МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА
ММФ НГУ, 1-й курс, 1-й поток

Н.Т. Когабаев

Ординалы

(по материалам лекций С.С. Гончарова)

*Используйте просмотр в постраничном режиме

Важное замечание о метатеории

Теория ординалов излагается в рамках теории множеств Цермело-Френкеля ZF. В свою очередь, теория множеств ZF погружена в *метатеорию*, которую мы считаем интуитивной и неформальной математикой. Метатеория излагается на естественном языке с математическими символами и использует привычные нам методы математических рассуждений. Утверждения метатеории должны состоять в интуитивных умозаключениях, а не в применении формальных правил вывода в формальных теориях. В метатеории применяются только финитарные методы, которые используют только интуитивно представляемые объекты и осуществимые процессы. В частности, мы считаем, что наша метатеория содержит наивные натуральные числа (не путать с формально заданными конечными ординалами). Мы также считаем, в нашей метатеории мы можем использовать в качестве одного из способов рассуждений метод обычной математической индукции по наивным натуральным числам (не путать с трансфинитной индукцией по ординалам).

Определение теоретико-множественного свойства

В аксиомах и утверждениях теории множеств Цермело-Френкеля ZF используются формально записанные теоретико-множественные свойства. Строго говоря, теоретико-множественное свойство — это формула логики предикатов сигнатуры $\sigma = \langle \in \rangle$, но можно сформулировать и явное определение.

Определение теоретико-множественного свойства

В аксиомах и утверждениях теории множеств Цермело-Френкеля ZF используются формально записанные теоретико-множественные свойства. Строго говоря, теоретико-множественное свойство — это формула логики предикатов сигнатуры $\sigma = \langle \in \rangle$, но можно сформулировать и явное определение.

Определение. Семейство *теоретико-множественных свойств (формул)* определяется по индукции (в метатеории):

Определение теоретико-множественного свойства

В аксиомах и утверждениях теории множеств Цермело-Френкеля ZF используются формально записанные теоретико-множественные свойства. Строго говоря, теоретико-множественное свойство — это формула логики предикатов сигнатуры $\sigma = \langle \in \rangle$, но можно сформулировать и явное определение.

Определение. Семейство *теоретико-множественных свойств (формул)* определяется по индукции (в метатеории):

(1) Если x и y — переменные, то $x \in y$ и $x = y$ являются теоретико-множественными свойствами.

Определение теоретико-множественного свойства

В аксиомах и утверждениях теории множеств Цермело-Френкеля ZF используются формально записанные теоретико-множественные свойства. Строго говоря, теоретико-множественное свойство — это формула логики предикатов сигнатуры $\sigma = \langle \in \rangle$, но можно сформулировать и явное определение.

Определение. Семейство *теоретико-множественных свойств (формул)* определяется по индукции (в метатеории):

(1) Если x и y — переменные, то $x \in y$ и $x = y$ являются теоретико-множественными свойствами.

(2) Если Φ и Ψ — теоретико-множественные свойства, а x — переменная, то $(\Phi \mathbin{\&} \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \to \Psi)$, $\neg\Phi$, $\forall x \Phi$ и $\exists x \Phi$ тоже являются теоретико-множественными свойствами.

Определение теоретико-множественного свойства

В аксиомах и утверждениях теории множеств Цермело-Френкеля ZF используются формально записанные теоретико-множественные свойства. Строго говоря, теоретико-множественное свойство — это формула логики предикатов сигнатуры $\sigma = \langle \in \rangle$, но можно сформулировать и явное определение.

Определение. Семейство *теоретико-множественных свойств (формул)* определяется по индукции (в метатеории):

(1) Если x и y — переменные, то $x \in y$ и $x = y$ являются теоретико-множественными свойствами.

(2) Если Φ и Ψ — теоретико-множественные свойства, а x — переменная, то $(\Phi \mathbin{\&} \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \to \Psi)$, $\neg\Phi$, $\forall x \Phi$ и $\exists x \Phi$ тоже являются теоретико-множественными свойствами.

Аксиома выделения ZF. *Если A — множество, а $\Phi(x)$ — теоретико-множественное свойство, то существует множество $\{a \in A \mid \Phi(a)\}$.*

Определение транзитивного множества

Определение. Множество x называется *транзитивным*, если каждый элемент x является подмножеством x, то есть $\forall y(y \in x \to y \subseteq x)$.

Определение транзитивного множества

Определение. Множество x называется *транзитивным*, если каждый элемент x является подмножеством x, то есть $\forall y(y \in x \to y \subseteq x)$.

Условие транзитивности можно переписать эквивалентным образом в виде теоретико-множественного свойства:

Определение транзитивного множества

Определение. Множество x называется *транзитивным*, если каждый элемент x является подмножеством x, то есть $\forall y(y \in x \to y \subseteq x)$.

Условие транзитивности можно переписать эквивалентным образом в виде теоретико-множественного свойства:

$$\forall y\big(y \in x \to \forall z(z \in y \to z \in x)\big)$$

Определение транзитивного множества

Определение. Множество x называется *транзитивным*, если каждый элемент x является подмножеством x, то есть $\forall y (y \in x \to y \subseteq x)$.

Условие транзитивности можно переписать эквивалентным образом в виде теоретико-множественного свойства:

$$\forall y \big(y \in x \to \forall z (z \in y \to z \in x) \big) \iff \forall y \forall z \big(y \in x \to (z \in y \to z \in x) \big)$$

Определение транзитивного множества

Определение. Множество x называется *транзитивным*, если каждый элемент x является подмножеством x, то есть $\forall y(y \in x \to y \subseteq x)$.

Условие транзитивности можно переписать эквивалентным образом в виде теоретико-множественного свойства:

$$\forall y\big(y \in x \to \forall z(z \in y \to z \in x)\big) \iff \forall y \forall z\big(y \in x \to (z \in y \to z \in x)\big) \iff$$
$$\iff \forall y \forall z\big((z \in y \mathbin{\&} y \in x) \to z \in x\big)$$

Определение транзитивного множества

Определение. Множество x называется *транзитивным*, если каждый элемент x является подмножеством x, то есть $\forall y(y \in x \to y \subseteq x)$.

