заключаем, что

$$((\Phi)_u^w)_y^c = ((\Phi)_y^c)_u^w, \quad ((\Phi)_v^w)_y^c = ((\Phi)_y^c)_v^w.$$

Действительно, эти тождества можно проиллюстрировать графически:



(Ситуация как в группах подстановок: $(1, 2) \cdot (3, 4) = (3, 4) \cdot (1, 2)$, но $(1, 2) \cdot (1, 3) \neq (1, 3) \cdot (1, 2)$.)

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Докажем, что в формулах $((\Phi)_y^c)_u^w$ и $((\Phi)_y^c)_v^w$ внешние подстановки допустимы.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Докажем, что в формулах $((\Phi)_y^c)_u^w$ и $((\Phi)_y^c)_v^w$ внешние подстановки допустимы.

Допустим, напротив, внешняя подстановка, например, в $((\Phi)_y^c)_u^w$ не допустима.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Докажем, что в формулах $((\Phi)_y^c)_u^w$ и $((\Phi)_y^c)_v^w$ внешние подстановки допустимы.

Допустим, напротив, внешняя подстановка, например, в $((\Phi)_y^c)_u^w$ не допустима.
 $\implies$ Формула $(\Phi)_y^c$ содержит подформулу вида $\forall u\Psi$ или вида $\exists u\Psi$ такую, что $w \in \text{FV}(\Psi)$.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Докажем, что в формулах $((\Phi)_y^c)_u^w$ и $((\Phi)_y^c)_v^w$ внешние подстановки допустимы.

Допустим, напротив, внешняя подстановка, например, в $((\Phi)_y^c)_u^w$ не допустима.
 $\implies$ Формула $(\Phi)_y^c$ содержит подформулу вида $\forall u\Psi$ или вида $\exists u\Psi$ такую, что $w \in \text{FV}(\Psi)$. $\implies$ Формула $\Phi = ((\Phi)_y^c)_c^y$ содержит подформулу $\forall u(\Psi)_c^y$ или $\exists u(\Psi)_c^y$, и при этом, поскольку $y \neq w$, то по-прежнему имеет место $w \in \text{FV}((\Psi)_c^y)$.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Докажем, что в формулах $((\Phi)_y^c)_u^w$ и $((\Phi)_y^c)_v^w$ внешние подстановки допустимы.

Допустим, напротив, внешняя подстановка, например, в $((\Phi)_y^c)_u^w$ не допустима.
 $\implies$ Формула $(\Phi)_y^c$ содержит подформулу вида $\forall u\Psi$ или вида $\exists u\Psi$ такую, что $w \in FV(\Psi)$. $\implies$ Формула $\Phi = ((\Phi)_y^c)_c^y$ содержит подформулу $\forall u(\Psi)_c^y$ или $\exists u(\Psi)_c^y$, и при этом, поскольку $y \neq w$, то по-прежнему имеет место $w \in FV((\Psi)_c^y)$. $\implies$ Получили противоречие с допустимостью $(\Phi)_u^w$.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Докажем, что в формулах $((\Phi)_y^c)_u^w$ и $((\Phi)_y^c)_v^w$ внешние подстановки допустимы.

Допустим, напротив, внешняя подстановка, например, в $((\Phi)_y^c)_u^w$ не допустима.
 $\implies$ Формула $(\Phi)_y^c$ содержит подформулу вида $\forall u\Psi$ или вида $\exists u\Psi$ такую, что $w \in FV(\Psi)$. $\implies$ Формула $\Phi = ((\Phi)_y^c)_c^y$ содержит подформулу $\forall u(\Psi)_c^y$ или $\exists u(\Psi)_c^y$, и при этом, поскольку $y \neq w$, то по-прежнему имеет место $w \in FV((\Psi)_c^y)$. $\implies$ Получили противоречие с допустимостью $(\Phi)_u^w$.

Таким образом, секвенция

$$u \approx v, ((\Phi)_y^c)_u^w \vdash ((\Phi)_y^c)_v^w$$

действительно является аксиомой СИП.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Для доказательства пункта (в) нужно рассмотреть каждое из правил СИП. Мы разберём только два из них.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Для доказательства пункта (в) нужно рассмотреть каждое из правил СИП. Мы разберём только два из них. Допустим, например, переход в дереве D выполнен по правилу

$$\frac{\Gamma_0 \vdash \Phi}{\Gamma_0 \vdash \forall z \Phi}, \text{ где } z \notin \text{FV}(\Gamma_0).$$

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Для доказательства пункта (в) нужно рассмотреть каждое из правил СИП. Мы разберём только два из них. Допустим, например, переход в дереве D выполнен по правилу

$$\frac{\Gamma_0 \vdash \Phi}{\Gamma_0 \vdash \forall z \Phi}, \text{ где } z \notin \text{FV}(\Gamma_0).$$

После замены c на y этот переход преобразуется в

$$\frac{(\Gamma_0)_y^c \vdash (\Phi)_y^c}{(\Gamma_0)_y^c \vdash \forall z (\Phi)_y^c},$$

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Для доказательства пункта (в) нужно рассмотреть каждое из правил СИП. Мы разберём только два из них. Допустим, например, переход в дереве D выполнен по правилу

$$\frac{\Gamma_0 \vdash \Phi}{\Gamma_0 \vdash \forall z \Phi}, \text{ где } z \notin FV(\Gamma_0).$$

После замены c на y этот переход преобразуется в

$$\frac{(\Gamma_0)_y^c \vdash (\Phi)_y^c}{(\Gamma_0)_y^c \vdash \forall z (\Phi)_y^c},$$

причём, поскольку y не встречается в D , и значит, $y \neq z$, заключаем, что имеет место $z \notin FV((\Gamma_0)_y^c)$.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Для доказательства пункта (в) нужно рассмотреть каждое из правил СИП. Мы разберём только два из них. Допустим, например, переход в дереве D выполнен по правилу

$$\frac{\Gamma_0 \vdash \Phi}{\Gamma_0 \vdash \forall z \Phi}, \text{ где } z \notin FV(\Gamma_0).$$

После замены c на y этот переход преобразуется в

$$\frac{(\Gamma_0)_y^c \vdash (\Phi)_y^c}{(\Gamma_0)_y^c \vdash \forall z (\Phi)_y^c},$$

причём, поскольку y не встречается в D , и значит, $y \neq z$, заключаем, что имеет место $z \notin FV((\Gamma_0)_y^c)$. $\implies$ Указанный переход в $(D)_y^c$ действительно выполнен по правилу вывода.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Пусть теперь t — терм сигнатуры Σ , подстановка $(\Phi)_t^z$ допустима, и в дереве D есть переход, выполненный по правилу

$$\frac{\Gamma_0 \vdash (\Phi)_t^z}{\Gamma_0 \vdash \exists z \Phi}.$$

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Пусть теперь t — терм сигнатуры Σ , подстановка $(\Phi)_t^z$ допустима, и в дереве D есть переход, выполненный по правилу

$$\frac{\Gamma_0 \vdash (\Phi)_t^z}{\Gamma_0 \vdash \exists z \Phi}.$$

После замены c на y этот переход преобразуется в

$$\frac{(\Gamma_0)_y^c \vdash ((\Phi)_t^z)_y^c}{(\Gamma_0)_y^c \vdash \exists z (\Phi)_y^c}.$$

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Пусть теперь t — терм сигнатуры Σ , подстановка $(\Phi)_t^z$ допустима, и в дереве D есть переход, выполненный по правилу

$$\frac{\Gamma_0 \vdash (\Phi)_t^z}{\Gamma_0 \vdash \exists z \Phi}.$$

После замены c на y этот переход преобразуется в

$$\frac{(\Gamma_0)_y^c \vdash ((\Phi)_t^z)_y^c}{(\Gamma_0)_y^c \vdash \exists z (\Phi)_y^c}.$$

Заметим, что $((\Phi)_t^z)_y^c = ((\Phi)_y^c)_{t'}^z$, где $t' = (t)_y^c$.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Пусть теперь t — терм сигнатуры Σ , подстановка $(\Phi)_t^z$ допустима, и в дереве D есть переход, выполненный по правилу

$$\frac{\Gamma_0 \vdash (\Phi)_t^z}{\Gamma_0 \vdash \exists z \Phi}.$$

После замены c на y этот переход преобразуется в

$$\frac{(\Gamma_0)_y^c \vdash ((\Phi)_t^z)_y^c}{(\Gamma_0)_y^c \vdash \exists z (\Phi)_y^c}.$$

Заметим, что $((\Phi)_t^z)_y^c = ((\Phi)_y^c)_{t'}^z$, где $t' = (t)_y^c$. Докажем, что внешняя подстановка в формуле $((\Phi)_y^c)_{t'}^z$ допустима.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Пусть теперь t — терм сигнатуры Σ , подстановка $(\Phi)_t^z$ допустима, и в дереве D есть переход, выполненный по правилу

$$\frac{\Gamma_0 \vdash (\Phi)_t^z}{\Gamma_0 \vdash \exists z \Phi}.$$

После замены c на y этот переход преобразуется в

$$\frac{(\Gamma_0)_y^c \vdash ((\Phi)_t^z)_y^c}{(\Gamma_0)_y^c \vdash \exists z (\Phi)_y^c}.$$

Заметим, что $((\Phi)_t^z)_y^c = ((\Phi)_y^c)_{t'}^z$, где $t' = (t)_y^c$. Докажем, что внешняя подстановка в формуле $((\Phi)_y^c)_{t'}^z$ допустима. Если это не так, то формула $(\Phi)_y^c$ содержит подформулу вида $\forall u \Psi$ или $\exists u \Psi$ такую, что $z \in \text{FV}(\Psi)$ и $u \in \text{FV}(t')$.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Пусть теперь t — терм сигнатуры Σ , подстановка $(\Phi)_t^z$ допустима, и в дереве D есть переход, выполненный по правилу

$$\frac{\Gamma_0 \vdash (\Phi)_t^z}{\Gamma_0 \vdash \exists z \Phi}.$$

После замены c на y этот переход преобразуется в

$$\frac{(\Gamma_0)_y^c \vdash ((\Phi)_t^z)_y^c}{(\Gamma_0)_y^c \vdash \exists z (\Phi)_y^c}.$$

