БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Бинарным отношением на множестве A называется любое подмножество $R \subseteq A \times A$.
Диагональю на множестве A называется бинарное отношение

$$id_A = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}.$$

Отношением, *обратным* к бинарному отношению $R \subseteq A^2$ называется бинарное отношение

$$R^{-1} = \{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R\}.$$

Композицией бинарных отношений $R_1 \subseteq A^2$ и $R_2 \subseteq A^2$ называется бинарное отношение

$$R_1 \circ R_2 = \{\langle x, y\rangle \mid \exists z\ (\langle x, z\rangle \in R_1 \ \&\ \langle z, y\rangle \in R_2)\}.$$

Типы бинарных отношений: Бинарное отношение $R \subseteq A \times A$ на множестве A называется

- *рефлексивным*, если $\forall x \in A\ (\langle x, x\rangle \in R)$;
- *иррефлексивным*, если $\forall x \in A\ (\langle x, x\rangle \notin R)$;
- *симметричным*, если $\forall x, y \in A\ (\langle x, y\rangle \in R \longrightarrow \langle y, x\rangle \in R)$;
- *антисимметричным*, если $\forall x, y \in A\ \big((\langle x, y\rangle \in R \ \&\ \langle y, x\rangle \in R) \longrightarrow x = y\big)$;
- *транзитивным*, если $\forall x, y, z \in A\ \big((\langle x, y\rangle \in R \ \&\ \langle y, z\rangle \in R) \longrightarrow \langle x, z\rangle \in R\big)$;
- *линейным*, если $\forall x, y \in A\ (\langle x, y\rangle \in R \vee \langle y, x\rangle \in R)$;
- *предпорядком*, если оно рефлексивно и транзитивно;
- *эквивалентностью*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно;
- *частичным порядком*, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно;
- *строгим частичным порядком*, если оно иррефлексивно и транзитивно;
- *линейным порядком*, если оно рефлексивно, антисимметрично, транзитивно и линейно.

Частично и линейно упорядоченные множества: Если R — частичный (линейный) порядок на множестве A, то пару $\mathfrak{A} = \langle A, R\rangle$ называют *частично (линейно) упорядоченным множеством.*

Типы элементов в ч.у.м.: Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant\rangle$ — ч.у.м., $X \subseteq A$. Элемент $a \in A$ называется

- *минимальным в* X, если $a \in X$ и $\forall x \in X\ (x \leqslant a \longrightarrow x = a)$;
- *максимальным в* X, если $a \in X$ и $\forall x \in X\ (a \leqslant x \longrightarrow a = x)$;
- *наименьшим в* X, если $a \in X$ и $\forall x \in X\ (a \leqslant x)$;
- *наибольшим в* X, если $a \in X$ и $\forall x \in X\ (x \leqslant a)$;
- *нижней гранью* X, если $\forall x \in X\ (a \leqslant x)$;
- *верхней гранью* X, если $\forall x \in X\ (x \leqslant a)$;
- *точной нижней гранью* X, если a является наибольшей из всех нижних граней X;
- *точной верхней гранью* X, если a является наименьшей из всех верхних граней X.

Вполне упорядоченные множества: Л.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant\rangle$ называется *вполне упорядоченным*, если в каждом его непустом подмножестве $X \subseteq A$ существует наименьший элемент.

Монотонные отображения: Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant_A\rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B, \leqslant_B\rangle$ — ч.у.м. Отображение $f : A \to B$ называется

- *гомоморфизмом* из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, если $\forall x, y \in A\ \big(x \leqslant_A y \longrightarrow f(x) \leqslant_B f(y)\big)$;
- *изоморфным вложением* $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, если f — инъекция и $\forall x, y \in A\ \big(x \leqslant_A y \longleftrightarrow f(x) \leqslant_B f(y)\big)$;
- *изоморфизмом* из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$, если f — биекция и $\forall x, y \in A\ \big(x \leqslant_A y \longleftrightarrow f(x) \leqslant_B f(y)\big)$.

Если существует изоморфизм из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$, то говорят, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ *изоморфны* и пишут $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Начальные и концевые сегменты в л.у.м.: Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant_A\rangle$ — л.у.м. Подмножество $X \subseteq A$ называется

- *начальным сегментом в* $\mathfrak{A}$, если $\forall x, y \in A\ \big((x \leqslant y \ \&\ y \in X) \longrightarrow x \in X\big)$;
- *концевым сегментом в* $\mathfrak{A}$, если $\forall x, y \in A\ \big((x \leqslant y \ \&\ x \in X) \longrightarrow y \in X\big)$.

Сумма и произведение линейных порядков: Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant_A\rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B, \leqslant_B\rangle$ — л.у.м.

- *Суммой* $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ (при условии $A \cap B = \varnothing$) называется л.у.м. $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \langle A \cup B, \leqslant\rangle$, где

$$x \leqslant y \Longleftrightarrow \big((x \in A \ \&\ y \in B) \vee (x, y \in A \ \&\ x \leqslant_A y) \vee (x, y \in B \ \&\ x \leqslant_B y)\big).$$

- *Произведением* $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называется л.у.м. $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \langle A \times B, \leqslant\rangle$, где

$$\langle x_1, y_1\rangle \leqslant \langle x_2, y_2\rangle \Longleftrightarrow \big((y_1 <_B y_2) \vee (y_1 = y_2 \ \&\ x_1 \leqslant_A x_2)\big).$$