ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МОДЕЛЕЙ

Определение. Множество Γ формул сигнатуры Σ называется *выполнимым*, если существуют алгебраическая система $\mathfrak{A}$ сигнатуры Σ и означивание переменных γ в системе $\mathfrak{A}$ такие, что $\mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$. Множество Γ формул сигнатуры Σ называется *локально выполнимым*, если любое его конечное подмножество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ выполнимо.

Теорема компактности (Мальцев). *Множество Γ формул сигнатуры Σ выполнимо тогда и только тогда, когда Γ локально выполнимо.*

Определение. Множество Γ формул сигнатуры Σ называется *непротиворечивым*, если не существует конечного подмножества $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ такого, что секвенция $\Gamma_0 \vdash$ выводима в СИП.

Теорема о существовании модели. *Если множество Γ формул сигнатуры Σ непротиворечиво, то Γ выполнимо.*

Теорема Гёделя о полноте. *Формула (секвенция) сигнатуры Σ выводима в СИП тогда и только тогда, когда она тождественно истинна.*

Определение. Множество T предложений сигнатуры Σ называется *элементарной теорией*, если T замкнуто относительно выводимости в СИП, т. е. если $\Phi_1, \dots, \Phi_n, \Psi$ — предложения сигнатуры Σ, секвенция $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Psi$ выводима в СИП и $\Phi_1, \dots, \Phi_n \in T$, то $\Psi \in T$.

Определение. Элементарная теория T сигнатуры Σ называется *полной*, если для любого предложения Φ сигнатуры Σ справедливо $\Phi \in T$ или $\neg\Phi \in T$.

Некоторые способы задания теорий:

(1) Если A — некоторое множество предложений сигнатуры Σ, то множество

$$T = \{\Phi \text{ — предложение сигнатуры } \Sigma \mid \text{существуют } \Phi_1 \dots, \Phi_n \in A \text{ такие, что секвенция } \Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Phi \text{ выводима в СИП}\}$$

является элементарной теорий сигнатуры Σ, при этом A называется *системой аксиом* теории T.

(2) Если $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система сигнатуры Σ, то множество

$$\mathrm{Th}\,\mathfrak{A} = \{\Phi \text{ — предложение сигнатуры } \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \Phi\}$$

является элементарной теорий сигнатуры Σ и называется *элементарной теорией системы* $\mathfrak{A}$.

(3) Если K — класс алгебраических систем сигнатуры Σ, то множество

$$\mathrm{Th}\,K = \{\Phi \text{ — предложение сигнатуры } \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \Phi \text{ для любой системы } \mathfrak{A} \in K\}$$

является элементарной теорий сигнатуры Σ и называется *элементарной теорией класса* K.

Замечание. Для любой алгебраической системы $\mathfrak{A}$ сигнатуры Σ теория $\mathrm{Th}\,\mathfrak{A}$ является полной.

Определение. Говорят, что алгебраические системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ сигнатуры Σ *элементарно эквивалентны* и пишут $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, если $\mathrm{Th}\,\mathfrak{A} = \mathrm{Th}\,\mathfrak{B}$.

Замечание. Если $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Обратное, вообще говоря, не верно.

Определение. Говорят, что алгебраическая система $\mathfrak{A}$ сигнатуры Σ является *элементарной подсистемой* алгебраической системы $\mathfrak{B}$ сигнатуры Σ и пишут $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$, если $\mathfrak{A}$ является подсистемой $\mathfrak{B}$, и для любой формулы $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры Σ и любых $a_1, \dots, a_n \in A$ справедливо

$$\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \dots, a_n) \Longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \Phi(a_1, \dots, a_n).$$

Замечание. Если $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Обратное, вообще говоря, не верно.

Теорема Лёвенгейма-Скулема (вниз). *Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система сигнатуры Σ, $X \subseteq A$, кардинал $\alpha \leqslant \|\mathfrak{A}\|$ и $\alpha \geqslant \max(\|X\|, \|\Sigma\|, \omega)$. Тогда существует алгебраическая система $\mathfrak{B}$ сигнатуры Σ такая, что $\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{A}$, $\|\mathfrak{B}\| = \alpha$ и $X \subseteq B$.*

Теорема Лёвенгейма-Скулема (вверх). *Пусть $\mathfrak{A}$ — бесконечная алгебраическая система сигнатуры Σ и кардинал $\alpha \geqslant \max(\|\mathfrak{A}\|, \|\Sigma\|)$. Тогда существует алгебраическая система $\mathfrak{B}$ сигнатуры Σ такая, что $\mathfrak{B} \succcurlyeq \mathfrak{A}$ и $\|\mathfrak{B}\| = \alpha$.*