АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ СИГНАТУРЫ Σ

Сигнатура: *Сигнатурой* называется упорядоченная четвёрка вида $\Sigma = \langle \Sigma_R, \Sigma_F, \Sigma_C, \rho \rangle$, где
(а) $\Sigma_R = \{R_i \mid i \in I\}$ — множество *предикатных символов*;
(б) $\Sigma_F = \{f_j \mid j \in J\}$ — множество *функциональных символов*;
(в) $\Sigma_C = \{c_k \mid k \in K\}$ — множество *константных символов*;
(г) $\rho : \Sigma_R \cup \Sigma_F \longrightarrow \omega$ — *функция местности* для предикатных и функциональных символов.

Если множества Σ_R, Σ_F и Σ_C не более чем счётные, то часто пишут

$$\Sigma = \langle R_0^{m_0}, R_1^{m_1}, \ldots ; f_0^{n_0}, f_1^{n_1}, \ldots ; c_0, c_1, \ldots \rangle,$$

указывая в верхних индексах предикатных и функциональных символов их местности.

Алгебраические системы сигнатуры $\boldsymbol{\Sigma}$: *Алгебраической системой (моделью) сигнатуры* Σ называется упорядоченная четвёрка $\mathfrak{A} = \langle A, \{R_i^{\mathfrak{A}} \mid i \in I\}, \{f_j^{\mathfrak{A}} \mid j \in J\}, \{c_k^{\mathfrak{A}} \mid k \in K\} \rangle$, где
(а) A — непустое множество, называемое *носителем системы* $\mathfrak{A}$;
(б) для любого предикатного символа $R_i \in \Sigma_R$ местности $n = \rho(R_i)$ множество $R_i^{\mathfrak{A}}$ является n-местным предикатом на A, т.е. $R_i^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$;
(в) для любого функционального символа $f_j \in \Sigma_F$ местности $m = \rho(f_j)$ множество $f_j^{\mathfrak{A}}$ является m-местной функцией на A, т.е. $f_j^{\mathfrak{A}} : A^m \to A$;
(г) для любого константного символа $c_k \in \Sigma_C$ множество $c_k^{\mathfrak{A}}$ является элементом A, т.е. $c_k^{\mathfrak{A}} \in A$.

Предикаты $R_i^{\mathfrak{A}}$, функции $f_j^{\mathfrak{A}}$ и константы $c_k^{\mathfrak{A}}$ называют *интерпретациями* соответствующих символов из сигнатуры в алгебраической системе $\mathfrak{A}$.

В случае не более чем счётной сигнатуры часто пишут

$$\mathfrak{A} = \langle A, R_0^{\mathfrak{A}}, R_1^{\mathfrak{A}}, \ldots ; f_0^{\mathfrak{A}}, f_1^{\mathfrak{A}}, \ldots ; c_0^{\mathfrak{A}}, c_1^{\mathfrak{A}}, \ldots \rangle.$$

Подсистемы алгебраических систем сигнатуры $\boldsymbol{\Sigma}$: Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется *подсистемой (подмоделью)* алгебраической системы $\mathfrak{B}$, если
(а) $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имеют одну и ту же сигнатуру Σ;
(б) $A \subseteq B$, где A — носитель $\mathfrak{A}$, B — носитель $\mathfrak{B}$;
(в) для любого предикатного символа $R \in \Sigma_R$ местности n и любых $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in R^{\mathfrak{A}} \Longleftrightarrow \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in R^{\mathfrak{B}};$$

(г) для любого функционального символа $f \in \Sigma_F$ местности n и любых $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n);$$

(д) для любого константного символа $c \in \Sigma_C$ имеет место

$$c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}.$$

Гомоморфизмы и изоморфизмы алгебраических систем: Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — алгебраические системы сигнатуры Σ, A — носитель $\mathfrak{A}$, B — носитель $\mathfrak{B}$. Отображение $\varphi : A \to B$ называется *гомоморфизмом* из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, если
(а) для любого предикатного символа $R \in \Sigma_R$ местности n и любых $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in R^{\mathfrak{A}} \Longrightarrow \langle \varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n) \rangle \in R^{\mathfrak{B}};$$

(б) для любого функционального символа $f \in \Sigma_F$ местности n и любых $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$\varphi\big(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)\big) = f^{\mathfrak{B}}\big(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)\big);$$

(в) для любого константного символа $c \in \Sigma_C$ имеет место

$$\varphi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}.$$

Если $\varphi : A \to B$ — биекция такая, что φ и φ^{-1} — гомоморфизмы, то φ называется *изоморфизмом* из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$. Если существует изоморфизм из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$, то говорят, что алгебраические системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ *изоморфны* и пишут $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.