ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ СИГНАТУРЫ Σ

Алфавит предикатной логики: Пусть $\Sigma = \langle \Sigma_R, \Sigma_F, \Sigma_C, \rho \rangle$ — фиксированная сигнатура. *Алфавитом предикатной логики сигнатуры* Σ является множество

$$\Sigma_R \cup \Sigma_F \cup \Sigma_C \cup \{v_i \mid i \in \omega\} \cup \{\&, \vee, \rightarrow, \neg, \forall, \exists, \approx, (,), ,\},$$

где символы v_i, $i \in \omega$, называются *предметными переменными*.

Термы сигнатуры Σ: *Термы сигнатуры* Σ определяются по индукции:

(1) Любая предметная переменная v_i является *термом сигнатуры* Σ.

(2) Любой константный символ $c \in \Sigma_C$ является *термом сигнатуры* Σ.

(3) Если $f \in \Sigma_F$ — функциональный символ местности n, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы сигнатуры Σ, то слово $f(t_1, \ldots, t_n)$ тоже является *термом сигнатуры* Σ.

Множество входящих в терм t предметных переменных обозначается через $\mathrm{FV}(t)$, при этом запись $t(x_1, \ldots, x_k)$ обозначает, что $\mathrm{FV}(t) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$.

Значения термов в алгебраических системах: Пусть $t = t(x_1, \ldots, x_k)$ — терм сигнатуры Σ, $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система сигнатуры Σ, $a_1, \ldots, a_k$ — элементы A, γ — означивание предметных переменных в $\mathfrak{A}$ такое, что $\gamma(x_i) = a_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$. *Значение* $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k)$ *терма* t *в системе* $\mathfrak{A}$ *при означивании* γ определяется по индукции:

(1) Если $t = x_i$ — предметная переменная, то $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k) = a_i$.

(2) Если $t = c$ — константный символ, то $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k) = c^{\mathfrak{A}}$.

(3) Если $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, где f — функциональный символ местности n, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k) = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k), \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k))$.

Замечание: В предыдущем определении вместо $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k)$ часто используют запись $t^{\mathfrak{A}}[\gamma]$.

Формулы сигнатуры Σ: *Формулы сигнатуры* Σ определяются по индукции:

(1) Если t_1, t_2 — термы сигнатуры Σ, то слово $t_1 \approx t_2$ является *формулой сигнатуры* Σ.

(2) Если $R \in \Sigma_R$ — предикатный символ местности n, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы сигнатуры Σ, то слово $R(t_1, \ldots, t_n)$ является *формулой сигнатуры* Σ.

(3) Если Φ, Ψ — формулы сигнатуры Σ, x — предметная переменная, то слова $(\Phi \,\&\, \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \rightarrow \Psi)$, $\neg\Phi$, $\forall x \Phi$, $\exists x \Phi$ тоже являются *формулами сигнатуры* Σ.

Связанные и свободные вхождения переменных в формулах: Пусть Φ — формула сигнатуры Σ. Подформула формулы Φ, начинающаяся с квантора $\forall$ или $\exists$, называется *областью действия* этого *вхождения квантора* $\forall$ или $\exists$. Вхождение переменной x в Φ называется *связанным*, если оно находится в области действия квантора $\forall x$ или $\exists x$, и *свободным* в противном случае. Переменная x называется *свободной переменной формулы* Φ, если в Φ есть хотя бы одно свободное вхождение x. Множество свободных переменных формулы Φ обозначается через $\mathrm{FV}(\Phi)$, при этом запись $\Phi(x_1, \ldots, x_k)$ обозначает, что $\mathrm{FV}(\Phi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$.

Истинность формул в алгебраических системах: Пусть $\Phi = \Phi(x_1, \ldots, x_k)$ — формула сигнатуры Σ, $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система сигнатуры Σ, $a_1, \ldots, a_k$ — элементы A, γ — означивание предметных переменных в $\mathfrak{A}$ такое, что $\gamma(x_i) = a_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Определим отношение $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \ldots, a_k)$ (*формула* Φ *истинна в системе* $\mathfrak{A}$ *при означивании* γ) по индукции:

(1) Если $\Phi = t_1 \approx t_2$, где t_1, t_2 — термы сигнатуры Σ, то $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \ldots, a_k) \Longleftrightarrow t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k) = t_2^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k)$.

(2) Если $\Phi = R(t_1, \ldots, t_n)$, где $R \in \Sigma_R$ — предикатный символ местности n, и $t_1, \ldots, t_n$ — термы сигнатуры Σ, то $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \ldots, a_k) \Longleftrightarrow \langle t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k), \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k) \rangle \in R^{\mathfrak{A}}$.

(3) Если $\Phi = \Psi \,\&\, \Theta$, то $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \ldots, a_k) \Longleftrightarrow \big(\mathfrak{A} \models \Psi(a_1, \ldots, a_k)$ и $\mathfrak{A} \models \Theta(a_1, \ldots, a_k)\big)$.

(4) Если $\Phi = \Psi \vee \Theta$, то $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \ldots, a_k) \Longleftrightarrow \big(\mathfrak{A} \models \Psi(a_1, \ldots, a_k)$ или $\mathfrak{A} \models \Theta(a_1, \ldots, a_k)\big)$.

(5) Если $\Phi = \Psi \rightarrow \Theta$, то $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \ldots, a_k) \Longleftrightarrow \big(\mathfrak{A} \not\models \Psi(a_1, \ldots, a_k)$ или $\mathfrak{A} \models \Theta(a_1, \ldots, a_k)\big)$.

(6) Если $\Phi = \neg\Psi$, то $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \ldots, a_k) \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \Psi(a_1, \ldots, a_k)$.

(7) Если $\Phi = \forall x \Psi$ и $\Psi = \Psi(x, x_1, \ldots, x_n)$, то $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \ldots, a_k) \Longleftrightarrow \big($Для любого $a \in A$ имеет место $\mathfrak{A} \models \Psi(a, a_1, \ldots, a_k)\big)$.

(8) Если $\Phi = \exists x \Psi$ и $\Psi = \Psi(x, x_1, \ldots, x_n)$, то $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \ldots, a_k) \Longleftrightarrow \big($Существует $a \in A$ такой, что $\mathfrak{A} \models \Psi(a, a_1, \ldots, a_k)\big)$.

Замечание: В определении выше вместо $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \ldots, a_k)$ часто используют запись $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$.