Условие транзитивности можно переписать эквивалентным образом в виде теоретико-множественного свойства:

$$\forall y\big(y \in x \to \forall z(z \in y \to z \in x)\big) \iff \forall y \forall z\big(y \in x \to (z \in y \to z \in x)\big) \iff$$
$$\iff \forall y \forall z\big((z \in y \;\&\; y \in x) \to z \in x\big) =: \mathrm{Transit}(x)$$

Определение транзитивного множества

Определение. Множество x называется *транзитивным*, если каждый элемент x является подмножеством x, то есть $\forall y(y \in x \to y \subseteq x)$.

Условие транзитивности можно переписать эквивалентным образом в виде теоретико-множественного свойства:

$$\forall y\big(y \in x \to \forall z(z \in y \to z \in x)\big) \iff \forall y \forall z\big(y \in x \to (z \in y \to z \in x)\big) \iff$$
$$\iff \forall y \forall z\big((z \in y \;\&\; y \in x) \to z \in x\big) =: \mathrm{Transit}(x)$$

Примеры. (1) Пустое множество $\varnothing$ очевидно транзитивно.

Определение транзитивного множества

Определение. Множество x называется *транзитивным*, если каждый элемент x является подмножеством x, то есть $\forall y(y \in x \to y \subseteq x)$.

Условие транзитивности можно переписать эквивалентным образом в виде теоретико-множественного свойства:

$$\forall y\big(y \in x \to \forall z(z \in y \to z \in x)\big) \iff \forall y \forall z\big(y \in x \to (z \in y \to z \in x)\big) \iff$$
$$\iff \forall y \forall z\big((z \in y \;\&\; y \in x) \to z \in x\big) =: \mathrm{Transit}(x)$$

Примеры. (1) Пустое множество $\varnothing$ очевидно транзитивно.

(2) Множество $\{\varnothing\}$ транзитивно, т.к. $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$.

Определение транзитивного множества

Определение. Множество x называется *транзитивным*, если каждый элемент x является подмножеством x, то есть $\forall y(y \in x \to y \subseteq x)$.

Условие транзитивности можно переписать эквивалентным образом в виде теоретико-множественного свойства:

$$\forall y\big(y \in x \to \forall z(z \in y \to z \in x)\big) \iff \forall y \forall z\big(y \in x \to (z \in y \to z \in x)\big) \iff$$
$$\iff \forall y \forall z\big((z \in y \,\&\, y \in x) \to z \in x\big) =: \mathrm{Transit}(x)$$

Примеры. (1) Пустое множество $\varnothing$ очевидно транзитивно.

(2) Множество $\{\varnothing\}$ транзитивно, т.к. $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$.

(3) Множество $\{\{\varnothing\}\}$ не транзитивно, т.к. $\{\varnothing\} \not\subseteq \{\{\varnothing\}\}$ (поскольку $\varnothing \notin \{\{\varnothing\}\}$).

Определение транзитивного множества

Определение. Множество x называется *транзитивным*, если каждый элемент x является подмножеством x, то есть $\forall y(y \in x \to y \subseteq x)$.

Условие транзитивности можно переписать эквивалентным образом в виде теоретико-множественного свойства:

$$\forall y\big(y \in x \to \forall z(z \in y \to z \in x)\big) \iff \forall y \forall z\big(y \in x \to (z \in y \to z \in x)\big) \iff$$
$$\iff \forall y \forall z\big((z \in y \,\&\, y \in x) \to z \in x\big) =: \mathrm{Transit}(x)$$

Примеры. (1) Пустое множество $\varnothing$ очевидно транзитивно.

(2) Множество $\{\varnothing\}$ транзитивно, т.к. $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$.

(3) Множество $\{\{\varnothing\}\}$ не транзитивно, т.к. $\{\varnothing\} \not\subseteq \{\{\varnothing\}\}$ (поскольку $\varnothing \notin \{\{\varnothing\}\}$).

(4) Множество $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ транзитивно

Определение ординала

Определение. Множество x называется *ординалом*, если x транзитивно и все элементы x транзитивны.

Определение ординала

Определение. Множество x называется *ординалом*, если x транзитивно и все элементы x транзитивны.

Свойство «быть ординалом» записывается теоретико-множественной формулой

$$\mathrm{Ord}(x) = \mathrm{Transit}(x) \mathbin{\&} \forall u \bigl(u \in x \to \mathrm{Transit}(u)\bigr).$$

Определение ординала

Определение. Множество x называется *ординалом*, если x транзитивно и все элементы x транзитивны.

Свойство «быть ординалом» записывается теоретико-множественной формулой

$$\mathrm{Ord}(x) = \mathrm{Transit}(x) \,\&\, \forall u \big(u \in x \to \mathrm{Transit}(u)\big).$$

Примеры. (1) Каждое натуральное число является ординалом (каждое следующее состоит из всех предыдущих):

Определение ординала

Определение. Множество x называется *ординалом*, если x транзитивно и все элементы x транзитивны.

Свойство «быть ординалом» записывается теоретико-множественной формулой

$$\mathrm{Ord}(x) = \mathrm{Transit}(x) \;\&\; \forall u\big(u \in x \to \mathrm{Transit}(u)\big).$$

Примеры. (1) Каждое натуральное число является ординалом (каждое следующее состоит из всех предыдущих):

$$\varnothing$$

Определение ординала

Определение. Множество x называется *ординалом*, если x транзитивно и все элементы x транзитивны.

Свойство «быть ординалом» записывается теоретико-множественной формулой

$$\mathrm{Ord}(x) = \mathrm{Transit}(x) \,\&\, \forall u \big(u \in x \to \mathrm{Transit}(u)\big).$$

Примеры. (1) Каждое натуральное число является ординалом (каждое следующее состоит из всех предыдущих):

$$\varnothing \in \{\varnothing\}$$

Определение ординала

Определение. Множество x называется *ординалом*, если x транзитивно и все элементы x транзитивны.

Свойство «быть ординалом» записывается теоретико-множественной формулой

$$\mathrm{Ord}(x) = \mathrm{Transit}(x) \mathbin{\&} \forall u \big(u \in x \to \mathrm{Transit}(u) \big).$$

Примеры. (1) Каждое натуральное число является ординалом (каждое следующее состоит из всех предыдущих):

$$\varnothing \in \{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

Определение ординала

Определение. Множество x называется *ординалом*, если x транзитивно и все элементы x транзитивны.

