ОРДИНАЛЫ И КАРДИНАЛЫ

Определение. Множество x называется *транзитивным*, если каждый элемент x является подмножеством x, то есть $\forall y(y \in x \to y \subseteq x)$.

Определение. Множество называется *ординалом*, если оно транзитивно и все его элементы транзитивны.

Порядок по принадлежности: Пусть X — произвольное множество ординалов. Определим на элементах X следующее отношение: $\alpha \leqslant_o \beta \overset{\text{опр}}{\Longleftrightarrow} (\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta)$.

Свойства ординалов:
(1) *Любой элемент ординала является ординалом.*
(2) *Пусть α — ординал, $\alpha + 1 \overset{\text{опр}}{=} \alpha \cup \{\alpha\}$. Тогда $\alpha + 1$ — ординал.*
(3) *Если α, β — ординалы, то либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\beta \in \alpha$.*
(4) *Если X — множество ординалов, то $\cup X$ — ординал.*
(5) *Если X — множество ординалов, то $\langle X, \leqslant_o\rangle$ — в.у.м.*
(6) *Если α — ординал, то $\langle \alpha, \leqslant_o\rangle$ — в.у.м.*
(7) *Для любого в.у.м. $\langle A, \leqslant\rangle$ существует единственный ординал α такой, что $\langle A, \leqslant\rangle \cong \langle \alpha, \leqslant_o\rangle$.*
(8) *Если α, β — ординалы и существует изоморфное вложение $\langle \alpha, \leqslant_o\rangle$ в $\langle \beta, \leqslant_o\rangle$, то $\alpha{=}\beta$ или $\alpha{\in}\beta$.*
(9) *Если α, β — ординалы, то $\alpha = \beta$ тогда и только тогда, когда $\langle \alpha, \leqslant_o\rangle \cong \langle \beta, \leqslant_o\rangle$.*

Аксиома регулярности ZF. *Не существует счётной последовательности $\{x_n \mid n \in \omega\}$ множеств таких, что $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \ldots$.*

Следствие. (а) *Не существует x и y таких, что $x \in y$ и $y \in x$.*
(б) *Не существует x такого, что $x \in x$.*

Принцип трансфинитной индукции на ординалах[1]. *Пусть $\Phi(x)$ — теоретико-множественное свойство такое, что для каждого ординала α справедливо $\forall\beta\big(\beta \in \alpha \;\&\; \Phi(\beta)\big) \longrightarrow \Phi(\alpha)$. Тогда свойство $\Phi(\gamma)$ выполняется для всех ординалов γ.*

Сумма и произведение ординалов: В силу свойства (7), для любых ординалов α и β однозначно определены ординалы γ и δ такие, что

$$\langle \alpha, \leqslant_o\rangle + \langle \beta, \leqslant_o\rangle \cong \langle \gamma, \leqslant_o\rangle \;\text{ и }\; \langle \alpha, \leqslant_o\rangle \cdot \langle \beta, \leqslant_o\rangle \cong \langle \delta, \leqslant_o\rangle.$$

Тогда ординал γ обозначается через $\alpha + \beta$ и называется *суммой* α и β, а ординал δ обозначается через $\alpha \cdot \beta$ и называется *произведением* α и β.

Предельные и непредельные ординалы: Ординал α называется *непредельным*, если существует β такой, что $\alpha = \beta + 1$. Ординал α называется *предельным*, если $\alpha \neq 0$ и не существует β такого, что $\alpha = \beta + 1$.

Определение. Ординал называется *кардиналом*, если он не является равномощным никакому меньшему ординалу.

Теорема. *Для любого множества A существует единственный кардинал α такой, что множества A и α равномощны. Данный кардинал α называется* мощностью *множества A и обозначается через $\|A\|$.*

[1] Принцип трансфинитной индукции на ординалах справедлив в рамках теории множеств ZF. Под теоретико-множественным свойством $\Phi(x)$ понимается любая формула сигнатуры $\sigma = \langle \in^2 \rangle$ со свободной переменной x.