

## СЕКВЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ (СИП)

**Секвенции СИП:** секвенциями СИП называются слова следующих четырех видов:

- (1)  $\Phi_0, \dots, \Phi_n \vdash \Psi$ ,
- (2)  $\Phi_0, \dots, \Phi_n \vdash$ ,
- (3)  $\vdash \Psi$ ,
- (4)  $\vdash$ ,

где  $\Phi_0, \dots, \Phi_n, \Psi$  — произвольные формулы сигнатуры  $\Sigma$ ,  $n \in \omega$ .

**Аксиомы СИП:** аксиомами СИП называются секвенции следующих трех видов:

- (1)  $\Phi \vdash \Phi$ , где  $\Phi$  — произвольная формула сигнатуры  $\Sigma$ ;
- (2)  $\vdash x \approx x$ , где  $x$  — переменная;
- (3)  $x \approx y, (\Phi)_x^z \vdash (\Phi)_y^z$ , где  $x, y, z$  — переменные,  $\Phi$  — формула сигнатуры  $\Sigma$  такие, что подстановки  $(\Phi)_x^z$  и  $(\Phi)_y^z$  допустимы.

**Правила вывода СИП:** пусть  $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$  — конечные (возможно пустые) последовательности формул сигнатуры  $\Sigma$ ,  $\Phi, \Psi, \Theta$  — формулы сигнатуры  $\Sigma$ ,  $t$  — терм сигнатуры  $\Sigma$ . Тогда следующие слова являются правилами вывода СИП:

- |  |  |
|--|--|
| (1) $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \& \Psi}$                    | (2) $\frac{\Gamma \vdash \Phi \& \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$  |
| (3) $\frac{\Gamma \vdash \Phi \& \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$  | (4) $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$  |
| (5) $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Psi \vee \Phi}$                                      | (6) $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Theta; \Gamma, \Psi \vdash \Theta; \Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}{\Gamma \vdash \Theta}$      |
| (7) $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}$                         | (8) $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$                                     |
| (9) $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$  | (10) $\frac{\Gamma, \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \neg \Phi}$   |
| (11) $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash}$                           | (12) $\frac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$                     |
| (13) $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$   | (14) $\frac{\Gamma, \Phi, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}$   |
| (15) $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \forall x \Phi}$<br>где $x \notin \text{FV}(\Gamma)$ | (16) $\frac{\Gamma, (\Phi)_t^x \vdash \Psi}{\Gamma, \forall x \Phi \vdash \Psi}$<br>где $(\Phi)_t^x$ допустима               |
| (17) $\frac{\Gamma \vdash (\Phi)_t^x}{\Gamma \vdash \exists x \Phi}$<br>где $(\Phi)_t^x$ допустима | (18) $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \exists x \Phi \vdash \Psi}$<br>где $x \notin \text{FV}(\Gamma \cup \{\Psi\})$ |

**Замечание:** Все допустимые в СИП правила остаются допустимыми в СИП. В частности, допустимыми в СИП являются следующие правила (были в прошлом семестре):

$$\begin{array}{cccc}
 \frac{\Gamma, \Phi, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma, \Psi \& \Phi \vdash \Theta} & \frac{\Gamma, \Phi \& \Psi \vdash \Theta}{\Gamma, \Psi, \Phi \vdash \Theta} & \frac{\Gamma, \Phi \vdash \Theta; \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma, \Phi \vee \Psi \vdash \Theta} & \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \Phi} \\
 \\
 \frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg \Psi \vdash \neg \Phi} & \frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash \neg \Psi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi} & \frac{\Gamma, \Phi \vdash \neg \Psi}{\Gamma, \Psi \vdash \neg \Phi} & \frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg \Psi \vdash \Phi}
 \end{array}$$