Заметим, что $((\Phi)_t^z)_y^c = ((\Phi)_y^c)_{t'}^z$, где $t' = (t)_y^c$. Докажем, что внешняя подстановка в формуле $((\Phi)_y^c)_{t'}^z$ допустима. Если это не так, то формула $(\Phi)_y^c$ содержит подформулу вида $\forall u \Psi$ или $\exists u \Psi$ такую, что $z \in \text{FV}(\Psi)$ и $u \in \text{FV}(t')$. $\implies$ Формула Φ содержит подформулу $\forall u (\Psi)_c^y$ или $\exists u (\Psi)_c^y$.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Пусть теперь t — терм сигнатуры Σ , подстановка $(\Phi)_t^z$ допустима, и в дереве D есть переход, выполненный по правилу

$$\frac{\Gamma_0 \vdash (\Phi)_t^z}{\Gamma_0 \vdash \exists z \Phi}.$$

После замены c на y этот переход преобразуется в

$$\frac{(\Gamma_0)_y^c \vdash ((\Phi)_t^z)_y^c}{(\Gamma_0)_y^c \vdash \exists z (\Phi)_y^c}.$$

Заметим, что $((\Phi)_t^z)_y^c = ((\Phi)_y^c)_{t'}^z$, где $t' = (t)_y^c$. Докажем, что внешняя подстановка в формуле $((\Phi)_y^c)_{t'}^z$ допустима. Если это не так, то формула $(\Phi)_y^c$ содержит подформулу вида $\forall u \Psi$ или $\exists u \Psi$ такую, что $z \in FV(\Psi)$ и $u \in FV(t')$. $\implies$ Формула Φ содержит подформулу $\forall u (\Psi)_c^y$ или $\exists u (\Psi)_c^y$. Поскольку y не встречается в D , заключаем, что $y \neq z$ и $y \neq u$.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Пусть теперь t — терм сигнатуры Σ , подстановка $(\Phi)_t^z$ допустима, и в дереве D есть переход, выполненный по правилу

$$\frac{\Gamma_0 \vdash (\Phi)_t^z}{\Gamma_0 \vdash \exists z \Phi}.$$

После замены c на y этот переход преобразуется в

$$\frac{(\Gamma_0)_y^c \vdash ((\Phi)_t^z)_y^c}{(\Gamma_0)_y^c \vdash \exists z (\Phi)_y^c}.$$

Заметим, что $((\Phi)_t^z)_y^c = ((\Phi)_y^c)_{t'}^z$, где $t' = (t)_y^c$. Докажем, что внешняя подстановка в формуле $((\Phi)_y^c)_{t'}^z$ допустима. Если это не так, то формула $(\Phi)_y^c$ содержит подформулу вида $\forall u \Psi$ или $\exists u \Psi$ такую, что $z \in \text{FV}(\Psi)$ и $u \in \text{FV}(t')$. $\implies$ Формула Φ содержит подформулу $\forall u (\Psi)_c^y$ или $\exists u (\Psi)_c^y$. Поскольку y не встречается в D , заключаем, что $y \neq z$ и $y \neq u$. $\implies$ Из условий $y \neq z$ и $z \in \text{FV}(\Psi)$ следует, что $z \in \text{FV}((\Psi)_c^y)$,

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Пусть теперь t — терм сигнатуры Σ , подстановка $(\Phi)_t^z$ допустима, и в дереве D есть переход, выполненный по правилу

$$\frac{\Gamma_0 \vdash (\Phi)_t^z}{\Gamma_0 \vdash \exists z \Phi}.$$

После замены c на y этот переход преобразуется в

$$\frac{(\Gamma_0)_y^c \vdash ((\Phi)_t^z)_y^c}{(\Gamma_0)_y^c \vdash \exists z (\Phi)_y^c}.$$

Заметим, что $((\Phi)_t^z)_y^c = ((\Phi)_y^c)_{t'}^z$, где $t' = (t)_y^c$. Докажем, что внешняя подстановка в формуле $((\Phi)_y^c)_{t'}^z$ допустима. Если это не так, то формула $(\Phi)_y^c$ содержит подформулу вида $\forall u \Psi$ или $\exists u \Psi$ такую, что $z \in \text{FV}(\Psi)$ и $u \in \text{FV}(t')$. $\implies$ Формула Φ содержит подформулу $\forall u (\Psi)_c^y$ или $\exists u (\Psi)_c^y$. Поскольку y не встречается в D , заключаем, что $y \neq z$ и $y \neq u$. $\implies$ Из условий $y \neq z$ и $z \in \text{FV}(\Psi)$ следует, что $z \in \text{FV}((\Psi)_c^y)$, а из условий $y \neq u$ и $u \in \text{FV}((t)_y^c)$ следует, что $u \in \text{FV}(t)$.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Пусть теперь t — терм сигнатуры Σ , подстановка $(\Phi)_t^z$ допустима, и в дереве D есть переход, выполненный по правилу

$$\frac{\Gamma_0 \vdash (\Phi)_t^z}{\Gamma_0 \vdash \exists z \Phi}.$$

После замены c на y этот переход преобразуется в

$$\frac{(\Gamma_0)_y^c \vdash ((\Phi)_t^z)_y^c}{(\Gamma_0)_y^c \vdash \exists z (\Phi)_y^c}.$$

Заметим, что $((\Phi)_t^z)_y^c = ((\Phi)_y^c)_{t'}^z$, где $t' = (t)_y^c$. Докажем, что внешняя подстановка в формуле $((\Phi)_y^c)_{t'}^z$ допустима. Если это не так, то формула $(\Phi)_y^c$ содержит подформулу вида $\forall u \Psi$ или $\exists u \Psi$ такую, что $z \in \text{FV}(\Psi)$ и $u \in \text{FV}(t')$. $\implies$ Формула Φ содержит подформулу $\forall u (\Psi)_c^y$ или $\exists u (\Psi)_c^y$. Поскольку y не встречается в D , заключаем, что $y \neq z$ и $y \neq u$. $\implies$ Из условий $y \neq z$ и $z \in \text{FV}(\Psi)$ следует, что $z \in \text{FV}((\Psi)_c^y)$, а из условий $y \neq u$ и $u \in \text{FV}((t)_y^c)$ следует, что $u \in \text{FV}(t)$. $\implies$ Получили противоречие с допустимостью подстановки $(\Phi)_t^z$.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Таким образом, указанный переход в дереве $(D)_y^c$ имеет вид

$$\frac{(\Gamma_0)_y^c \vdash ((\Phi)_y^c)^z_{t'}}{(\Gamma_0)_y^c \vdash \exists z(\Phi)_y^c}$$

и действительно выполнен по правилу вывода.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Таким образом, указанный переход в дереве $(D)_y^c$ имеет вид

$$\frac{(\Gamma_0)_y^c \vdash ((\Phi)_y^c)^z_{t'}}{(\Gamma_0)_y^c \vdash \exists z(\Phi)_y^c}$$

и действительно выполнен по правилу вывода.

Итак, дерево $(D)_y^c$ является деревом вывода секвенции $\Gamma \vdash (A)_y^x$.

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Таким образом, указанный переход в дереве $(D)_y^c$ имеет вид

$$\frac{(\Gamma_0)_y^c \vdash ((\Phi)_y^c)_t'^z}{(\Gamma_0)_y^c \vdash \exists z(\Phi)_y^c}$$

и действительно выполнен по правилу вывода.

Итак, дерево $(D)_y^c$ является деревом вывода секвенции $\Gamma \vdash (A)_y^x$. $\implies$ Используя основную эквивалентность $\forall y(A)_y^x \equiv \forall xA$, получаем дерево вывода для $\Gamma \vdash \forall xA$:

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Таким образом, указанный переход в дереве $(D)_y^c$ имеет вид

$$\frac{(\Gamma_0)_y^c \vdash ((\Phi)_y^c)_t^z}{(\Gamma_0)_y^c \vdash \exists z(\Phi)_y^c}$$

и действительно выполнен по правилу вывода.

Итак, дерево $(D)_y^c$ является деревом вывода секвенции $\Gamma \vdash (A)_y^x$. $\implies$ Используя основную эквивалентность $\forall y(A)_y^x \equiv \forall xA$, получаем дерево вывода для $\Gamma \vdash \forall xA$:

$$\frac{\frac{\Gamma \vdash (A)_y^x}{\Gamma \vdash \forall y(A)_y^x} \quad \frac{\forall y(A)_y^x \vdash \forall xA}{\vdash \forall y(A)_y^x \rightarrow \forall xA}}{\Gamma \vdash \forall xA}$$

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Таким образом, указанный переход в дереве $(D)_y^c$ имеет вид

$$\frac{(\Gamma_0)_y^c \vdash ((\Phi)_y^c)^z_{t'}}{(\Gamma_0)_y^c \vdash \exists z(\Phi)_y^c}$$

и действительно выполнен по правилу вывода.

Итак, дерево $(D)_y^c$ является деревом вывода секвенции $\Gamma \vdash (A)_y^x. \implies$ Используя основную эквивалентность $\forall y(A)_y^x \equiv \forall xA$, получаем дерево вывода для $\Gamma \vdash \forall xA$:

$$\begin{array}{c} y \notin \text{FV}(\Gamma), \text{т.к. } y \text{ не встречается в } D \longrightarrow \frac{\Gamma \vdash (A)_y^x}{\Gamma \vdash \forall y(A)_y^x; \quad \frac{\forall y(A)_y^x \vdash \forall xA}{\vdash \forall y(A)_y^x \rightarrow \forall xA}} \\ \hline \Gamma \vdash \forall xA \end{array}$$

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Таким образом, указанный переход в дереве $(D)_y^c$ имеет вид

$$\frac{(\Gamma_0)_y^c \vdash ((\Phi)_y^c)^z_{t'}}{(\Gamma_0)_y^c \vdash \exists z(\Phi)_y^c}$$

и действительно выполнен по правилу вывода.

