ФОРМАЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА ПЕАНО

Определение. *Теорией* PA^- называется теория сигнатуры $\sigma_0^- = \langle +, \cdot, s, 0\rangle$, задаваемая следующим списком аксиом:

(1) $\forall x \forall y (s(x) \approx s(y) \longrightarrow x \approx y)$;
(2) $\forall x (\neg s(x) \approx 0)$;
(3) $\forall x (\neg x \approx 0 \longrightarrow \exists y (x \approx s(y)))$;
(4) $\forall x (x + 0 \approx x)$;
(5) $\forall x \forall y (x + s(y) \approx s(x + y))$;
(6) $\forall x (x \cdot 0 \approx 0)$;
(7) $\forall x \forall y (x \cdot s(y) \approx (x \cdot y) + x)$.

Введём также обозначения для формул $x \leqslant y \leftrightharpoons \exists z (z + x \approx y)$ и $x < y \leftrightharpoons (x \leqslant y) \,\&\, \neg(x \approx y)$.

Определение. *Теорией* PA называется теория сигнатуры $\sigma_0^- = \langle +, \cdot, s, 0\rangle$, аксиомами которой являются аксиомы (1)–(7) теории PA^-, а также следующая *схема аксиом индукции*:

$$\Big(\Phi(\overline{x}, 0) \;\&\; \forall y \big(\Phi(\overline{x}, y) \to \Phi(\overline{x}, s(y))\big)\Big) \longrightarrow \forall z \Phi(\overline{x}, z),$$

где $\Phi(\overline{x}, y)$ — произвольная формула сигнатуры σ_0^-.

Определение. *Теорией* PA^+ называется теория сигнатуры $\sigma_0 = \langle +, \cdot, s, 0, \leqslant\rangle$, аксиомами которой являются аксиомы (1)–(7) теории PA^-, схема аксиом индукции, а также следующие предложения:

(8) $\forall x \forall y (x \leqslant y \longleftrightarrow \exists z (z + x \approx y))$;
(9) $\forall x (x \leqslant x)$;
(10) $\forall x \forall y ((x \leqslant y \,\&\, y \leqslant x) \longrightarrow x \approx y)$;
(11) $\forall x \forall y \forall z ((x \leqslant y \,\&\, y \leqslant z) \longrightarrow x \leqslant z)$;
(12) $\forall x \forall y (x \leqslant y \vee y \leqslant x)$.

Замечание. В задачнике Лавров & Максимова, ч.2, § 7, теория PA^- обозначается через Q, а теория PA обозначается через P. Теорию PA^- называют *слабой арифметикой Пеано* или *арифметикой Робинсона*. Теорию PA называют *арифметикой Пеано с индукцией*. Теорию PA^+ называют *арифметикой Пеано с линейным порядком*.

Определение. *Нумералом* называется любой терм вида $\underline{n} = \underbrace{s(s \ldots s}_{n}(0)\ldots)$, где $n \in \omega$.

Свойства нумералов. *Пусть* $\mathfrak{M} \models \mathrm{PA}^-$, $m, n \in \omega$. *Тогда справедливы следующие свойства:*

(1) $\mathfrak{M} \models \underline{m} + \underline{n} \approx \underline{m + n}$; (3) $\mathfrak{M} \models \underline{m} \approx \underline{n} \Longleftrightarrow m = n$; (5) $\mathfrak{M} \models \forall x \ \big(x \leqslant \underline{m} \longrightarrow \bigvee\limits_{i=0}^{m} x \approx \underline{i}\ \big)$.

(2) $\mathfrak{M} \models \underline{m} \cdot \underline{n} \approx \underline{m \cdot n}$; (4) $\mathfrak{M} \models \underline{m} \leqslant \underline{n} \Longleftrightarrow m \leqslant n$;

Определение. Всюду определённая функция $f : \omega^n \to \omega$ называется *представимой в теории* PA^-, если существует формула $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ сигнатуры $\sigma_0^- = \langle +, \cdot, s, 0\rangle$ такая, что для любых $m_1, \ldots, m_n, m \in \omega$ выполняются следующие два свойства:

(а) если $f(m_1, \ldots, m_n) = m$, то $\mathrm{PA}^- \rhd \Phi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}, \underline{m})$;

(б) если $f(m_1, \ldots, m_n) \neq m$, то $\mathrm{PA}^- \rhd \neg\Phi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}, \underline{m})$.