Свойство «быть ординалом» записывается теоретико-множественной формулой

$$\mathrm{Ord}(x) = \mathrm{Transit}(x)\ \&\ \forall u\big(u \in x \to \mathrm{Transit}(u)\big).$$

Примеры. (1) Каждое натуральное число является ординалом (каждое следующее состоит из всех предыдущих):

$$\varnothing \in \{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$$

Определение ординала

Определение. Множество x называется *ординалом*, если x транзитивно и все элементы x транзитивны.

Свойство «быть ординалом» записывается теоретико-множественной формулой

$$\mathrm{Ord}(x) = \mathrm{Transit}(x) \mathbin{\&} \forall u\big(u \in x \to \mathrm{Transit}(u)\big).$$

Примеры. (1) Каждое натуральное число является ординалом (каждое следующее состоит из всех предыдущих):

$$\varnothing \in \{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \in \ldots$$

Определение ординала

Определение. Множество x называется *ординалом*, если x транзитивно и все элементы x транзитивны.

Свойство «быть ординалом» записывается теоретико-множественной формулой

$$\mathrm{Ord}(x) = \mathrm{Transit}(x)\ \&\ \forall u\big(u \in x \to \mathrm{Transit}(u)\big).$$

Примеры. (1) Каждое натуральное число является ординалом (каждое следующее состоит из всех предыдущих):

$$\underbrace{\varnothing}_{\substack{\parallel \\ 0}} \in \{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \in \ldots$$

Определение ординала

Определение. Множество x называется *ординалом*, если x транзитивно и все элементы x транзитивны.

Свойство «быть ординалом» записывается теоретико-множественной формулой

$$\mathrm{Ord}(x) = \mathrm{Transit}(x) \mathbin{\&} \forall u \big(u \in x \to \mathrm{Transit}(u)\big).$$

Примеры. (1) Каждое натуральное число является ординалом (каждое следующее состоит из всех предыдущих):

$$\underbrace{\varnothing}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} \in \underbrace{\{\varnothing\}}_{\substack{\shortparallel \\ 1}} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \in \ldots$$

Определение ординала

Определение. Множество x называется *ординалом*, если x транзитивно и все элементы x транзитивны.

Свойство «быть ординалом» записывается теоретико-множественной формулой

$$\mathrm{Ord}(x) = \mathrm{Transit}(x) \mathbin{\&} \forall u \big(u \in x \to \mathrm{Transit}(u)\big).$$

Примеры. (1) Каждое натуральное число является ординалом (каждое следующее состоит из всех предыдущих):

$$\underbrace{\varnothing}_{\substack{\parallel \\ 0}} \in \underbrace{\{\varnothing\}}_{\substack{\parallel \\ 1}} \in \underbrace{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}}_{\substack{\parallel \\ 2}} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \in \ldots$$

Определение ординала

Определение. Множество x называется *ординалом*, если x транзитивно и все элементы x транзитивны.

Свойство «быть ординалом» записывается теоретико-множественной формулой

$$\mathrm{Ord}(x) = \mathrm{Transit}(x)\ \&\ \forall u\big(u \in x \to \mathrm{Transit}(u)\big).$$

Примеры. (1) Каждое натуральное число является ординалом (каждое следующее состоит из всех предыдущих):

$$\underbrace{\varnothing}_{\overset{\shortparallel}{0}} \in \underbrace{\{\varnothing\}}_{\overset{\shortparallel}{1}} \in \underbrace{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}}_{\overset{\shortparallel}{2}} \in \underbrace{\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}}_{\overset{\shortparallel}{3}} \in \dots$$

Определение ординала

Определение. Множество x называется *ординалом*, если x транзитивно и все элементы x транзитивны.

Свойство «быть ординалом» записывается теоретико-множественной формулой

$$\mathrm{Ord}(x) = \mathrm{Transit}(x) \mathbin{\&} \forall u \big(u \in x \to \mathrm{Transit}(u)\big).$$

Примеры. (1) Каждое натуральное число является ординалом (каждое следующее состоит из всех предыдущих):

$$\underbrace{\varnothing}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} \in \underbrace{\{\varnothing\}}_{\substack{\shortparallel \\ 1}} \in \underbrace{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}}_{\substack{\shortparallel \\ 2}} \in \underbrace{\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}}_{\substack{\shortparallel \\ 3}} \in \ldots$$

(2) Множество $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$ транзитивно, но не является ординалом.

Определение ординала

Определение. Множество x называется *ординалом*, если x транзитивно и все элементы x транзитивны.

Свойство «быть ординалом» записывается теоретико-множественной формулой

$$\mathrm{Ord}(x) = \mathrm{Transit}(x)\ \&\ \forall u\big(u \in x \to \mathrm{Transit}(u)\big).$$

Примеры. (1) Каждое натуральное число является ординалом (каждое следующее состоит из всех предыдущих):

$$\underbrace{\varnothing}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} \in \underbrace{\{\varnothing\}}_{\substack{\shortparallel \\ 1}} \in \underbrace{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}}_{\substack{\shortparallel \\ 2}} \in \underbrace{\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}}_{\substack{\shortparallel \\ 3}} \in \ldots$$

(2) Множество $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$ транзитивно, но не является ординалом.
(3) Множество $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ всех натуральных чисел тоже является ординалом, но существование ω мы докажем чуть позже.

Элементы ординалов — ординалы / Аксиома регулярности

Предложение 1. *Любой элемент ординала является ординалом.*

Предложение 1. *Любой элемент ординала является ординалом.*

Доказательство: Пусть α — ординал и $\beta \in \alpha$.

Элементы ординалов — ординалы / Аксиома регулярности

Предложение 1. *Любой элемент ординала является ординалом.*

Доказательство: Пусть α — ординал и $\beta \in \alpha$. Т.к. α — ординал, то β транзитивно.

Предложение 1. *Любой элемент ординала является ординалом.*

Доказательство: Пусть α — ординал и $\beta \in \alpha$. Т.к. α — ординал, то β транзитивно. Докажем, что любой элемент $\gamma \in \beta$ тоже транзитивен.

Элементы ординалов — ординалы / Аксиома регулярности

Предложение 1. *Любой элемент ординала является ординалом.*

Доказательство: Пусть α — ординал и $\beta \in \alpha$. Т.к. α — ординал, то β транзитивно. Докажем, что любой элемент $\gamma \in \beta$ тоже транзитивен. Из транзитивности α следует, что $\beta \subseteq \alpha$.