Итак, дерево $(D)_y^c$ является деревом вывода секвенции $\Gamma \vdash (A)_y^x. \implies$ Используя основную эквивалентность $\forall y(A)_y^x \equiv \forall xA$, получаем дерево вывода для $\Gamma \vdash \forall xA$:

$$\begin{array}{c} y \notin \text{FV}(\Gamma), \text{т.к. } y \text{ не встречается в } D \longrightarrow \frac{\Gamma \vdash (A)_y^x}{\Gamma \vdash \forall y(A)_y^x; \quad \vdash \forall y(A)_y^x \rightarrow \forall xA} \\ \hline \Gamma \vdash \forall xA \end{array}$$

Лемма доказана. □

Техническая лемма об одном допустимом правиле

Таким образом, указанный переход в дереве $(D)_y^c$ имеет вид

$$\frac{(\Gamma_0)_y^c \vdash ((\Phi)_y^c)^z_{t'}}{(\Gamma_0)_y^c \vdash \exists z(\Phi)_y^c}$$

и действительно выполнен по правилу вывода.

Итак, дерево $(D)_y^c$ является деревом вывода секвенции $\Gamma \vdash (A)_y^x. \implies$ Используя основную эквивалентность $\forall y(A)_y^x \equiv \forall xA$, получаем дерево вывода для $\Gamma \vdash \forall xA$:

$$\begin{array}{c} y \notin \text{FV}(\Gamma), \text{ т.к. } y \text{ не встречается в } D \longrightarrow \frac{\Gamma \vdash (A)_y^x}{\Gamma \vdash \forall y(A)_y^x; \quad \frac{\forall y(A)_y^x \vdash \forall xA}{\vdash \forall y(A)_y^x \rightarrow \forall xA}} \\ \hline \Gamma \vdash \forall xA \end{array}$$

Лемма доказана. □

Замечание. Идея доказательства леммы 1: константный символ c ведёт себя как новая свободная переменная. $\implies$ Нужно заменить c на новую переменную y , навесить квантор $\forall y$ и затем сделать замену связанной переменной y на x .

Непротиворечивые множества формул и их свойства

Определение. Множество формул Γ сигнатуры Σ называется *противоречивым*, если существует конечное подмножество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ такое, что секвенция $\Gamma_0 \vdash$ выводима в СИП.

Непротиворечивые множества формул и их свойства

Определение. Множество формул Γ сигнатуры Σ называется *противоречивым*, если существует конечное подмножество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ такое, что секвенция $\Gamma_0 \vdash$ выводима в СИП. Множество формул Γ сигнатуры Σ называется *непротиворечивым*, если оно не является противоречивым.

Непротиворечивые множества формул и их свойства

Определение. Множество формул Γ сигнатуры Σ называется *противоречивым*, если существует конечное подмножество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ такое, что секвенция $\Gamma_0 \vdash$ выводима в СИП. Множество формул Γ сигнатуры Σ называется *непротиворечивым*, если оно не является противоречивым.

Замечание. Множество формул Γ сигнатуры Σ противоречиво тогда и только тогда, когда существуют конечное подмножество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ и формула Φ сигнатуры Σ такие, что в СИП выводимы секвенции $\Gamma_0 \vdash \Phi$ и $\Gamma_0 \vdash \neg\Phi$.

Непротиворечивые множества формул и их свойства

Определение. Множество формул Γ сигнатуры Σ называется *противоречивым*, если существует конечное подмножество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ такое, что секвенция $\Gamma_0 \vdash$ выводима в СИП. Множество формул Γ сигнатуры Σ называется *непротиворечивым*, если оно не является противоречивым.

Замечание. Множество формул Γ сигнатуры Σ противоречиво тогда и только тогда, когда существуют конечное подмножество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ и формула Φ сигнатуры Σ такие, что в СИП выводимы секвенции $\Gamma_0 \vdash \Phi$ и $\Gamma_0 \vdash \neg\Phi$.

Предложение 2. Для произвольных множества Γ формул сигнатуры Σ и формулы A сигнатуры Σ справедливы следующие утверждения:

Непротиворечивые множества формул и их свойства

Определение. Множество формул Γ сигнатуры Σ называется *противоречивым*, если существует конечное подмножество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ такое, что секвенция $\Gamma_0 \vdash$ выводима в СИП. Множество формул Γ сигнатуры Σ называется *непротиворечивым*, если оно не является противоречивым.

Замечание. Множество формул Γ сигнатуры Σ противоречиво тогда и только тогда, когда существуют конечное подмножество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ и формула Φ сигнатуры Σ такие, что в СИП выводимы секвенции $\Gamma_0 \vdash \Phi$ и $\Gamma_0 \vdash \neg\Phi$.

Предложение 2. Для произвольных множества Γ формул сигнатуры Σ и формулы A сигнатуры Σ справедливы следующие утверждения:

(1) Если Γ непротиворечиво, то $\Gamma \cup \{A\}$ или $\Gamma \cup \{\neg A\}$ непротиворечиво.

Непротиворечивые множества формул и их свойства

Определение. Множество формул Γ сигнатуры Σ называется *противоречивым*, если существует конечное подмножество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ такое, что секвенция $\Gamma_0 \vdash$ выводима в СИП. Множество формул Γ сигнатуры Σ называется *непротиворечивым*, если оно не является противоречивым.

Замечание. Множество формул Γ сигнатуры Σ противоречиво тогда и только тогда, когда существуют конечное подмножество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ и формула Φ сигнатуры Σ такие, что в СИП выводимы секвенции $\Gamma_0 \vdash \Phi$ и $\Gamma_0 \vdash \neg\Phi$.

Предложение 2. Для произвольных множества Γ формул сигнатуры Σ и формулы A сигнатуры Σ справедливы следующие утверждения:

- (1) Если Γ непротиворечиво, то $\Gamma \cup \{A\}$ или $\Gamma \cup \{\neg A\}$ непротиворечиво.
- (2) Если $\Gamma \cup \{\exists x A\}$ непротиворечиво, c — константный символ, не входящий в $\Gamma \cup \{A\}$, то $\Gamma \cup \{\exists x A, (A)_c^x\}$ непротиворечиво.

Непротиворечивые множества формул и их свойства

Определение. Множество формул Γ сигнатуры Σ называется *противоречивым*, если существует конечное подмножество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ такое, что секвенция $\Gamma_0 \vdash$ выводима в СИП. Множество формул Γ сигнатуры Σ называется *непротиворечивым*, если оно не является противоречивым.

Замечание. Множество формул Γ сигнатуры Σ противоречиво тогда и только тогда, когда существуют конечное подмножество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ и формула Φ сигнатуры Σ такие, что в СИП выводимы секвенции $\Gamma_0 \vdash \Phi$ и $\Gamma_0 \vdash \neg\Phi$.

Предложение 2. Для произвольных множества Γ формул сигнатуры Σ и формулы A сигнатуры Σ справедливы следующие утверждения:

- (1) Если Γ непротиворечиво, то $\Gamma \cup \{A\}$ или $\Gamma \cup \{\neg A\}$ непротиворечиво.
- (2) Если $\Gamma \cup \{\exists x A\}$ непротиворечиво, c — константный символ, не входящий в $\Gamma \cup \{A\}$, то $\Gamma \cup \{\exists x A, (A)_c^x\}$ непротиворечиво.
- (3) Если $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \dots \subseteq \Gamma_n \subseteq \dots$ — счётная неубывающая последовательность непротиворечивых множеств сигнатуры Σ , то $\bigcup_{n \in \omega} \Gamma_n$ непротиворечиво.

Свойства непротиворечивых множеств формул

Доказательство:

Свойства непротиворечивых множеств формул

Доказательство: (1) Допустим, $\Gamma \cup \{A\}$ и $\Gamma \cup \{\neg A\}$ противоречивы.

Свойства непротиворечивых множеств формул

Доказательство: (1) Допустим, $\Gamma \cup \{A\}$ и $\Gamma \cup \{\neg A\}$ противоречивы. $\implies$ Существуют конечные подмножества $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Gamma$ такие, что секвенции $\Gamma_1, A \vdash$ и $\Gamma_2, \neg A \vdash$ выводимы в СИП.

Свойства непротиворечивых множеств формул

Доказательство: (1) Допустим, $\Gamma \cup \{A\}$ и $\Gamma \cup \{\neg A\}$ противоречивы. $\implies$ Существуют конечные подмножества $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Gamma$ такие, что секвенции $\Gamma_1, A \vdash$ и $\Gamma_2, \neg A \vdash$ выводимы в СИП. $\implies$ Получаем дерево вывода:

Свойства непротиворечивых множеств формул

Доказательство: (1) Допустим, $\Gamma \cup \{A\}$ и $\Gamma \cup \{\neg A\}$ противоречивы. $\implies$ Существуют конечные подмножества $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Gamma$ такие, что секвенции $\Gamma_1, A \vdash$ и $\Gamma_2, \neg A \vdash$ выводимы в СИП. $\implies$ Получаем дерево вывода:

$$\frac{\frac{\Gamma_1, A \vdash}{\Gamma_1 \vdash \neg A} \quad \frac{\Gamma_2, \neg A \vdash}{\Gamma_2 \vdash \neg \neg A}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash}$$

Свойства непротиворечивых множеств формул

Доказательство: (1) Допустим, $\Gamma \cup \{A\}$ и $\Gamma \cup \{\neg A\}$ противоречивы. $\implies$ Существуют конечные подмножества $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Gamma$ такие, что секвенции $\Gamma_1, A \vdash$ и $\Gamma_2, \neg A \vdash$ выводимы в СИП. $\implies$ Получаем дерево вывода:

$$\frac{\frac{\Gamma_1, A \vdash}{\Gamma_1 \vdash \neg A}; \quad \frac{\Gamma_2, \neg A \vdash}{\Gamma_2 \vdash \neg \neg A}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash}$$

$\implies$ Поскольку $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subseteq \Gamma$, заключаем, что Γ противоречиво.

Свойства непротиворечивых множеств формул

Доказательство: (1) Допустим, $\Gamma \cup \{A\}$ и $\Gamma \cup \{\neg A\}$ противоречивы. $\implies$ Существуют конечные подмножества $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Gamma$ такие, что секвенции $\Gamma_1, A \vdash$ и $\Gamma_2, \neg A \vdash$ выводимы в СИП. $\implies$ Получаем дерево вывода:

$$\frac{\frac{\Gamma_1, A \vdash}{\Gamma_1 \vdash \neg A}; \quad \frac{\Gamma_2, \neg A \vdash}{\Gamma_2 \vdash \neg \neg A}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash}$$

$\implies$ Поскольку $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subseteq \Gamma$, заключаем, что Γ противоречиво.

