ДИЗЪЮНКТИВНАЯ И КОНЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Элементарная конъюнкция (дизъюнкция): Формула вида $\Phi_0 \ \& \ldots \& \ \Phi_m$ ($\Phi_0 \vee \ldots \vee \Phi_m$), где каждая подформула Φ_i, $i \leqslant m$, является пропозициональной переменной или отрицанием пропозициональной переменной, называется *элементарной конъюнкцией (дизъюнкцией)*.

Дизъюнктивная (конъюнктивная) нормальная форма: Говорят, что формула находится в *д.н.ф. (к.н.ф.)*, если она имеет вид $\Psi_0 \vee \ldots \vee \Psi_n$ ($\Psi_0 \ \& \ldots \& \ \Psi_n$), где каждая подформула Ψ_j, $j \leqslant n$, является элементарной конъюнкцией (дизъюнкцией).

Совершенная д.н.ф. (к.н.ф.): Говорят, что формула Φ, зависящая от пропозициональных переменных $P_0, \ldots, P_k$, находится в *совершенной д.н.ф. (к.н.ф.)*, если Φ находится в д.н.ф. (к.н.ф.) и каждая переменная P_i, $i \leqslant k$, входит в каждую элементарную конъюнкцию (дизъюнкцию) формулы Φ ровно один раз с отрицанием или без отрицания.

Теорема. (1) *Для любой формулы Φ существуют эквивалентные ей формулы Ψ_1 и Ψ_2 такие, что Ψ_1 находится в д.н.ф., а Ψ_2 находится в к.н.ф.*
(2) *Для любой не тождественно ложной формулы Φ существует эквивалентная ей формула Ψ, находящаяся в совершенной д.н.ф.*
(3) *Для любой не тождественно истинной формулы Φ существует эквивалентная ей формула Ψ, находящаяся в совершенной к.н.ф.*

Классический метод нахождения д.н.ф. и к.н.ф.: Метод нахождения д.н.ф. и к.н.ф., эквивалентных данной формуле, состоит из следующих последовательных этапов.

(1) Удалить в формуле все импликации, используя эквивалентность $A \to B \equiv \neg A \vee B$.

(2) Продвинуть все отрицания вглубь формулы до пропозициональных переменных, используя эквивалентности $\neg\neg A \equiv A$, $\neg(A \ \& \ B) \equiv \neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \ \& \ \neg B$.

(3.1) Привести формулу к д.н.ф., расставив конъюнкции и дизъюнкции необходимым образом с помощью эквивалентности $A \ \& \ (B \vee C) \equiv (A \ \& \ B) \vee (A \ \& \ C)$.

(3.2) Привести формулу к к.н.ф., расставив дизъюнкции и конъюнкции необходимым образом с помощью эквивалентности $A \vee (B \ \& \ C) \equiv (A \vee B) \ \& \ (A \vee C)$.

Табличный метод нахождения с.д.н.ф.: Опишем последовательные этапы метода на примере формулы $\Phi = ((P_1 \to P_2) \to \neg P_1) \to (P_1 \to (P_2 \& P_1))$.

(1) Построить таблицу истинности для Φ. Убедиться, что Φ не тождественно ложна.

P_1	P_2	$(P_1 \to P_2) \to \neg P_1$	$P_1 \to (P_2 \& P_1)$	Φ	элем. конъюнкция
0	0	1	1	1	$\neg P_1 \& \neg P_2$
0	1	1	1	1	$\neg P_1 \& P_2$
1	0	1	0	0	
1	1	0	1	1	$P_1 \& P_2$

(2) Отметить строки таблицы, в которых формула Φ принимает значение 1.

(3) Для каждого набора значений переменных, соответствующего отмеченной строке, выписать элементарную конъюнкцию по правилу: если $P_i = 1$, то в эту конъюнкцию включить P_i, если же $P_i = 0$, то в эту конъюнкцию включить $\neg P_i$.

(4) Все элементарные конъюнкции, полученные в пункте (3), объединить в искомую с.д.н.ф. $(\neg P_1 \& \neg P_2) \vee (\neg P_1 \& P_2) \vee (P_1 \& P_2)$.

Табличный метод нахождения с.к.н.ф.: Опишите самостоятельно, используя принцип двойственности пропозициональной логики.