Элементы ординалов — ординалы / Аксиома регулярности

Предложение 1. *Любой элемент ординала является ординалом.*

Доказательство: Пусть α — ординал и $\beta \in \alpha$. Т.к. α — ординал, то β транзитивно. Докажем, что любой элемент $\gamma \in \beta$ тоже транзитивен. Из транзитивности α следует, что $\beta \subseteq \alpha$. $\implies \gamma \in \alpha$

Элементы ординалов — ординалы / Аксиома регулярности

Предложение 1. *Любой элемент ординала является ординалом.*

Доказательство: Пусть α — ординал и $\beta \in \alpha$. Т.к. α — ординал, то β транзитивно. Докажем, что любой элемент $\gamma \in \beta$ тоже транзитивен. Из транзитивности α следует, что $\beta \subseteq \alpha$. $\Longrightarrow \gamma \in \alpha \Longrightarrow$ Т.к. α — ординал, то γ транзитивно. $\square$

Элементы ординалов — ординалы / Аксиома регулярности

Предложение 1. *Любой элемент ординала является ординалом.*

Доказательство: Пусть α — ординал и $\beta \in \alpha$. Т.к. α — ординал, то β транзитивно. Докажем, что любой элемент $\gamma \in \beta$ тоже транзитивен. Из транзитивности α следует, что $\beta \subseteq \alpha$. $\Longrightarrow \gamma \in \alpha \Longrightarrow$ Т.к. α — ординал, то γ транзитивно. $\square$

Для развития дальнейшей теории ординалов нам потребуется следующая аксиома:

Предложение 1. *Любой элемент ординала является ординалом.*

Доказательство: Пусть α — ординал и $\beta \in \alpha$. Т.к. α — ординал, то β транзитивно. Докажем, что любой элемент $\gamma \in \beta$ тоже транзитивен. Из транзитивности α следует, что $\beta \subseteq \alpha$. $\Longrightarrow \gamma \in \alpha \Longrightarrow$ Т.к. α — ординал, то γ транзитивно. $\square$

Для развития дальнейшей теории ординалов нам потребуется следующая аксиома:

Аксиома регулярности ZF. *Для любого непустого множества x существует элемент $y \in x$ такой, что $y \cap x = \varnothing$.*

Элементы ординалов — ординалы / Аксиома регулярности

Предложение 1. *Любой элемент ординала является ординалом.*

Доказательство: Пусть α — ординал и $\beta \in \alpha$. Т.к. α — ординал, то β транзитивно. Докажем, что любой элемент $\gamma \in \beta$ тоже транзитивен. Из транзитивности α следует, что $\beta \subseteq \alpha$. $\Longrightarrow \gamma \in \alpha \Longrightarrow$ Т.к. α — ординал, то γ транзитивно. $\square$

Для развития дальнейшей теории ординалов нам потребуется следующая аксиома:

Аксиома регулярности ZF. *Для любого непустого множества x существует элемент $y \in x$ такой, что $y \cap x = \varnothing$.*

Предложение 2 (об аксиоме регулярности).
В теории множеств ZF следующие утверждения эквивалентны:

Предложение 1. *Любой элемент ординала является ординалом.*

Доказательство: Пусть α — ординал и $\beta \in \alpha$. Т.к. α — ординал, то β транзитивно. Докажем, что любой элемент $\gamma \in \beta$ тоже транзитивен. Из транзитивности α следует, что $\beta \subseteq \alpha$. $\implies \gamma \in \alpha \implies$ Т.к. α — ординал, то γ транзитивно. $\square$

Для развития дальнейшей теории ординалов нам потребуется следующая аксиома:

Аксиома регулярности ZF. *Для любого непустого множества x существует элемент $y \in x$ такой, что $y \cap x = \varnothing$.*

Предложение 2 (об аксиоме регулярности).
В теории множеств ZF следующие утверждения эквивалентны:

(1) *Аксиома регулярности;*

Элементы ординалов — ординалы / Аксиома регулярности

Предложение 1. *Любой элемент ординала является ординалом.*

Доказательство: Пусть α — ординал и $\beta \in \alpha$. Т.к. α — ординал, то β транзитивно. Докажем, что любой элемент $\gamma \in \beta$ тоже транзитивен. Из транзитивности α следует, что $\beta \subseteq \alpha$. $\Longrightarrow \gamma \in \alpha \Longrightarrow$ Т.к. α — ординал, то γ транзитивно. $\square$

Для развития дальнейшей теории ординалов нам потребуется следующая аксиома:

Аксиома регулярности ZF. *Для любого непустого множества x существует элемент $y \in x$ такой, что $y \cap x = \varnothing$.*

Предложение 2 (об аксиоме регулярности).
В теории множеств ZF следующие утверждения эквивалентны:

(1) *Аксиома регулярности;*

(2) *Не существует счётной последовательности $\{x_n \mid n \in \omega\}$ множеств таких, что $x_0 \ni x_1 \ni \cdots \ni x_n \ni x_{n+1} \ldots$.*

Предложение об аксиоме регулярности и его следствия

Доказательство:

Предложение об аксиоме регулярности и его следствия

Доказательство: (1)⇒(2) Допустим, напротив, существует убывающая последовательность $x_0 \ni x_1 \ni \cdots \ni x_n \ni x_{n+1} \ldots$.

Предложение об аксиоме регулярности и его следствия

Доказательство: (1)⇒(2) Допустим, напротив, существует убывающая последовательность $x_0 \ni x_1 \ni \cdots \ni x_n \ni x_{n+1} \ldots$. Рассмотрим множество $x=\{x_n \mid n\in\omega\}$.

Предложение об аксиоме регулярности и его следствия

Доказательство: (1)$\Rightarrow$(2) Допустим, напротив, существует убывающая последовательность $x_0 \ni x_1 \ni \dots \ni x_n \ni x_{n+1} \dots$. Рассмотрим множество $x{=}\{x_n \mid n{\in}\omega\}$. $\Longrightarrow$ В силу (1) существует $n \in \omega$ такой, что $x_n \cap x = \varnothing$.