(2) Допустим, $\Gamma \cup \{\exists x A, (A)_c^x\}$ противоречиво.

Свойства непротиворечивых множеств формул

Доказательство: (1) Допустим, $\Gamma \cup \{A\}$ и $\Gamma \cup \{\neg A\}$ противоречивы. $\implies$ Существуют конечные подмножества $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Gamma$ такие, что секвенции $\Gamma_1, A \vdash$ и $\Gamma_2, \neg A \vdash$ выводимы в СИП. $\implies$ Получаем дерево вывода:

$$\frac{\frac{\Gamma_1, A \vdash}{\Gamma_1 \vdash \neg A}; \quad \frac{\Gamma_2, \neg A \vdash}{\Gamma_2 \vdash \neg \neg A}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash}$$

$\implies$ Поскольку $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subseteq \Gamma$, заключаем, что Γ противоречиво.

(2) Допустим, $\Gamma \cup \{\exists x A, (A)_c^x\}$ противоречиво. $\implies$ Существует конечное $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ такое, что секвенция $\Gamma_0, \exists x A, (A)_c^x \vdash$ выводима в СИП.

Свойства непротиворечивых множеств формул

Доказательство: (1) Допустим, $\Gamma \cup \{A\}$ и $\Gamma \cup \{\neg A\}$ противоречивы. $\implies$ Существуют конечные подмножества $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Gamma$ такие, что секвенции $\Gamma_1, A \vdash$ и $\Gamma_2, \neg A \vdash$ выводимы в СИП. $\implies$ Получаем дерево вывода:

$$\frac{\frac{\Gamma_1, A \vdash}{\Gamma_1 \vdash \neg A}; \quad \frac{\Gamma_2, \neg A \vdash}{\Gamma_2 \vdash \neg \neg A}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash}$$

$\implies$ Поскольку $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subseteq \Gamma$, заключаем, что Γ противоречиво.

(2) Допустим, $\Gamma \cup \{\exists x A, (A)_c^x\}$ противоречиво. $\implies$ Существует конечное $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ такое, что секвенция $\Gamma_0, \exists x A, (A)_c^x \vdash$ выводима в СИП. $\Rightarrow$ Получаем вывод в СИП:

Свойства непротиворечивых множеств формул

Доказательство: (1) Допустим, $\Gamma \cup \{A\}$ и $\Gamma \cup \{\neg A\}$ противоречивы. $\Rightarrow$ Существуют конечные подмножества $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Gamma$ такие, что секвенции $\Gamma_1, A \vdash$ и $\Gamma_2, \neg A \vdash$ выводимы в СИП. $\Rightarrow$ Получаем дерево вывода:

$$\frac{\frac{\Gamma_1, A \vdash}{\Gamma_1 \vdash \neg A}; \quad \frac{\Gamma_2, \neg A \vdash}{\Gamma_2 \vdash \neg \neg A}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash}$$

$\Rightarrow$ Поскольку $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subseteq \Gamma$, заключаем, что Γ противоречиво.

(2) Допустим, $\Gamma \cup \{\exists x A, (A)_c^x\}$ противоречиво. $\Rightarrow$ Существует конечное $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ такое, что секвенция $\Gamma_0, \exists x A, (A)_c^x \vdash$ выводима в СИП. $\Rightarrow$ Получаем вывод в СИП:

$$\frac{\frac{\exists x A \vdash \exists x A}{\Gamma_0, \exists x A \vdash \exists x A}; \quad \frac{\frac{\text{ОСНОВНАЯ ЭКВИВ-СТЬ} \rightarrow \forall x \neg A \vdash \neg \exists x A}{\vdash \forall x \neg A \rightarrow \neg \exists x A}; \quad \frac{\frac{\Gamma_0, \exists x A, (A)_c^x \vdash}{\Gamma_0, \exists x A \vdash \neg (A)_c^x}}{\Gamma_0, \exists x A \vdash \forall x \neg A} \leftarrow \text{Лемма 1}}{\Gamma_0, \exists x A \vdash}$$

Свойства непротиворечивых множеств формул

$\implies$ Множество $\Gamma \cup \{\exists x A\}$ противоречиво, что невозможно.

Свойства непротиворечивых множеств формул

$\implies$ Множество $\Gamma \cup \{\exists x A\}$ противоречиво, что невозможно.

(3) Допустим, $\bigcup_{n \in \omega} \Gamma_n$ противоречиво.

Свойства непротиворечивых множеств формул

$\implies$ Множество $\Gamma \cup \{\exists x A\}$ противоречиво, что невозможно.

(3) Допустим, $\bigcup_{n \in \omega} \Gamma_n$ противоречиво. $\implies$ Существует конечный набор формул $\Phi_1, \dots, \Phi_k \in \bigcup_{n \in \omega} \Gamma_n$ таких, что секвенция $\Phi_1, \dots, \Phi_k \vdash$ выводима в СИП.

Свойства непротиворечивых множеств формул

$\implies$ Множество $\Gamma \cup \{\exists x A\}$ противоречиво, что невозможно.

(3) Допустим, $\bigcup_{n \in \omega} \Gamma_n$ противоречиво. $\implies$ Существует конечный набор формул $\Phi_1, \dots, \Phi_k \in \bigcup_{n \in \omega} \Gamma_n$ таких, что секвенция $\Phi_1, \dots, \Phi_k \vdash$ выводима в СИП. $\implies$ Найдутся индексы $n_1, \dots, n_k \in \omega$ такие, что $\Phi_1 \in \Gamma_{n_1}, \dots, \Phi_k \in \Gamma_{n_k}$.

Свойства непротиворечивых множеств формул

$\implies$ Множество $\Gamma \cup \{\exists x A\}$ противоречиво, что невозможно.

(3) Допустим, $\bigcup_{n \in \omega} \Gamma_n$ противоречиво. $\implies$ Существует конечный набор формул $\Phi_1, \dots, \Phi_k \in \bigcup_{n \in \omega} \Gamma_n$ таких, что секвенция $\Phi_1, \dots, \Phi_k \vdash$ выводима в СИП. $\implies$ Найдутся индексы $n_1, \dots, n_k \in \omega$ такие, что $\Phi_1 \in \Gamma_{n_1}, \dots, \Phi_k \in \Gamma_{n_k}$. Положим $m = \max\{n_1, \dots, n_k\}$.

Свойства непротиворечивых множеств формул

$\implies$ Множество $\Gamma \cup \{\exists x A\}$ противоречиво, что невозможно.

(3) Допустим, $\bigcup_{n \in \omega} \Gamma_n$ противоречиво. $\implies$ Существует конечный набор формул $\Phi_1, \dots, \Phi_k \in \bigcup_{n \in \omega} \Gamma_n$ таких, что секвенция $\Phi_1, \dots, \Phi_k \vdash$ выводима в СИП. $\implies$ Найдутся индексы $n_1, \dots, n_k \in \omega$ такие, что $\Phi_1 \in \Gamma_{n_1}, \dots, \Phi_k \in \Gamma_{n_k}$. Положим $m = \max\{n_1, \dots, n_k\}$. $\implies$ В силу монотонности последовательности $\{\Gamma_n\}_{n \in \omega}$, заключаем, что $\Phi_1, \dots, \Phi_k \in \Gamma_m$.

Свойства непротиворечивых множеств формул

$\implies$ Множество $\Gamma \cup \{\exists x A\}$ противоречиво, что невозможно.

(3) Допустим, $\bigcup_{n \in \omega} \Gamma_n$ противоречиво. $\implies$ Существует конечный набор формул

$\Phi_1, \dots, \Phi_k \in \bigcup_{n \in \omega} \Gamma_n$ таких, что секвенция $\Phi_1, \dots, \Phi_k \vdash$ выводима в СИП. $\implies$

Найдутся индексы $n_1, \dots, n_k \in \omega$ такие, что $\Phi_1 \in \Gamma_{n_1}, \dots, \Phi_k \in \Gamma_{n_k}$. Положим $m = \max\{n_1, \dots, n_k\}$. $\implies$ В силу монотонности последовательности $\{\Gamma_n\}_{n \in \omega}$, заключаем, что $\Phi_1, \dots, \Phi_k \in \Gamma_m$. $\implies$ Множество Γ_m противоречиво, что невозможно. □

Свойства непротиворечивых множеств формул

$\Rightarrow$ Множество $\Gamma \cup \{\exists x A\}$ противоречиво, что невозможно.

(3) Допустим, $\bigcup_{n \in \omega} \Gamma_n$ противоречиво. $\Rightarrow$ Существует конечный набор формул

$\Phi_1, \dots, \Phi_k \in \bigcup_{n \in \omega} \Gamma_n$ таких, что секвенция $\Phi_1, \dots, \Phi_k \vdash$ выводима в СИП. $\Rightarrow$

Найдутся индексы $n_1, \dots, n_k \in \omega$ такие, что $\Phi_1 \in \Gamma_{n_1}, \dots, \Phi_k \in \Gamma_{n_k}$. Положим $m = \max\{n_1, \dots, n_k\}$. $\Rightarrow$ В силу монотонности последовательности $\{\Gamma_n\}_{n \in \omega}$, заключаем, что $\Phi_1, \dots, \Phi_k \in \Gamma_m$. $\Rightarrow$ Множество Γ_m противоречиво, что невозможно. $\square$

Определение. Непротиворечивое множество T предложений сигнатуры Σ называется *(элементарной) теорией*, если T дедуктивно замкнуто, т.е. для любых предложений $\Phi_1, \dots, \Phi_n, \Psi$ сигнатуры Σ , если $\Phi_1, \dots, \Phi_n \in T$ и секвенция $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Psi$ выводима в СИП, то $\Psi \in T$.

Свойства непротиворечивых множеств формул

$\Rightarrow$ Множество $\Gamma \cup \{\exists x A\}$ противоречиво, что невозможно.

