

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЫЧИСЛИМОСТИ

Частичные функции на ω : Рассматриваются только *частичные функции на ω* , т.е. функции вида $f : X \rightarrow \omega$, где множество $X \subseteq \omega^k$ является областью определения функции, а число $k \in \omega$ — её местностью. Любую нульместную всюду определённую функцию $f = a$ мы отождествляем с константой $a \in \omega$. Нигде не определённая функция единственна и имеет вид $f = \emptyset$, причём её местностью является любое натуральное число.

Простейшие функции: *Простейшими* функциями называются нульместная функция 0, всюду определённая одноместная функция $s(x) = x + 1$ и всюду определённые n -местные функции $I_m^n(x_1, \dots, x_n) = x_m$ для всех m, n таких, что $1 \leq m \leq n$.

Обозначение: Всюду далее через $\bar{x}$ будем для краткости обозначать кортеж $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

Суперпозиция: Говорят, что функция $f(\bar{x})$ получается с помощью *оператора суперпозиции* из функций $h(y_1, \dots, y_m), g_1(\bar{x}), \dots, g_m(\bar{x})$, если для любых $x_1, \dots, x_n$ выполняется

$$f(\bar{x}) = h(g_1(\bar{x}), \dots, g_m(\bar{x})).$$

Примитивная рекурсия: Говорят, что функция $f(\bar{x}, y)$ получается с помощью *оператора примитивной рекурсии* из функций $g(\bar{x})$ и $h(\bar{x}, y, z)$, если для любых $x_1, \dots, x_n, y$ выполняется

$$\begin{cases} f(\bar{x}, 0) = g(\bar{x}) \\ f(\bar{x}, y + 1) = h(\bar{x}, y, f(\bar{x}, y)). \end{cases}$$

Минимизация: Говорят, что функция $f(\bar{x})$ получается с помощью *оператора минимизации* из функции $g(\bar{x}, y)$ и обозначается $f(\bar{x}) = \mu y[g(\bar{x}, y) = 0]$, если для любых $x_1, \dots, x_n$ выполняется

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} y, & \text{если } g(\bar{x}, i) \text{ определено и } g(\bar{x}, i) \neq 0 \text{ для всех } i < y, \\ & \text{а значение } g(\bar{x}, y) \text{ определено и } g(\bar{x}, y) = 0, \\ \text{не определено,} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Примитивно рекурсивные функции: Класс *примитивно рекурсивных функций* — это наименьший класс частичных функций, содержащий все простейшие функции и замкнутый относительно операторов суперпозиции и примитивной рекурсии.

Частично рекурсивные функции: Класс *частично рекурсивных функций* — это наименьший класс частичных функций, содержащий все простейшие функции и замкнутый относительно операторов суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации.

Рекурсивные функции: Всюду определённые частично рекурсивные функции называются *рекурсивными*.

Ограниченная минимизация: Говорят, что функция $f(\bar{x})$ получается с помощью *ограниченной минимизации* из всюду определённых функций $g(\bar{x}, y)$ и $h(\bar{x})$ и обозначается $f(\bar{x}) = \mu y \leq h(\bar{x}) [g(\bar{x}, y) = 0]$, если для любых $x_1, \dots, x_n$ выполняется

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} y, & \text{если } g(\bar{x}, i) \neq 0 \text{ для всех } i < y, g(\bar{x}, y) = 0 \text{ и } y \leq h(\bar{x}), \\ h(\bar{x}) + 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Свойство ограниченной минимизации. Если функция $f(\bar{x})$ получена с помощью ограниченной минимизации из п.р.ф. $g(\bar{x}, y)$ и $h(\bar{x})$, то $f(\bar{x})$ тоже является п.р.ф.

Библиотека часто используемых п.р.ф.: любые константы, $x + y$, $x \cdot y$, x^y , $x!$, $x \dot{-} y$, $|x - y|$, $\text{sg}(x)$, $\overline{\text{sg}}(x)$, $[x/y]$, $\sum_{i=0}^y g(\bar{x}, i)$ и $\prod_{i=0}^y g(\bar{x}, i)$, где $g(\bar{x}, i)$ — п.р.ф.

Канторовская нумерация пар: Биективное отображение $c : \omega^2 \rightarrow \omega$, которое задаётся формулой $c(x, y) = \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2}$ и соответствует нумерации пар натуральных чисел по принципу «канторовской таблицы», называется *канторовской нумерацией пар*. Покоординатно обратные к c функции $l : \omega \rightarrow \omega$ и $r : \omega \rightarrow \omega$ определяются соотношениями $l(c(x, y)) = x$ и $r(c(x, y)) = y$. Известно, что функции $c(x, y)$, $l(x)$ и $r(x)$ — п.р.ф.

Канторовская нумерация кортежей длины n : Биективное отображение $c^n : \omega^n \rightarrow \omega$, которое задаётся индукцией по $n \geq 1$ соотношениями

$$c^1(x_1) = x_1, \quad c^{n+1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}) = c^n(c(x_1, x_2), x_3, \dots, x_{n+1}),$$

называется *канторовской нумерацией кортежей длины n* . Покоординатно обратные к c^n функции $c_{ni} : \omega \rightarrow \omega$, где $1 \leq i \leq n$, определяются соотношением $c_{ni}(c^n(x_1, \dots, x_n)) = x_i$. Известно, что функции $c^n(x_1, \dots, x_n)$ и $c_{ni}(x)$ — п.р.ф. для всех $1 \leq i \leq n$.

Рекурсивные множества: Множество $A \subseteq \omega^n$ называется *рекурсивным (примитивно рекурсивным)*, если его характеристическая функция

$$\chi_A(\bar{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \bar{x} \in A, \\ 0, & \text{если } \bar{x} \notin A \end{cases}$$

является рекурсивной (примитивно рекурсивной).

Рекурсивно перечислимые множества: Множество $A \subseteq \omega^n$ называется *рекурсивно перечислимым*, если $A = \emptyset$ или $A = \{\langle f_1(x), \dots, f_n(x) \rangle \mid x \in \omega\}$ для некоторых одноместных рекурсивных функций $f_1(x), \dots, f_n(x)$.

Замечание. Любое рекурсивное множество является рекурсивно перечислимым. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

Теорема об эквивалентных определениях р. п. множеств. Для произвольного множества $A \subseteq \omega^n$ следующие условия эквивалентны:

- (1) A рекурсивно перечисливо.
- (2) Существует рекурсивное отношение $R \subseteq \omega^{n+1}$ такое, что $A = \{\bar{x} \in \omega^n \mid \exists y (\langle \bar{x}, y \rangle \in R)\}$.
- (3) Существует ч.р.ф. $f(\bar{x})$ такая, что $A = \text{dom}(f)$.

Свойства замкнутости относительно теоретико-множественных операций.

- (1) Если $A, B \subseteq \omega^n$ — рекурсивные множества, то $A \cup B$, $A \cap B$ и $\omega^n \setminus A$ тоже рекурсивны.
- (2) Если $A, B \subseteq \omega^n$ — р. п. множества, то $A \cup B$ и $A \cap B$ тоже являются р. п. множествами.

Теорема Поста. Множество $A \subseteq \omega^n$ рекурсивно тогда и только тогда, когда множества A и $\omega^n \setminus A$ рекурсивно перечислимы.

Теорема о графике Частичная функция $f(\bar{x})$ является частично рекурсивной тогда и только тогда, когда её график

$$\Gamma_f = \{\langle \bar{x}, y \rangle \mid \bar{x} \in \text{dom}(f) \text{ и } f(\bar{x}) = y\}$$

является рекурсивно перечислимым.