Предложение об аксиоме регулярности и его следствия

Доказательство: (1)⇒(2) Допустим, напротив, существует убывающая последовательность $x_0 \ni x_1 \ni \cdots \ni x_n \ni x_{n+1} \ldots$. Рассмотрим множество $x{=}\{x_n \mid n{\in}\omega\}$. $\Longrightarrow$ В силу (1) существует $n \in \omega$ такой, что $x_n \cap x = \varnothing$. С другой стороны, очевидно $x_{n+1} \in x_n \cap x$.

Предложение об аксиоме регулярности и его следствия

Доказательство: (1)⇒(2) Допустим, напротив, существует убывающая последовательность $x_0 \ni x_1 \ni \cdots \ni x_n \ni x_{n+1} \ldots$. Рассмотрим множество $x{=}\{x_n \mid n{\in}\omega\}$.
$\Longrightarrow$ В силу (1) существует $n \in \omega$ такой, что $x_n \cap x = \varnothing$. С другой стороны, очевидно $x_{n+1} \in x_n \cap x$. Противоречие.

Предложение об аксиоме регулярности и его следствия

Доказательство: (1)$\Rightarrow$(2) Допустим, напротив, существует убывающая последовательность $x_0 \ni x_1 \ni \cdots \ni x_n \ni x_{n+1} \ldots$. Рассмотрим множество $x{=}\{x_n \mid n{\in}\omega\}$. $\Longrightarrow$ В силу (1) существует $n \in \omega$ такой, что $x_n \cap x = \varnothing$. С другой стороны, очевидно $x_{n+1} \in x_n \cap x$. Противоречие.

(2)$\Rightarrow$(1) Допустим, напротив, существует $x \neq \varnothing$ такое, что $\forall y \in x(y \cap x \neq \varnothing)$.

Предложение об аксиоме регулярности и его следствия

Доказательство: (1)$\Rightarrow$(2) Допустим, напротив, существует убывающая последовательность $x_0 \ni x_1 \ni \cdots \ni x_n \ni x_{n+1} \ldots$. Рассмотрим множество $x{=}\{x_n \mid n{\in}\omega\}$. $\Longrightarrow$ В силу (1) существует $n \in \omega$ такой, что $x_n \cap x = \varnothing$. С другой стороны, очевидно $x_{n+1} \in x_n \cap x$. Противоречие.

(2)$\Rightarrow$(1) Допустим, напротив, существует $x \neq \varnothing$ такое, что $\forall y \in x(y \cap x \neq \varnothing)$. Т.к. $x \neq \varnothing$, существует $x_0 \in x$.

Предложение об аксиоме регулярности и его следствия

Доказательство: (1)⇒(2) Допустим, напротив, существует убывающая последовательность $x_0 \ni x_1 \ni \cdots \ni x_n \ni x_{n+1} \ldots$. Рассмотрим множество $x{=}\{x_n \mid n{\in}\omega\}$. $\Longrightarrow$ В силу (1) существует $n \in \omega$ такой, что $x_n \cap x = \varnothing$. С другой стороны, очевидно $x_{n+1} \in x_n \cap x$. Противоречие.

(2)⇒(1) Допустим, напротив, существует $x \neq \varnothing$ такое, что $\forall y \in x(y \cap x \neq \varnothing)$. Т.к. $x \neq \varnothing$, существует $x_0 \in x$. $\Longrightarrow$ В силу предположения, $x_0 \cap x \neq \varnothing$.

Предложение об аксиоме регулярности и его следствия

Доказательство: (1)$\Rightarrow$(2) Допустим, напротив, существует убывающая последовательность $x_0 \ni x_1 \ni \cdots \ni x_n \ni x_{n+1} \ldots$. Рассмотрим множество $x{=}\{x_n \mid n{\in}\omega\}$. $\Longrightarrow$ В силу (1) существует $n \in \omega$ такой, что $x_n \cap x = \varnothing$. С другой стороны, очевидно $x_{n+1} \in x_n \cap x$. Противоречие.

(2)$\Rightarrow$(1) Допустим, напротив, существует $x \neq \varnothing$ такое, что $\forall y \in x(y \cap x \neq \varnothing)$. Т.к. $x \neq \varnothing$, существует $x_0 \in x$. $\Longrightarrow$ В силу предположения, $x_0 \cap x \neq \varnothing$. $\Longrightarrow$ Существует $x_1 \in x_0 \cap x$.

Предложение об аксиоме регулярности и его следствия

Доказательство: (1)⇒(2) Допустим, напротив, существует убывающая последовательность $x_0 \ni x_1 \ni \dots \ni x_n \ni x_{n+1} \dots$. Рассмотрим множество $x = \{x_n \mid n \in \omega\}$. $\Longrightarrow$ В силу (1) существует $n \in \omega$ такой, что $x_n \cap x = \varnothing$. С другой стороны, очевидно $x_{n+1} \in x_n \cap x$. Противоречие.

(2)⇒(1) Допустим, напротив, существует $x \neq \varnothing$ такое, что $\forall y \in x (y \cap x \neq \varnothing)$. Т.к. $x \neq \varnothing$, существует $x_0 \in x$. $\Longrightarrow$ В силу предположения, $x_0 \cap x \neq \varnothing$. $\Longrightarrow$ Существует $x_1 \in x_0 \cap x$. $\Longrightarrow$ Т.к. $x_1 \in x$, то в силу предположения, $x_1 \cap x \neq \varnothing$.

Предложение об аксиоме регулярности и его следствия

Доказательство: (1)⇒(2) Допустим, напротив, существует убывающая последовательность $x_0 \ni x_1 \ni \cdots \ni x_n \ni x_{n+1} \ldots$. Рассмотрим множество $x{=}\{x_n \mid n{\in}\omega\}$. $\Longrightarrow$ В силу (1) существует $n \in \omega$ такой, что $x_n \cap x = \varnothing$. С другой стороны, очевидно $x_{n+1} \in x_n \cap x$. Противоречие.

(2)⇒(1) Допустим, напротив, существует $x \neq \varnothing$ такое, что $\forall y \in x(y \cap x \neq \varnothing)$. Т.к. $x \neq \varnothing$, существует $x_0 \in x$. $\Longrightarrow$ В силу предположения, $x_0 \cap x \neq \varnothing$. $\Longrightarrow$ Существует $x_1 \in x_0 \cap x$. $\Longrightarrow$ Т.к. $x_1 \in x$, то в силу предположения, $x_1 \cap x \neq \varnothing$. $\Longrightarrow$ Существует $x_2 \in x_1 \cap x$.