(3) Допустим, $\bigcup_{n \in \omega} \Gamma_n$ противоречиво. $\Rightarrow$ Существует конечный набор формул

$\Phi_1, \dots, \Phi_k \in \bigcup_{n \in \omega} \Gamma_n$ таких, что секвенция $\Phi_1, \dots, \Phi_k \vdash$ выводима в СИП. $\Rightarrow$

Найдутся индексы $n_1, \dots, n_k \in \omega$ такие, что $\Phi_1 \in \Gamma_{n_1}, \dots, \Phi_k \in \Gamma_{n_k}$. Положим $m = \max\{n_1, \dots, n_k\}$. $\Rightarrow$ В силу монотонности последовательности $\{\Gamma_n\}_{n \in \omega}$, заключаем, что $\Phi_1, \dots, \Phi_k \in \Gamma_m$. $\Rightarrow$ Множество Γ_m противоречиво, что невозможно. $\square$

Определение. Непротиворечивое множество T предложений сигнатуры Σ называется *(элементарной) теорией*, если T дедуктивно замкнуто, т.е. для любых предложений $\Phi_1, \dots, \Phi_n, \Psi$ сигнатуры Σ , если $\Phi_1, \dots, \Phi_n \in T$ и секвенция $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Psi$ выводима в СИП, то $\Psi \in T$.

Определение. Теория T сигнатуры Σ называется *полной*, если для любого предложения Φ сигнатуры Σ имеет место $\Phi \in T$ или $\neg \Phi \in T$.

Теория Хенкина. Теорема о существовании теории Хенкина.

Определение. Полная непротиворечивая теория T сигнатуры Σ называется *теорией Хенкина*, если выполняется следующее *условие Хенкина*: если предложение $\exists x\Phi \in T$, то существует константный символ $c \in \Sigma$ такой, что $(\Phi)_c^x \in T$.

Теория Хенкина. Теорема о существовании теории Хенкина.

Определение. Полная непротиворечивая теория T сигнатуры Σ называется *теорией Хенкина*, если выполняется следующее *условие Хенкина*: если предложение $\exists x\Phi \in T$, то существует константный символ $c \in \Sigma$ такой, что $(\Phi)_c^x \in T$.

Теорема 3 (Хенкин). Для любого непротиворечивого множества Γ предложений не более чем счётной сигнатуры Σ существует теория Хенкина T некоторой сигнатуры $\Sigma' \supseteq \Sigma$ такая, что $\Gamma \subseteq T$.

Теория Хенкина. Теорема о существовании теории Хенкина.

Определение. Полная непротиворечивая теория T сигнатуры Σ называется *теорией Хенкина*, если выполняется следующее *условие Хенкина*: если предложение $\exists x\Phi \in T$, то существует константный символ $c \in \Sigma$ такой, что $(\Phi)_c^x \in T$.

Теорема 3 (Хенкин). Для любого непротиворечивого множества Γ предложений не более чем счётной сигнатуры Σ существует теория Хенкина T некоторой сигнатуры $\Sigma' \supseteq \Sigma$ такая, что $\Gamma \subseteq T$.

Доказательство: Определим сигнатуру $\Sigma' = \Sigma \cup \{c_i\}_{i \in \omega}$, где c_i — константный символ и $c_i \notin \Sigma$ для всех $i \in \omega$.

Теория Хенкина. Теорема о существовании теории Хенкина.

Определение. Полная непротиворечивая теория T сигнатуры Σ называется *теорией Хенкина*, если выполняется следующее *условие Хенкина*: если предложение $\exists x\Phi \in T$, то существует константный символ $c \in \Sigma$ такой, что $(\Phi)_c^x \in T$.

Теорема 3 (Хенкин). Для любого непротиворечивого множества Γ предложений не более чем счётной сигнатуры Σ существует теория Хенкина T некоторой сигнатуры $\Sigma' \supseteq \Sigma$ такая, что $\Gamma \subseteq T$.

Доказательство: Определим сигнатуру $\Sigma' = \Sigma \cup \{c_i\}_{i \in \omega}$, где c_i — константный символ и $c_i \notin \Sigma$ для всех $i \in \omega$. Поскольку $\|\Sigma\| \leq \omega$, то сигнатура Σ' счётна.

Теория Хенкина. Теорема о существовании теории Хенкина.

Определение. Полная непротиворечивая теория T сигнатуры Σ называется *теорией Хенкина*, если выполняется следующее *условие Хенкина*: если предложение $\exists x\Phi \in T$, то существует константный символ $c \in \Sigma$ такой, что $(\Phi)_c^x \in T$.

Теорема 3 (Хенкин). Для любого непротиворечивого множества Γ предложений не более чем счётной сигнатуры Σ существует теория Хенкина T некоторой сигнатуры $\Sigma' \supseteq \Sigma$ такая, что $\Gamma \subseteq T$.

Доказательство: Определим сигнатуру $\Sigma' = \Sigma \cup \{c_i\}_{i \in \omega}$, где c_i — константный символ и $c_i \notin \Sigma$ для всех $i \in \omega$. Поскольку $\|\Sigma\| \leq \omega$, то сигнатура Σ' счётна. $\implies$ Множество всех предложений сигнатуры Σ' счётно.

Теория Хенкина. Теорема о существовании теории Хенкина.

Определение. Полная непротиворечивая теория T сигнатуры Σ называется *теорией Хенкина*, если выполняется следующее *условие Хенкина*: если предложение $\exists x\Phi \in T$, то существует константный символ $c \in \Sigma$ такой, что $(\Phi)_c^x \in T$.

Теорема 3 (Хенкин). Для любого непротиворечивого множества Γ предложений не более чем счётной сигнатуры Σ существует теория Хенкина T некоторой сигнатуры $\Sigma' \supseteq \Sigma$ такая, что $\Gamma \subseteq T$.

Доказательство: Определим сигнатуру $\Sigma' = \Sigma \cup \{c_i\}_{i \in \omega}$, где c_i — константный символ и $c_i \notin \Sigma$ для всех $i \in \omega$. Поскольку $\|\Sigma\| \leq \omega$, то сигнатура Σ' счётна. $\implies$ Множество всех предложений сигнатуры Σ' счётно. $\implies$ Множество всех предложений сигнатуры Σ' можно занумеровать без повторений в виде последовательности $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots\}$.

Теория Хенкина. Теорема о существовании теории Хенкина.

Определение. Полная непротиворечивая теория T сигнатуры Σ называется *теорией Хенкина*, если выполняется следующее *условие Хенкина*: если предложение $\exists x\Phi \in T$, то существует константный символ $c \in \Sigma$ такой, что $(\Phi)_c^x \in T$.

Теорема 3 (Хенкин). Для любого непротиворечивого множества Γ предложений не более чем счётной сигнатуры Σ существует теория Хенкина T некоторой сигнатуры $\Sigma' \supseteq \Sigma$ такая, что $\Gamma \subseteq T$.

Доказательство: Определим сигнатуру $\Sigma' = \Sigma \cup \{c_i\}_{i \in \omega}$, где c_i — константный символ и $c_i \notin \Sigma$ для всех $i \in \omega$. Поскольку $\|\Sigma\| \leq \omega$, то сигнатура Σ' счётна. $\implies$ Множество всех предложений сигнатуры Σ' счётно. $\implies$ Множество всех предложений сигнатуры Σ' можно занумеровать без повторений в виде последовательности $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots\}$.

Определим по индукции счётную последовательность множеств

$$T_0 \subseteq T_1 \subseteq \dots \subseteq T_n \subseteq \dots$$

предложений сигнатуры Σ' , удовлетворяющую для всех n следующим условиям:

Теорема о существовании теории Хенкина

$$(1) \ T_n \subseteq T_{n+1};$$

Теорема о существовании теории Хенкина

- (1) $T_n \subseteq T_{n+1}$;
- (2) T_n непротиворечиво;

Теорема о существовании теории Хенкина

- (1) $T_n \subseteq T_{n+1}$;
- (2) T_n непротиворечиво;
- (3) $\varphi_n \in T_{n+1}$ или $\neg\varphi_n \in T_{n+1}$;

Теорема о существовании теории Хенкина

- (1) $T_n \subseteq T_{n+1}$;
- (2) T_n непротиворечиво;
- (3) $\varphi_n \in T_{n+1}$ или $\neg\varphi_n \in T_{n+1}$;
- (4) если $\varphi_n \in T_{n+1}$ и $\varphi_n = \exists x\varphi$, то найдётся $c_k \in \{c_i\}_{i \in \omega}$ такой, что $(\varphi)_{c_k}^x \in T_{n+1}$;

Теорема о существовании теории Хенкина

- (1) $T_n \subseteq T_{n+1}$;
- (2) T_n непротиворечиво;
- (3) $\varphi_n \in T_{n+1}$ или $\neg\varphi_n \in T_{n+1}$;
- (4) если $\varphi_n \in T_{n+1}$ и $\varphi_n = \exists x\varphi$, то найдётся $c_k \in \{c_i\}_{i \in \omega}$ такой, что $(\varphi)_{c_k}^x \in T_{n+1}$;
- (5) T_n содержит только конечное число константных символов из $\{c_i\}_{i \in \omega}$.

Теорема о существовании теории Хенкина

- (1) $T_n \subseteq T_{n+1}$;
- (2) T_n непротиворечиво;
- (3) $\varphi_n \in T_{n+1}$ или $\neg\varphi_n \in T_{n+1}$;
- (4) если $\varphi_n \in T_{n+1}$ и $\varphi_n = \exists x\varphi$, то найдётся $c_k \in \{c_i\}_{i \in \omega}$ такой, что $(\varphi)_{c_k}^x \in T_{n+1}$;
- (5) T_n содержит только конечное число константных символов из $\{c_i\}_{i \in \omega}$.

Шаг 0. Положим $T_0 = \Gamma$.

Теорема о существовании теории Хенкина

- (1) $T_n \subseteq T_{n+1}$;
- (2) T_n непротиворечиво;
- (3) $\varphi_n \in T_{n+1}$ или $\neg\varphi_n \in T_{n+1}$;
- (4) если $\varphi_n \in T_{n+1}$ и $\varphi_n = \exists x\varphi$, то найдётся $c_k \in \{c_i\}_{i \in \omega}$ такой, что $(\varphi)_{c_k}^x \in T_{n+1}$;
- (5) T_n содержит только конечное число константных символов из $\{c_i\}_{i \in \omega}$.

