

ГИЛЬБЕРТОВСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ (ГИП)

Основные объекты ГИП: формулы сигнатуры Σ .

Допустимость подстановок: Пусть Φ — формула сигнатуры Σ , t — терм сигнатуры Σ , x — предметная переменная. Подстановка $(\Phi)_t^x$ *допустима*, если никакое свободное вхождение x в формуле Φ не находится в области действия квантора по переменной $y \in \text{FV}(t)$.

Аксиомы ГИП: Пусть Φ, Ψ, Θ — формулы сигнатуры Σ , t — терм сигнатуры Σ , x, y, z — предметные переменные. Аксиомами ГИП являются формулы следующих 14 видов.

- (1) $\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi)$;
- (2) $(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow ((\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta)) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Theta))$;
- (3) $(\Phi \& \Psi) \rightarrow \Phi$;
- (4) $(\Phi \& \Psi) \rightarrow \Psi$;
- (5) $\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow (\Phi \& \Psi))$;
- (6) $\Phi \rightarrow (\Phi \vee \Psi)$;
- (7) $\Psi \rightarrow (\Phi \vee \Psi)$;
- (8) $(\Phi \rightarrow \Theta) \rightarrow ((\Psi \rightarrow \Theta) \rightarrow ((\Phi \vee \Psi) \rightarrow \Theta))$;
- (9) $(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \neg\Psi) \rightarrow \neg\Phi)$;
- (10) $\neg\neg\Phi \rightarrow \Phi$;
- (11) $x \approx x$;
- (12) $x \approx y \rightarrow ((\Phi)_x^z \rightarrow (\Phi)_y^z)$, где подстановки $(\Phi)_x^z$ и $(\Phi)_y^z$ допустимы;
- (13) $\forall x\Phi \rightarrow (\Phi)_t^x$, где подстановка $(\Phi)_t^x$ допустима;
- (14) $(\Phi)_t^x \rightarrow \exists x\Phi$, где подстановка $(\Phi)_t^x$ допустима.

Правила вывода ГИП: следующие слова являются правилами вывода ГИП

$$(1) \frac{\Phi, \Phi \rightarrow \Psi}{\Psi} \quad (2) \frac{\Psi \rightarrow \Phi}{\Psi \rightarrow \forall x\Phi}, \text{ где } x \notin \text{FV}(\Psi) \quad (3) \frac{\Phi \rightarrow \Psi}{\exists x\Phi \rightarrow \Psi}, \text{ где } x \notin \text{FV}(\Psi)$$

Выводимость в ГИП: Говорят, что формула Φ сигнатуры Σ *выводима в ГИП из множества формул* Γ сигнатуры Σ и пишут $\Gamma \triangleright \Phi$, если существует набор формул Φ_0, \dots, Φ_n сигнатуры Σ такой, что $\Phi_n = \Phi$ и для любого $i \leq n$ формула Φ_i является аксиомой ГИП, или $\Phi_i \in \Gamma$, или Φ_i получается из некоторых $\Phi_j, j < i$, по одному из правил вывода ГИП, причём в случае использования правил (2) или (3) выполняется условие $x \notin \text{FV}(\Gamma)$.

Если $\emptyset \triangleright \Phi$, то говорят, что формула Φ *выводима в ГИП*.