Предложение об аксиоме регулярности и его следствия

Доказательство: (1)⇒(2) Допустим, напротив, существует убывающая последовательность $x_0 \ni x_1 \ni \cdots \ni x_n \ni x_{n+1} \ldots$. Рассмотрим множество $x{=}\{x_n \mid n{\in}\omega\}$. $\Longrightarrow$ В силу (1) существует $n \in \omega$ такой, что $x_n \cap x = \varnothing$. С другой стороны, очевидно $x_{n+1} \in x_n \cap x$. Противоречие.

(2)⇒(1) Допустим, напротив, существует $x \neq \varnothing$ такое, что $\forall y \in x(y \cap x \neq \varnothing)$. Т.к. $x \neq \varnothing$, существует $x_0 \in x$. $\Longrightarrow$ В силу предположения, $x_0 \cap x \neq \varnothing$. $\Longrightarrow$ Существует $x_1 \in x_0 \cap x$. $\Longrightarrow$ Т.к. $x_1 \in x$, то в силу предположения, $x_1 \cap x \neq \varnothing$. $\Longrightarrow$ Существует $x_2 \in x_1 \cap x$. Рассуждая далее аналогичным образом (с помощью индукции в метатеории), находим последовательность $x_0 \ni x_1 \ni \cdots \ni x_n \ni x_{n+1} \ldots$.

Предложение об аксиоме регулярности и его следствия

Доказательство: (1)$\Rightarrow$(2) Допустим, напротив, существует убывающая последовательность $x_0 \ni x_1 \ni \cdots \ni x_n \ni x_{n+1} \ldots$. Рассмотрим множество $x = \{x_n \mid n \in \omega\}$. $\Longrightarrow$ В силу (1) существует $n \in \omega$ такой, что $x_n \cap x = \varnothing$. С другой стороны, очевидно $x_{n+1} \in x_n \cap x$. Противоречие.

(2)$\Rightarrow$(1) Допустим, напротив, существует $x \neq \varnothing$ такое, что $\forall y \in x(y \cap x \neq \varnothing)$. Т.к. $x \neq \varnothing$, существует $x_0 \in x$. $\Longrightarrow$ В силу предположения, $x_0 \cap x \neq \varnothing$. $\Longrightarrow$ Существует $x_1 \in x_0 \cap x$. $\Longrightarrow$ Т.к. $x_1 \in x$, то в силу предположения, $x_1 \cap x \neq \varnothing$. $\Longrightarrow$ Существует $x_2 \in x_1 \cap x$. Рассуждая далее аналогичным образом (с помощью индукции в метатеории), находим последовательность $x_0 \ni x_1 \ni \cdots \ni x_n \ni x_{n+1} \ldots$. Противоречие $\square$

Предложение об аксиоме регулярности и его следствия

Доказательство: (1)$\Rightarrow$(2) Допустим, напротив, существует убывающая последовательность $x_0 \ni x_1 \ni \cdots \ni x_n \ni x_{n+1} \ldots$. Рассмотрим множество $x{=}\{x_n \mid n{\in}\omega\}$. $\Longrightarrow$ В силу (1) существует $n \in \omega$ такой, что $x_n \cap x = \varnothing$. С другой стороны, очевидно $x_{n+1} \in x_n \cap x$. Противоречие.

(2)$\Rightarrow$(1) Допустим, напротив, существует $x \neq \varnothing$ такое, что $\forall y \in x(y \cap x \neq \varnothing)$. Т.к. $x \neq \varnothing$, существует $x_0 \in x$. $\Longrightarrow$ В силу предположения, $x_0 \cap x \neq \varnothing$. $\Longrightarrow$ Существует $x_1 \in x_0 \cap x$. $\Longrightarrow$ Т.к. $x_1 \in x$, то в силу предположения, $x_1 \cap x \neq \varnothing$. $\Longrightarrow$ Существует $x_2 \in x_1 \cap x$. Рассуждая далее аналогичным образом (с помощью индукции в метатеории), находим последовательность $x_0 \ni x_1 \ni \cdots \ni x_n \ni x_{n+1} \ldots$. Противоречие □

Следствие 3. *В теории множеств ZF справедливы следующие утверждения:*

Предложение об аксиоме регулярности и его следствия

Доказательство: (1)⇒(2) Допустим, напротив, существует убывающая последовательность $x_0 \ni x_1 \ni \dots \ni x_n \ni x_{n+1} \dots$. Рассмотрим множество $x{=}\{x_n \mid n{\in}\omega\}$. $\Longrightarrow$ В силу (1) существует $n \in \omega$ такой, что $x_n \cap x = \varnothing$. С другой стороны, очевидно $x_{n+1} \in x_n \cap x$. Противоречие.

(2)⇒(1) Допустим, напротив, существует $x \neq \varnothing$ такое, что $\forall y \in x(y \cap x \neq \varnothing)$. Т.к. $x \neq \varnothing$, существует $x_0 \in x$. $\Longrightarrow$ В силу предположения, $x_0 \cap x \neq \varnothing$. $\Longrightarrow$ Существует $x_1 \in x_0 \cap x$. $\Longrightarrow$ Т.к. $x_1 \in x$, то в силу предположения, $x_1 \cap x \neq \varnothing$. $\Longrightarrow$ Существует $x_2 \in x_1 \cap x$. Рассуждая далее аналогичным образом (с помощью индукции в метатеории), находим последовательность $x_0 \ni x_1 \ni \dots \ni x_n \ni x_{n+1} \dots$.
Противоречие □

Следствие 3. *В теории множеств ZF справедливы следующие утверждения:*

(1) *Не существует множества x такого, что $x \in x$.*

Предложение об аксиоме регулярности и его следствия

Доказательство: (1)⇒(2) Допустим, напротив, существует убывающая последовательность $x_0 \ni x_1 \ni \dots \ni x_n \ni x_{n+1} \dots$. Рассмотрим множество $x = \{x_n \mid n \in \omega\}$. $\Longrightarrow$ В силу (1) существует $n \in \omega$ такой, что $x_n \cap x = \varnothing$. С другой стороны, очевидно $x_{n+1} \in x_n \cap x$. Противоречие.