Шаг 0. Положим $T_0 = \Gamma$. Очевидно, T_0 удовлетворяет условиям (2) и (5).

Теорема о существовании теории Хенкина

- (1) $T_n \subseteq T_{n+1}$;
- (2) T_n непротиворечиво;
- (3) $\varphi_n \in T_{n+1}$ или $\neg\varphi_n \in T_{n+1}$;
- (4) если $\varphi_n \in T_{n+1}$ и $\varphi_n = \exists x\varphi$, то найдётся $c_k \in \{c_i\}_{i \in \omega}$ такой, что $(\varphi)_{c_k}^x \in T_{n+1}$;
- (5) T_n содержит только конечное число константных символов из $\{c_i\}_{i \in \omega}$.

Шаг 0. Положим $T_0 = \Gamma$. Очевидно, T_0 удовлетворяет условиям (2) и (5).

Шаг $n+1$. Пусть T_n уже определено и удовлетворяет условиям (2) и (5).

Теорема о существовании теории Хенкина

- (1) $T_n \subseteq T_{n+1}$;
- (2) T_n непротиворечиво;
- (3) $\varphi_n \in T_{n+1}$ или $\neg\varphi_n \in T_{n+1}$;
- (4) если $\varphi_n \in T_{n+1}$ и $\varphi_n = \exists x\varphi$, то найдётся $c_k \in \{c_i\}_{i \in \omega}$ такой, что $(\varphi)_{c_k}^x \in T_{n+1}$;
- (5) T_n содержит только конечное число константных символов из $\{c_i\}_{i \in \omega}$.

Шаг 0. Положим $T_0 = \Gamma$. Очевидно, T_0 удовлетворяет условиям (2) и (5).

Шаг $n+1$. Пусть T_n уже определено и удовлетворяет условиям (2) и (5).

Рассмотрим случаи:

Теорема о существовании теории Хенкина

- (1) $T_n \subseteq T_{n+1}$;
- (2) T_n непротиворечиво;
- (3) $\varphi_n \in T_{n+1}$ или $\neg\varphi_n \in T_{n+1}$;
- (4) если $\varphi_n \in T_{n+1}$ и $\varphi_n = \exists x\varphi$, то найдётся $c_k \in \{c_i\}_{i \in \omega}$ такой, что $(\varphi)_{c_k}^x \in T_{n+1}$;
- (5) T_n содержит только конечное число константных символов из $\{c_i\}_{i \in \omega}$.

Шаг 0. Положим $T_0 = \Gamma$. Очевидно, T_0 удовлетворяет условиям (2) и (5).

Шаг $n+1$. Пусть T_n уже определено и удовлетворяет условиям (2) и (5).

Рассмотрим случаи:

Случай 1: Если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ противоречиво, положим $T_{n+1} = T_n \cup \{\neg\varphi_n\}$.

Теорема о существовании теории Хенкина

- (1) $T_n \subseteq T_{n+1}$;
- (2) T_n непротиворечиво;
- (3) $\varphi_n \in T_{n+1}$ или $\neg\varphi_n \in T_{n+1}$;
- (4) если $\varphi_n \in T_{n+1}$ и $\varphi_n = \exists x\varphi$, то найдётся $c_k \in \{c_i\}_{i \in \omega}$ такой, что $(\varphi)_{c_k}^x \in T_{n+1}$;
- (5) T_n содержит только конечное число константных символов из $\{c_i\}_{i \in \omega}$.

Шаг 0. Положим $T_0 = \Gamma$. Очевидно, T_0 удовлетворяет условиям (2) и (5).

Шаг $n+1$. Пусть T_n уже определено и удовлетворяет условиям (2) и (5).

Рассмотрим случаи:

Случай 1: Если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ противоречиво, положим $T_{n+1} = T_n \cup \{\neg\varphi_n\}$. Тогда для T_{n+1} очевидно справедливы условия (1), (3)–(5).

Теорема о существовании теории Хенкина

- (1) $T_n \subseteq T_{n+1}$;
- (2) T_n непротиворечиво;
- (3) $\varphi_n \in T_{n+1}$ или $\neg\varphi_n \in T_{n+1}$;
- (4) если $\varphi_n \in T_{n+1}$ и $\varphi_n = \exists x\varphi$, то найдётся $c_k \in \{c_i\}_{i \in \omega}$ такой, что $(\varphi)_{c_k}^x \in T_{n+1}$;
- (5) T_n содержит только конечное число константных символов из $\{c_i\}_{i \in \omega}$.

Шаг 0. Положим $T_0 = \Gamma$. Очевидно, T_0 удовлетворяет условиям (2) и (5).

Шаг $n+1$. Пусть T_n уже определено и удовлетворяет условиям (2) и (5).

Рассмотрим случаи:

Случай 1: Если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ противоречиво, положим $T_{n+1} = T_n \cup \{\neg\varphi_n\}$. Тогда для T_{n+1} очевидно справедливы условия (1), (3)–(5). А из непротиворечивости T_n и Предложения 2 (1) следует, что для T_{n+1} справедливо условие (2).

Теорема о существовании теории Хенкина

- (1) $T_n \subseteq T_{n+1}$;
- (2) T_n непротиворечиво;
- (3) $\varphi_n \in T_{n+1}$ или $\neg\varphi_n \in T_{n+1}$;
- (4) если $\varphi_n \in T_{n+1}$ и $\varphi_n = \exists x\varphi$, то найдётся $c_k \in \{c_i\}_{i \in \omega}$ такой, что $(\varphi)_{c_k}^x \in T_{n+1}$;
- (5) T_n содержит только конечное число константных символов из $\{c_i\}_{i \in \omega}$.

Шаг 0. Положим $T_0 = \Gamma$. Очевидно, T_0 удовлетворяет условиям (2) и (5).

Шаг $n+1$. Пусть T_n уже определено и удовлетворяет условиям (2) и (5).

Рассмотрим случаи:

Случай 1: Если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ противоречиво, положим $T_{n+1} = T_n \cup \{\neg\varphi_n\}$. Тогда для T_{n+1} очевидно справедливы условия (1), (3)–(5). А из непротиворечивости T_n и Предложения 2 (1) следует, что для T_{n+1} справедливо условие (2).

Случай 2: Если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ непротиворечиво и φ_n не имеет вид $\exists x\varphi$, положим $T_{n+1} = T_n \cup \{\varphi_n\}$.

Теорема о существовании теории Хенкина

- (1) $T_n \subseteq T_{n+1}$;
- (2) T_n непротиворечиво;
- (3) $\varphi_n \in T_{n+1}$ или $\neg\varphi_n \in T_{n+1}$;
- (4) если $\varphi_n \in T_{n+1}$ и $\varphi_n = \exists x\varphi$, то найдётся $c_k \in \{c_i\}_{i \in \omega}$ такой, что $(\varphi)_{c_k}^x \in T_{n+1}$;
- (5) T_n содержит только конечное число константных символов из $\{c_i\}_{i \in \omega}$.

Шаг 0. Положим $T_0 = \Gamma$. Очевидно, T_0 удовлетворяет условиям (2) и (5).

Шаг $n+1$. Пусть T_n уже определено и удовлетворяет условиям (2) и (5).

Рассмотрим случаи:

Случай 1: Если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ противоречиво, положим $T_{n+1} = T_n \cup \{\neg\varphi_n\}$. Тогда для T_{n+1} очевидно справедливы условия (1), (3)–(5). А из непротиворечивости T_n и Предложения 2 (1) следует, что для T_{n+1} справедливо условие (2).

Случай 2: Если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ непротиворечиво и φ_n не имеет вид $\exists x\varphi$, положим $T_{n+1} = T_n \cup \{\varphi_n\}$. Тогда для T_{n+1} очевидно справедливы условия (1)–(5).

Теорема о существовании теории Хенкина

Случай 3: Если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ непротиворечиво и $\varphi_n = \exists x\varphi$, то найдем наименьшее $k \in \omega$ такое, что c_k не входит в $T_n \cup \{\varphi_n\}$,

Теорема о существовании теории Хенкина

Случай 3: Если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ непротиворечиво и $\varphi_n = \exists x\varphi$, то найдем наименьшее $k \in \omega$ такое, что c_k не входит в $T_n \cup \{\varphi_n\}$, — такой c_k найдётся, поскольку T_n удовлетворяет условию (5).

Теорема о существовании теории Хенкина

Случай 3: Если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ непротиворечиво и $\varphi_n = \exists x\varphi$, то найдем наименьшее $k \in \omega$ такое, что c_k не входит в $T_n \cup \{\varphi_n\}$, — такой c_k найдётся, поскольку T_n удовлетворяет условию (5). Положим $T_{n+1} = T_n \cup \{\varphi_n, (\varphi)_{c_k}^x\}$.

Теорема о существовании теории Хенкина

Случай 3: Если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ непротиворечиво и $\varphi_n = \exists x\varphi$, то найдем наименьшее $k \in \omega$ такое, что c_k не входит в $T_n \cup \{\varphi_n\}$, — такой c_k найдётся, поскольку T_n удовлетворяет условию (5). Положим $T_{n+1} = T_n \cup \{\varphi_n, (\varphi)_{c_k}^x\}$. Тогда для T_{n+1} очевидно справедливы условия (1), (3)–(5).

Теорема о существовании теории Хенкина

Случай 3: Если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ непротиворечиво и $\varphi_n = \exists x\varphi$, то найдем наименьшее $k \in \omega$ такое, что c_k не входит в $T_n \cup \{\varphi_n\}$, — такой c_k найдётся, поскольку T_n удовлетворяет условию (5). Положим $T_{n+1} = T_n \cup \{\varphi_n, (\varphi)_{c_k}^x\}$. Тогда для T_{n+1} очевидно справедливы условия (1), (3)–(5). А из непротиворечивости $T_n \cup \{\exists x\varphi\}$ и Предложения 2 (2) следует, что для T_{n+1} справедливо условие (2).

