ФИЛЬТРОВАННЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ СИСТЕМ

Фильтры и ультрафильтры: *Фильтром на множестве* I называется непустое подмножество $D \subseteq P(I)$, удовлетворяющее условиям (здесь $P(I)$ — это множество всех подмножеств I):

(1) $\varnothing \notin D$;

(2) $\forall x, y \in D\, (x \cap y \in D)$;

(3) $\forall x, y \subseteq I\, (x \subseteq y \,\&\, x \in D \longrightarrow y \in D)$.

Фильтр D на множестве I называется *ультрафильтром*, если $\forall x \subseteq I\, (x \in D \vee I \backslash x \in D)$.

Фильтр D на множестве I называется *главным*, если D содержит наименьший по включению элемент, т.е. существует $a \in D$ такой, что $D = \{x \subseteq I \mid a \subseteq x\}$.

Прямое произведение множеств: Пусть $\{M_i \mid i \in I\}$ — семейство непустых множеств, I — множество. *Прямым произведением множеств* M_i, $i \in I$, называется множество

$$\prod_{i \in I} M_i = \{f : I \to \bigcup_{i \in I} M_i \mid f(i) \in M_i \text{ для всех } i \in I\}.$$

В случае конечного I можно считать, что $I = \{1, \ldots, n\}$, и отождествлять каждую функцию $f \in \prod_{i \in I} M_i$ с кортежем $\langle f(1), \ldots, f(n) \rangle$ длины n. В случае счётного I можно считать, что $I = \omega$, и отождествлять каждый элемент $f \in \prod_{i \in I} M_i$ со счётной последовательностью $\langle f(0), f(1), \ldots, f(n), \ldots \rangle$.

Прямое произведение систем: Пусть $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ — семейство алгебраических систем сигнатуры Σ, I — множество. *Прямым произведением систем* $\mathfrak{M}_i$, $i \in I$, называется алгебраическая система $\mathfrak{M} = \prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i$ сигнатуры Σ, определённая следующим *покоординатным* образом:

(1) Носителем системы $\mathfrak{M}$ является прямое произведение $\prod_{i \in I} M_i$ носителей M_i систем $\mathfrak{M}_i$;

(2) Если $R \in \Sigma$ — символ n-местного предиката, $f_1, \ldots, f_n \in \prod_{i \in I} M_i$, то

$$\langle f_1, \ldots, f_n \rangle \in R^{\mathfrak{M}} \iff \langle f_1(i), \ldots, f_n(i) \rangle \in R^{\mathfrak{M}_i} \text{ для всех } i \in I;$$

(3) Если $F \in \Sigma$ — символ n-местной функции, $f_1, \ldots, f_n, f \in \prod_{i \in I} M_i$, то

$$F^{\mathfrak{M}}(f_1, \ldots, f_n) = f \iff F^{\mathfrak{M}_i}(f_1(i), \ldots, f_n(i)) = f(i) \text{ для всех } i \in I;$$

(4) Если $c \in \Sigma$ — символ константы, $f \in \prod_{i \in I} M_i$, то

$$c^{\mathfrak{M}} = f \iff c^{\mathfrak{M}_i} = f(i) \text{ для всех } i \in I.$$

Фильтрованное произведение множеств: Пусть $\{M_i \mid i \in I\}$ — семейство непустых множеств, D — фильтр на множестве I. Определим на прямом призведении $\prod_{i \in I} M_i$ следующее отношение эквивалентности:

$$f \overset{D}{\sim} g \iff \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in D.$$

Для каждого $f \in \prod_{i \in I} M_i$ через $f/D = \{g \mid f \overset{D}{\sim} g\}$ обозначим класс эквивалентности $\overset{D}{\sim}$, содержащий f. Фактор-множество $\prod_{i \in I} M_i/D = \{f/D \mid f \in \prod_{i \in I} M_i\}$ называется *фильтрованным произведением множеств* M_i, $i \in I$, *по фильтру* D.

Фильтрованное произведение систем: Пусть $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ — семейство алгебраических систем сигнатуры Σ, D — фильтр на множестве I. *Фильтрованным произведением систем* $\mathfrak{M}_i$, $i \in I$, *по фильтру* D называется алгебраическая система $\mathfrak{M} = \prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i/D$ сигнатуры Σ, определённая следующим образом:

(1) Носителем $\mathfrak{M}$ является фильтрованное произведение $\prod_{i \in I} M_i/D$ носителей M_i систем $\mathfrak{M}_i$;

(2) Если $R \in \Sigma$ — символ n-местного предиката, $f_1, \ldots, f_n \in \prod_{i \in I} M_i$, то

$$\langle f_1/D, \ldots, f_n/D \rangle \in R^{\mathfrak{M}} \iff \{i \in I \mid \langle f_1(i), \ldots, f_n(i) \rangle \in R^{\mathfrak{M}_i}\} \in D;$$

(3) Если $F \in \Sigma$ — символ n-местной функции, $f_1, \ldots, f_n, f \in \prod_{i \in I} M_i$, то

$$F^{\mathfrak{M}}(f_1/D, \ldots, f_n/D) = f/D \iff \{i \in I \mid F^{\mathfrak{M}_i}(f_1(i), \ldots, f_n(i)) = f(i)\} \in D;$$

(4) Если $c \in \Sigma$ — символ константы, $f \in \prod_{i \in I} M_i$, то

$$c^{\mathfrak{M}} = f/D \iff \{i \in I \mid c^{\mathfrak{M}_i} = f(i)\} \in D.$$

Если D — ультрафильтр на I, то фильтрованное произведение $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i/D$ называется *ультрапроизведением*. Если в ультрапроизведениии $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i/D$ все системы $\mathfrak{M}_i$ совпадают с некоторой $\mathfrak{M}$, то ультрапроизведение называется *ультрастепенью* и обозначается через $\mathfrak{M}^I/D$.