(2)⇒(1) Допустим, напротив, существует $x \neq \varnothing$ такое, что $\forall y \in x (y \cap x \neq \varnothing)$. Т.к. $x \neq \varnothing$, существует $x_0 \in x$. $\Longrightarrow$ В силу предположения, $x_0 \cap x \neq \varnothing$. $\Longrightarrow$ Существует $x_1 \in x_0 \cap x$. $\Longrightarrow$ Т.к. $x_1 \in x$, то в силу предположения, $x_1 \cap x \neq \varnothing$. $\Longrightarrow$ Существует $x_2 \in x_1 \cap x$. Рассуждая далее аналогичным образом (с помощью индукции в метатеории), находим последовательность $x_0 \ni x_1 \ni \dots \ni x_n \ni x_{n+1} \dots$. Противоречие $\square$

Следствие 3. *В теории множеств ZF справедливы следующие утверждения:*

(1) *Не существует множества x такого, что $x \in x$.*

(2) *Не существует множеств x и y таких, что $x \in y$ и $y \in x$.*

Предложение об аксиоме регулярности и его следствия

Доказательство: (1)⇒(2) Допустим, напротив, существует убывающая последовательность $x_0 \ni x_1 \ni \dots \ni x_n \ni x_{n+1} \dots$. Рассмотрим множество $x = \{x_n \mid n \in \omega\}$. $\Longrightarrow$ В силу (1) существует $n \in \omega$ такой, что $x_n \cap x = \varnothing$. С другой стороны, очевидно $x_{n+1} \in x_n \cap x$. Противоречие.

(2)⇒(1) Допустим, напротив, существует $x \neq \varnothing$ такое, что $\forall y \in x(y \cap x \neq \varnothing)$. Т.к. $x \neq \varnothing$, существует $x_0 \in x$. $\Longrightarrow$ В силу предположения, $x_0 \cap x \neq \varnothing$. $\Longrightarrow$ Существует $x_1 \in x_0 \cap x$. $\Longrightarrow$ Т.к. $x_1 \in x$, то в силу предположения, $x_1 \cap x \neq \varnothing$. $\Longrightarrow$ Существует $x_2 \in x_1 \cap x$. Рассуждая далее аналогичным образом (с помощью индукции в метатеории), находим последовательность $x_0 \ni x_1 \ni \dots \ni x_n \ni x_{n+1} \dots$.
Противоречие □

Следствие 3. *В теории множеств ZF справедливы следующие утверждения:*

(1) *Не существует множества x такого, что $x \in x$.*
(2) *Не существует множеств x и y таких, что $x \in y$ и $y \in x$.*
(3) *Не существует множества всех множеств.* □

Определение ординала $\alpha + 1$ и его свойства

Определение. Для любого ординала α положим $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Определение ординала $\alpha + 1$ и его свойства

Определение. Для любого ординала α положим $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Замечание. Множество $\alpha \cup \{\alpha\}$ существует!

Определение ординала $\alpha + 1$ и его свойства

Определение. Для любого ординала α положим $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Замечание. Множество $\alpha \cup \{\alpha\}$ существует! Действительно, по аксиоме пары существует $\{\alpha\} = \{\alpha, \alpha\}$.

Определение ординала $\alpha + 1$ и его свойства

Определение. Для любого ординала α положим $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Замечание. Множество $\alpha \cup \{\alpha\}$ существует! Действительно, по аксиоме пары существует $\{\alpha\} = \{\alpha, \alpha\}$. $\Longrightarrow$ Снова применяя аксиому пары к множествам α и $\{\alpha\}$, заключаем, что существует множество $\{\alpha, \{\alpha\}\}$.

Определение ординала $\alpha + 1$ и его свойства

Определение. Для любого ординала α положим $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Замечание. Множество $\alpha \cup \{\alpha\}$ существует! Действительно, по аксиоме пары существует $\{\alpha\} = \{\alpha, \alpha\}$. $\Longrightarrow$ Снова применяя аксиому пары к множествам α и $\{\alpha\}$, заключаем, что существует множество $\{\alpha, \{\alpha\}\}$. $\Longrightarrow$ По аксиоме объединения существует множество $\bigcup\{\alpha, \{\alpha\}\} = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Определение ординала $\alpha + 1$ и его свойства

Определение. Для любого ординала α положим $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Замечание. Множество $\alpha \cup \{\alpha\}$ существует! Действительно, по аксиоме пары существует $\{\alpha\} = \{\alpha, \alpha\}$. $\Longrightarrow$ Снова применяя аксиому пары к множествам α и $\{\alpha\}$, заключаем, что существует множество $\{\alpha, \{\alpha\}\}$. $\Longrightarrow$ По аксиоме объединения существует множество $\bigcup\{\alpha, \{\alpha\}\} = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Предложение 4. *Для любого ординала α множество $\alpha + 1$ тоже является ординалом, причём $\alpha \in \alpha + 1$ и не существует ординала β со свойством $\alpha \in \beta \in \alpha + 1$.*

Определение ординала $\alpha + 1$ и его свойства

Определение. Для любого ординала α положим $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Замечание. Множество $\alpha \cup \{\alpha\}$ существует! Действительно, по аксиоме пары существует $\{\alpha\} = \{\alpha, \alpha\}$. $\Longrightarrow$ Снова применяя аксиому пары к множествам α и $\{\alpha\}$, заключаем, что существует множество $\{\alpha, \{\alpha\}\}$. $\Longrightarrow$ По аксиоме объединения существует множество $\bigcup\{\alpha, \{\alpha\}\} = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Предложение 4. *Для любого ординала α множество $\alpha + 1$ тоже является ординалом, причём $\alpha \in \alpha + 1$ и не существует ординала β со свойством $\alpha \in \beta \in \alpha + 1$.*

Доказательство: Покажем, что $\alpha+1$ транзитивно.

Определение ординала $\alpha + 1$ и его свойства

Определение. Для любого ординала α положим $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Замечание. Множество $\alpha \cup \{\alpha\}$ существует! Действительно, по аксиоме пары существует $\{\alpha\} = \{\alpha, \alpha\}$. $\Longrightarrow$ Снова применяя аксиому пары к множествам α и $\{\alpha\}$, заключаем, что существует множество $\{\alpha, \{\alpha\}\}$. $\Longrightarrow$ По аксиоме объединения существует множество $\bigcup\{\alpha, \{\alpha\}\} = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Предложение 4. *Для любого ординала* α *множество* $\alpha + 1$ *тоже является ординалом, причём* $\alpha \in \alpha + 1$ *и не существует ординала* β *со свойством* $\alpha \in \beta \in \alpha + 1$.