Теорема о существовании теории Хенкина

Случай 3: Если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ непротиворечиво и $\varphi_n = \exists x\varphi$, то найдем наименьшее $k \in \omega$ такое, что c_k не входит в $T_n \cup \{\varphi_n\}$, — такой c_k найдётся, поскольку T_n удовлетворяет условию (5). Положим $T_{n+1} = T_n \cup \{\varphi_n, (\varphi)_{c_k}^x\}$. Тогда для T_{n+1} очевидно справедливы условия (1), (3)–(5). А из непротиворечивости $T_n \cup \{\exists x\varphi\}$ и Предложения 2 (2) следует, что для T_{n+1} справедливо условие (2).

Построение $\{T_n\}_{n \in \omega}$ закончено.

Теорема о существовании теории Хенкина

Случай 3: Если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ непротиворечиво и $\varphi_n = \exists x\varphi$, то найдем наименьшее $k \in \omega$ такое, что c_k не входит в $T_n \cup \{\varphi_n\}$, — такой c_k найдётся, поскольку T_n удовлетворяет условию (5). Положим $T_{n+1} = T_n \cup \{\varphi_n, (\varphi)_{c_k}^x\}$. Тогда для T_{n+1} очевидно справедливы условия (1), (3)–(5). А из непротиворечивости $T_n \cup \{\exists x\varphi\}$ и Предложения 2 (2) следует, что для T_{n+1} справедливо условие (2).

Построение $\{T_n\}_{n \in \omega}$ закончено. Определим $T = \bigcup_{n \in \omega} T_n$.

Теорема о существовании теории Хенкина

Случай 3: Если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ непротиворечиво и $\varphi_n = \exists x\varphi$, то найдем наименьшее $k \in \omega$ такое, что c_k не входит в $T_n \cup \{\varphi_n\}$, — такой c_k найдётся, поскольку T_n удовлетворяет условию (5). Положим $T_{n+1} = T_n \cup \{\varphi_n, (\varphi)_{c_k}^x\}$. Тогда для T_{n+1} очевидно справедливы условия (1), (3)–(5). А из непротиворечивости $T_n \cup \{\exists x\varphi\}$ и Предложения 2 (2) следует, что для T_{n+1} справедливо условие (2).

Построение $\{T_n\}_{n \in \omega}$ закончено. Определим $T = \bigcup_{n \in \omega} T_n$. Очевидно $\Gamma \subseteq T$.

Теорема о существовании теории Хенкина

Случай 3: Если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ непротиворечиво и $\varphi_n = \exists x\varphi$, то найдем наименьшее $k \in \omega$ такое, что c_k не входит в $T_n \cup \{\varphi_n\}$, — такой c_k найдётся, поскольку T_n удовлетворяет условию (5). Положим $T_{n+1} = T_n \cup \{\varphi_n, (\varphi)_{c_k}^x\}$. Тогда для T_{n+1} очевидно справедливы условия (1), (3)–(5). А из непротиворечивости $T_n \cup \{\exists x\varphi\}$ и Предложения 2 (2) следует, что для T_{n+1} справедливо условие (2).

Построение $\{T_n\}_{n \in \omega}$ закончено. Определим $T = \bigcup_{n \in \omega} T_n$. Очевидно $\Gamma \subseteq T$. Из условий (1), (2) и Предложения 2 (3) вытекает, что T непротиворечиво.

Теорема о существовании теории Хенкина

Случай 3: Если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ непротиворечиво и $\varphi_n = \exists x\varphi$, то найдем наименьшее $k \in \omega$ такое, что c_k не входит в $T_n \cup \{\varphi_n\}$, — такой c_k найдётся, поскольку T_n удовлетворяет условию (5). Положим $T_{n+1} = T_n \cup \{\varphi_n, (\varphi)_{c_k}^x\}$. Тогда для T_{n+1} очевидно справедливы условия (1), (3)–(5). А из непротиворечивости $T_n \cup \{\exists x\varphi\}$ и Предложения 2 (2) следует, что для T_{n+1} справедливо условие (2).

Построение $\{T_n\}_{n \in \omega}$ закончено. Определим $T = \bigcup_{n \in \omega} T_n$. Очевидно $\Gamma \subseteq T$. Из условий (1), (2) и Предложения 2 (3) вытекает, что T непротиворечиво.

Покажем, что для любого предложения φ сигнатуры Σ' имеет место $\varphi \in T$ или $\neg\varphi \in T$.

Теорема о существовании теории Хенкина

Случай 3: Если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ непротиворечиво и $\varphi_n = \exists x\varphi$, то найдем наименьшее $k \in \omega$ такое, что c_k не входит в $T_n \cup \{\varphi_n\}$, — такой c_k найдётся, поскольку T_n удовлетворяет условию (5). Положим $T_{n+1} = T_n \cup \{\varphi_n, (\varphi)_{c_k}^x\}$. Тогда для T_{n+1} очевидно справедливы условия (1), (3)–(5). А из непротиворечивости $T_n \cup \{\exists x\varphi\}$ и Предложения 2 (2) следует, что для T_{n+1} справедливо условие (2).

Построение $\{T_n\}_{n \in \omega}$ закончено. Определим $T = \bigcup_{n \in \omega} T_n$. Очевидно $\Gamma \subseteq T$. Из условий (1), (2) и Предложения 2 (3) вытекает, что T непротиворечиво.

Покажем, что для любого предложения φ сигнатуры Σ' имеет место $\varphi \in T$ или $\neg\varphi \in T$. Действительно, для некоторого $n \in \omega$ верно $\varphi = \varphi_n$.

Теорема о существовании теории Хенкина

Случай 3: Если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ непротиворечиво и $\varphi_n = \exists x\varphi$, то найдем наименьшее $k \in \omega$ такое, что c_k не входит в $T_n \cup \{\varphi_n\}$, — такой c_k найдётся, поскольку T_n удовлетворяет условию (5). Положим $T_{n+1} = T_n \cup \{\varphi_n, (\varphi)_{c_k}^x\}$. Тогда для T_{n+1} очевидно справедливы условия (1), (3)–(5). А из непротиворечивости $T_n \cup \{\exists x\varphi\}$ и Предложения 2 (2) следует, что для T_{n+1} справедливо условие (2).

Построение $\{T_n\}_{n \in \omega}$ закончено. Определим $T = \bigcup_{n \in \omega} T_n$. Очевидно $\Gamma \subseteq T$. Из условий (1), (2) и Предложения 2 (3) вытекает, что T непротиворечиво.

Покажем, что для любого предложения φ сигнатуры Σ' имеет место $\varphi \in T$ или $\neg\varphi \in T$. Действительно, для некоторого $n \in \omega$ верно $\varphi = \varphi_n$. $\implies$ В силу условия (3), получаем $\varphi \in T_{n+1}$ или $\neg\varphi \in T_{n+1}$, что и требовалось.

Теорема о существовании теории Хенкина

Случай 3: Если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ непротиворечиво и $\varphi_n = \exists x\varphi$, то найдем наименьшее $k \in \omega$ такое, что c_k не входит в $T_n \cup \{\varphi_n\}$, — такой c_k найдётся, поскольку T_n удовлетворяет условию (5). Положим $T_{n+1} = T_n \cup \{\varphi_n, (\varphi)_{c_k}^x\}$. Тогда для T_{n+1} очевидно справедливы условия (1), (3)–(5). А из непротиворечивости $T_n \cup \{\exists x\varphi\}$ и Предложения 2 (2) следует, что для T_{n+1} справедливо условие (2).

Построение $\{T_n\}_{n \in \omega}$ закончено. Определим $T = \bigcup_{n \in \omega} T_n$. Очевидно $\Gamma \subseteq T$. Из условий (1), (2) и Предложения 2 (3) вытекает, что T непротиворечиво.

Покажем, что для любого предложения φ сигнатуры Σ' имеет место $\varphi \in T$ или $\neg\varphi \in T$. Действительно, для некоторого $n \in \omega$ верно $\varphi = \varphi_n$. $\implies$ В силу условия (3), получаем $\varphi \in T_{n+1}$ или $\neg\varphi \in T_{n+1}$, что и требовалось.

Докажем, что множество T дедуктивно замкнуто.

Теорема о существовании теории Хенкина

Случай 3: Если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ непротиворечиво и $\varphi_n = \exists x\varphi$, то найдем наименьшее $k \in \omega$ такое, что c_k не входит в $T_n \cup \{\varphi_n\}$, — такой c_k найдётся, поскольку T_n удовлетворяет условию (5). Положим $T_{n+1} = T_n \cup \{\varphi_n, (\varphi)_{c_k}^x\}$. Тогда для T_{n+1} очевидно справедливы условия (1), (3)–(5). А из непротиворечивости $T_n \cup \{\exists x\varphi\}$ и Предложения 2 (2) следует, что для T_{n+1} справедливо условие (2).

Построение $\{T_n\}_{n \in \omega}$ закончено. Определим $T = \bigcup_{n \in \omega} T_n$. Очевидно $\Gamma \subseteq T$. Из условий (1), (2) и Предложения 2 (3) вытекает, что T непротиворечиво.

Покажем, что для любого предложения φ сигнатуры Σ' имеет место $\varphi \in T$ или $\neg\varphi \in T$. Действительно, для некоторого $n \in \omega$ верно $\varphi = \varphi_n$. $\implies$ В силу условия (3), получаем $\varphi \in T_{n+1}$ или $\neg\varphi \in T_{n+1}$, что и требовалось.

Докажем, что множество T дедуктивно замкнуто. Пусть $\psi_1, \dots, \psi_m \in T$ и для некоторого предложения φ сигнатуры Σ' секвенция $\psi_1, \dots, \psi_m \vdash \varphi$ выводима.

Теорема о существовании теории Хенкина

Случай 3: Если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ непротиворечиво и $\varphi_n = \exists x\varphi$, то найдем наименьшее $k \in \omega$ такое, что c_k не входит в $T_n \cup \{\varphi_n\}$, — такой c_k найдётся, поскольку T_n удовлетворяет условию (5). Положим $T_{n+1} = T_n \cup \{\varphi_n, (\varphi)_{c_k}^x\}$. Тогда для T_{n+1} очевидно справедливы условия (1), (3)–(5). А из непротиворечивости $T_n \cup \{\exists x\varphi\}$ и Предложения 2 (2) следует, что для T_{n+1} справедливо условие (2).

