Σ-ФОРМУЛЫ И Σ-ОПРЕДЕЛИМЫЕ ФУНКЦИИ

RQ-формулы: Пусть $\sigma = \langle \leqslant^2, \ldots \rangle$ — сигнатура, содержащая символ бинарного предиката $\leqslant$. Семейство *RQ-формул* сигнатуры σ определяется по индукции:

(1) Любая атомарная формула сигнатуры σ является *RQ-формулой.*

(2) Если Φ и Ψ — RQ-формулы, то $(\Phi \,\&\, \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \to \Psi)$ и $\neg\Phi$ тоже являются *RQ-формулами.*

(3) Если Φ — RQ-формула, x — переменная, то $\forall x \Phi$ и $\exists x \Phi$ тоже являются *RQ-формулами.*

(4) Если Φ — RQ-формула, x — переменная, t — терм сигнатуры σ такой, что $x \notin \mathrm{FV}(t)$, то $(\forall x \leqslant t)\Phi$ и $(\exists x \leqslant t)\Phi$ тоже являются *RQ-формулами.*

Замечание: Для произвольной RQ-формулы Φ множество $\mathrm{FV}(\Phi)$ свободных переменных и отношение $\mathfrak{M} \models \Phi[\gamma]$ истинности на алгебраической системе $\mathfrak{M}$ при означивании γ определяются так же как и раньше, исходя из справедливости следующих эквивалентностей:

$$(\forall x \leqslant t)\Phi \equiv \forall x (x \leqslant t \to \Phi), \quad (\exists x \leqslant t)\Phi \equiv \exists x (x \leqslant t \,\&\, \Phi).$$

Δ_0-формулы: В семействе всех RQ-формул сигнатуры σ определим по индукции подсемейство Δ_0-*формул* сигнатуры σ:

(1) Любая бескванторная формула сигнатуры σ является Δ_0-*формулой.*

(2) Если Φ и Ψ — Δ_0-формулы, x — переменная, t — терм сигнатуры σ и $x \notin \mathrm{FV}(t)$, то $(\Phi \,\&\, \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \to \Psi)$, $\neg\Phi$, $(\forall x \leqslant t)\Phi$ и $(\exists x \leqslant t)\Phi$ тоже являются Δ_0-формулами.

Σ-формулы: В семействе всех RQ-формул сигнатуры σ определим по индукции подсемейство Σ-*формул* сигнатуры σ:

(1) Любая Δ_0-формула сигнатуры σ является Σ-*формулой.*

(2) Если Φ и Ψ — Σ-формулы, x — переменная, t — терм сигнатуры σ и $x \notin \mathrm{FV}(t)$, то $(\Phi \,\&\, \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\forall x \leqslant t)\Phi$, $(\exists x \leqslant t)\Phi$ и $\exists x \Phi$ тоже являются Σ-*формулами.*

Стандартная модель арифметики: Пусть $\sigma_0 = \langle \leqslant, +, \cdot, s, 0 \rangle$ — сигнатура арифметики с порядком. Далее *стандартной моделью арифметики* мы будем называть алгебраическую систему $\mathfrak{N} = \langle \omega \leqslant, +, \cdot, s, 0 \rangle$ сигнатуры σ_0 со стандартной интерпретацией сигнатурных символов на множестве натуральных чисел.

Δ_0-определимые и Σ-определимые множества: Подмножество $A \subseteq \omega^k$ называется Δ_0-*определимым* (Σ-*определимым*) в стандартной модели арифметики $\mathfrak{N}$, если существует Δ_0-формула (Σ-формула) $\Phi(x_1, \ldots, x_k)$ сигнатуры σ_0 такая, что для любых $n_1, \ldots, n_k \in \omega$ справедлива эквивалентность

$$\langle n_1, \ldots, n_k \rangle \in A \Longleftrightarrow \mathfrak{N} \models \Phi(n_1, \ldots, n_k).$$

Δ_0-определимые и Σ-определимые функции: Частичная функция $f : \mathrm{dom}(f) \subseteq \omega^k \longrightarrow \omega$ называется Δ_0-*определимой* (Σ-*определимой*) в стандартной модели арифметики $\mathfrak{N}$, если её график

$$\Gamma_f = \{\langle n_1, \ldots, n_k, m \rangle \in \omega^{k+1} \mid \langle n_1, \ldots, n_k \rangle \in \mathrm{dom}(f) \text{ и } f(n_1, \ldots, n_k) = m\}$$

является Δ_0-определимым (Σ-определимым) в $\mathfrak{N}$.

Теорема об описании Σ-определимых множеств и функций:

(1) *Подмножество $A \subseteq \omega^k$ является Σ-определимым в $\mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда A рекурсивно перечислимо.*

(2) *Частичная функция $f : \mathrm{dom}(f) \subseteq \omega^k \longrightarrow \omega$ является Σ-определимой в $\mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда f частично рекурсивна.*

Функция Гёделя: Определяется как $\beta(x, y) = \mathrm{rest}\big(l(x), 1 + (y+1) \cdot r(x)\big)$ и обладает следующими двумя свойствами:

(1) *Для любых $n \geqslant 0$ и $a_0, \ldots, a_n \in \omega$ существует $m \in \omega$ такой, что $\beta(m, 0) = a_0, \ldots, \beta(m, n) = a_n$.*

(2) *Функция β является Σ-определимой в $\mathfrak{N}$, т.е. существует Σ-формула $\Phi_\beta(x, y, z)$, которая определяет график Γ_β в $\mathfrak{N}$.*