Построение $\{T_n\}_{n \in \omega}$ закончено. Определим $T = \bigcup_{n \in \omega} T_n$. Очевидно $\Gamma \subseteq T$. Из условий (1), (2) и Предложения 2 (3) вытекает, что T непротиворечиво.

Покажем, что для любого предложения φ сигнатуры Σ' имеет место $\varphi \in T$ или $\neg\varphi \in T$. Действительно, для некоторого $n \in \omega$ верно $\varphi = \varphi_n$. $\implies$ В силу условия (3), получаем $\varphi \in T_{n+1}$ или $\neg\varphi \in T_{n+1}$, что и требовалось.

Докажем, что множество T дедуктивно замкнуто. Пусть $\psi_1, \dots, \psi_m \in T$ и для некоторого предложения φ сигнатуры Σ' секвенция $\psi_1, \dots, \psi_m \vdash \varphi$ выводима. Допустим, $\varphi \notin T$.

Теорема о существовании теории Хенкина

Случай 3: Если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ непротиворечиво и $\varphi_n = \exists x\varphi$, то найдем наименьшее $k \in \omega$ такое, что c_k не входит в $T_n \cup \{\varphi_n\}$, — такой c_k найдётся, поскольку T_n удовлетворяет условию (5). Положим $T_{n+1} = T_n \cup \{\varphi_n, (\varphi)_{c_k}^x\}$. Тогда для T_{n+1} очевидно справедливы условия (1), (3)–(5). А из непротиворечивости $T_n \cup \{\exists x\varphi\}$ и Предложения 2 (2) следует, что для T_{n+1} справедливо условие (2).

Построение $\{T_n\}_{n \in \omega}$ закончено. Определим $T = \bigcup_{n \in \omega} T_n$. Очевидно $\Gamma \subseteq T$. Из условий (1), (2) и Предложения 2 (3) вытекает, что T непротиворечиво.

Покажем, что для любого предложения φ сигнатуры Σ' имеет место $\varphi \in T$ или $\neg\varphi \in T$. Действительно, для некоторого $n \in \omega$ верно $\varphi = \varphi_n$. $\implies$ В силу условия (3), получаем $\varphi \in T_{n+1}$ или $\neg\varphi \in T_{n+1}$, что и требовалось.

Докажем, что множество T дедуктивно замкнуто. Пусть $\psi_1, \dots, \psi_m \in T$ и для некоторого предложения φ сигнатуры Σ' секвенция $\psi_1, \dots, \psi_m \vdash \varphi$ выводима. Допустим, $\varphi \notin T$. $\implies$ В силу доказанного выше свойства полноты, получаем $\neg\varphi \in T$.

Теорема о существовании теории Хенкина

$\implies$ Из выводимости секвенций $\psi_1, \dots, \psi_m \vdash \varphi$ и $\neg\varphi \vdash \neg\varphi$ заключаем, что секвенция $\psi_1, \dots, \psi_m, \neg\varphi \vdash$ тоже выводима.

Теорема о существовании теории Хенкина

$\implies$ Из выводимости секвенций $\psi_1, \dots, \psi_m \vdash \varphi$ и $\neg\varphi \vdash \neg\varphi$ заключаем, что секвенция $\psi_1, \dots, \psi_m, \neg\varphi \vdash$ тоже выводима. $\implies$ Поскольку $\{\psi_1, \dots, \psi_m, \neg\varphi\} \subseteq T$, заключаем, что T противоречиво, что невозможно.

Теорема о существовании теории Хенкина

$\implies$ Из выводимости секвенций $\psi_1, \dots, \psi_m \vdash \varphi$ и $\neg\varphi \vdash \neg\varphi$ заключаем, что секвенция $\psi_1, \dots, \psi_m, \neg\varphi \vdash$ тоже выводима. $\implies$ Поскольку $\{\psi_1, \dots, \psi_m, \neg\varphi\} \subseteq T$, заключаем, что T противоречиво, что невозможно.

Таким образом, T — непротиворечивая полная теория сигнатуры Σ' .

Теорема о существовании теории Хенкина

$\implies$ Из выводимости секвенций $\psi_1, \dots, \psi_m \vdash \varphi$ и $\neg\varphi \vdash \neg\varphi$ заключаем, что секвенция $\psi_1, \dots, \psi_m, \neg\varphi \vdash$ тоже выводима. $\implies$ Поскольку $\{\psi_1, \dots, \psi_m, \neg\varphi\} \subseteq T$, заключаем, что T противоречиво, что невозможно.

Таким образом, T — непротиворечивая полная теория сигнатуры Σ' . Осталось лишь проверить условие Хенкина.

Теорема о существовании теории Хенкина

$\implies$ Из выводимости секвенций $\psi_1, \dots, \psi_m \vdash \varphi$ и $\neg\varphi \vdash \neg\varphi$ заключаем, что секвенция $\psi_1, \dots, \psi_m, \neg\varphi \vdash$ тоже выводима. $\implies$ Поскольку $\{\psi_1, \dots, \psi_m, \neg\varphi\} \subseteq T$, заключаем, что T противоречиво, что невозможно.

Таким образом, T — непротиворечивая полная теория сигнатуры Σ' . Осталось лишь проверить условие Хенкина. Пусть предложение $\exists x\varphi \in T$ и $\exists x\varphi = \varphi_n$ для некоторого $n \in \omega$.

Теорема о существовании теории Хенкина

$\implies$ Из выводимости секвенций $\psi_1, \dots, \psi_m \vdash \varphi$ и $\neg\varphi \vdash \neg\varphi$ заключаем, что секвенция $\psi_1, \dots, \psi_m, \neg\varphi \vdash$ тоже выводима. $\implies$ Поскольку $\{\psi_1, \dots, \psi_m, \neg\varphi\} \subseteq T$, заключаем, что T противоречиво, что невозможно.

Таким образом, T — непротиворечивая полная теория сигнатуры Σ' . Осталось лишь проверить условие Хенкина. Пусть предложение $\exists x\varphi \in T$ и $\exists x\varphi = \varphi_n$ для некоторого $n \in \omega$. $\implies$ В силу условия (3) и непротиворечивости T , получаем, что $\varphi_n \in T_{n+1}$.

Теорема о существовании теории Хенкина

$\implies$ Из выводимости секвенций $\psi_1, \dots, \psi_m \vdash \varphi$ и $\neg\varphi \vdash \neg\varphi$ заключаем, что секвенция $\psi_1, \dots, \psi_m, \neg\varphi \vdash$ тоже выводима. $\implies$ Поскольку $\{\psi_1, \dots, \psi_m, \neg\varphi\} \subseteq T$, заключаем, что T противоречиво, что невозможно.

Таким образом, T — непротиворечивая полная теория сигнатуры Σ' . Осталось лишь проверить условие Хенкина. Пусть предложение $\exists x\varphi \in T$ и $\exists x\varphi = \varphi_n$ для некоторого $n \in \omega$. $\implies$ В силу условия (3) и непротиворечивости T , получаем, что $\varphi_n \in T_{n+1}$. $\implies$ В силу условия (4) найдётся константный символ $c_k \in \Sigma'$ такой, что $(\varphi)_{c_k}^x \in T$.

Теорема о существовании теории Хенкина

$\implies$ Из выводимости секвенций $\psi_1, \dots, \psi_m \vdash \varphi$ и $\neg\varphi \vdash \neg\varphi$ заключаем, что секвенция $\psi_1, \dots, \psi_m, \neg\varphi \vdash$ тоже выводима. $\implies$ Поскольку $\{\psi_1, \dots, \psi_m, \neg\varphi\} \subseteq T$, заключаем, что T противоречиво, что невозможно.

Таким образом, T — непротиворечивая полная теория сигнатуры Σ' . Осталось лишь проверить условие Хенкина. Пусть предложение $\exists x\varphi \in T$ и $\exists x\varphi = \varphi_n$ для некоторого $n \in \omega$. $\implies$ В силу условия (3) и непротиворечивости T , получаем, что $\varphi_n \in T_{n+1}$. $\implies$ В силу условия (4) найдётся константный символ $c_k \in \Sigma'$ такой, что $(\varphi)_{c_k}^x \in T$. Что и требовалось. $\square$

Теорема о существовании теории Хенкина

$\implies$ Из выводимости секвенций $\psi_1, \dots, \psi_m \vdash \varphi$ и $\neg\varphi \vdash \neg\varphi$ заключаем, что секвенция $\psi_1, \dots, \psi_m, \neg\varphi \vdash$ тоже выводима. $\implies$ Поскольку $\{\psi_1, \dots, \psi_m, \neg\varphi\} \subseteq T$, заключаем, что T противоречиво, что невозможно.

Таким образом, T — непротиворечивая полная теория сигнатуры Σ' . Осталось лишь проверить условие Хенкина. Пусть предложение $\exists x\varphi \in T$ и $\exists x\varphi = \varphi_n$ для некоторого $n \in \omega$. $\implies$ В силу условия (3) и непротиворечивости T , получаем, что $\varphi_n \in T_{n+1}$. $\implies$ В силу условия (4) найдётся константный символ $c_k \in \Sigma'$ такой, что $(\varphi)_{c_k}^x \in T$. Что и требовалось. $\square$

Замечание. Теорема 3 справедлива и в общем случае для произвольной сигнатуры Σ . Нужно для кардинала $\alpha = \max\{\|\Sigma\|, \omega\}$ ввести множество новых константных символов $\{c_\gamma\}_{\gamma < \alpha}$. Тогда множество $\text{Sent}(\Sigma')$ всех предложений сигнатуры $\Sigma' = \Sigma \cup \{c_\gamma\}_{\gamma < \alpha}$ будет иметь мощность α , и значит, его можно занумеровать ординалами $\gamma < \alpha$, т.е. представить $\text{Sent}(\Sigma') = \{\varphi_\gamma\}_{\gamma < \alpha}$. Далее так же как выше трансфинитной индукцией по ординалам $\gamma < \alpha$ строится последовательность непротиворечивых множеств $\{T_\gamma\}_{\gamma < \alpha}$ предложений сигнатуры Σ' с нужными свойствами.