Доказательство: Покажем, что $\alpha{+}1$ транзитивно. Пусть $\beta{\in}\alpha{+}1$.

Определение ординала $\alpha + 1$ и его свойства

Определение. Для любого ординала α положим $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Замечание. Множество $\alpha \cup \{\alpha\}$ существует! Действительно, по аксиоме пары существует $\{\alpha\} = \{\alpha, \alpha\}$. $\Longrightarrow$ Снова применяя аксиому пары к множествам α и $\{\alpha\}$, заключаем, что существует множество $\{\alpha, \{\alpha\}\}$. $\Longrightarrow$ По аксиоме объединения существует множество $\bigcup\{\alpha, \{\alpha\}\} = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Предложение 4. *Для любого ординала α множество $\alpha + 1$ тоже является ординалом, причём $\alpha \in \alpha + 1$ и не существует ординала β со свойством $\alpha \in \beta \in \alpha + 1$.*

Доказательство: Покажем, что $\alpha{+}1$ транзитивно. Пусть $\beta{\in}\alpha{+}1$. $\Rightarrow$ $\beta{\in}\alpha$ или $\beta{=}\alpha$.

Определение ординала $\alpha + 1$ и его свойства

Определение. Для любого ординала α положим $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Замечание. Множество $\alpha \cup \{\alpha\}$ существует! Действительно, по аксиоме пары существует $\{\alpha\} = \{\alpha, \alpha\}$. $\Longrightarrow$ Снова применяя аксиому пары к множествам α и $\{\alpha\}$, заключаем, что существует множество $\{\alpha, \{\alpha\}\}$. $\Longrightarrow$ По аксиоме объединения существует множество $\bigcup\{\alpha, \{\alpha\}\} = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Предложение 4. *Для любого ординала α множество $\alpha + 1$ тоже является ординалом, причём $\alpha \in \alpha + 1$ и не существует ординала β со свойством $\alpha \in \beta \in \alpha + 1$.*

Доказательство: Покажем, что $\alpha{+}1$ транзитивно. Пусть $\beta{\in}\alpha{+}1$. $\Rightarrow$ $\beta{\in}\alpha$ или $\beta{=}\alpha$. $\Rightarrow$ В силу транзитивности α, получаем соответственно $\beta{\subseteq}\alpha{\subseteq}\alpha{+}1$ или $\beta{=}\alpha{\subseteq}\alpha{+}1$.

Определение ординала $\alpha + 1$ и его свойства

Определение. Для любого ординала α положим $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Замечание. Множество $\alpha \cup \{\alpha\}$ существует! Действительно, по аксиоме пары существует $\{\alpha\} = \{\alpha, \alpha\}$. $\Longrightarrow$ Снова применяя аксиому пары к множествам α и $\{\alpha\}$, заключаем, что существует множество $\{\alpha, \{\alpha\}\}$. $\Longrightarrow$ По аксиоме объединения существует множество $\bigcup\{\alpha, \{\alpha\}\} = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Предложение 4. *Для любого ординала α множество $\alpha + 1$ тоже является ординалом, причём $\alpha \in \alpha + 1$ и не существует ординала β со свойством $\alpha \in \beta \in \alpha + 1$.*

Доказательство: Покажем, что $\alpha+1$ транзитивно. Пусть $\beta\in\alpha+1$. $\Rightarrow$ $\beta\in\alpha$ или $\beta=\alpha$. $\Rightarrow$ В силу транзитивности α, получаем соответственно $\beta\subseteq\alpha\subseteq\alpha+1$ или $\beta=\alpha\subseteq\alpha+1$.

Докажем, что любой элемент $\beta \in \alpha + 1$ транзитивен.

Определение ординала $\alpha + 1$ и его свойства

Определение. Для любого ординала α положим $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Замечание. Множество $\alpha \cup \{\alpha\}$ существует! Действительно, по аксиоме пары существует $\{\alpha\} = \{\alpha, \alpha\}$. $\Longrightarrow$ Снова применяя аксиому пары к множествам α и $\{\alpha\}$, заключаем, что существует множество $\{\alpha, \{\alpha\}\}$. $\Longrightarrow$ По аксиоме объединения существует множество $\bigcup\{\alpha, \{\alpha\}\} = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Предложение 4. *Для любого ординала α множество $\alpha + 1$ тоже является ординалом, причём $\alpha \in \alpha + 1$ и не существует ординала β со свойством $\alpha \in \beta \in \alpha + 1$.*

Доказательство: Покажем, что $\alpha{+}1$ транзитивно. Пусть $\beta{\in}\alpha{+}1$. $\Rightarrow$ $\beta{\in}\alpha$ или $\beta{=}\alpha$. $\Rightarrow$ В силу транзитивности α, получаем соответственно $\beta{\subseteq}\alpha{\subseteq}\alpha{+}1$ или $\beta{=}\alpha{\subseteq}\alpha{+}1$.

Докажем, что любой элемент $\beta \in \alpha + 1$ транзитивен. Если $\beta{\in}\alpha$, то β транзитивен, т.к. все элементы α транзитивны.

Определение ординала $\alpha + 1$ и его свойства

Определение. Для любого ординала α положим $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Замечание. Множество $\alpha \cup \{\alpha\}$ существует! Действительно, по аксиоме пары существует $\{\alpha\} = \{\alpha, \alpha\}$. $\Longrightarrow$ Снова применяя аксиому пары к множествам α и $\{\alpha\}$, заключаем, что существует множество $\{\alpha, \{\alpha\}\}$. $\Longrightarrow$ По аксиоме объединения существует множество $\bigcup\{\alpha, \{\alpha\}\} = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Предложение 4. *Для любого ординала α множество $\alpha + 1$ тоже является ординалом, причём $\alpha \in \alpha + 1$ и не существует ординала β со свойством $\alpha \in \beta \in \alpha + 1$.*

Доказательство: Покажем, что $\alpha+1$ транзитивно. Пусть $\beta\in\alpha+1$. $\Rightarrow$ $\beta\in\alpha$ или $\beta=\alpha$. $\Rightarrow$ В силу транзитивности α, получаем соответственно $\beta\subseteq\alpha\subseteq\alpha+1$ или $\beta=\alpha\subseteq\alpha+1$.

Докажем, что любой элемент $\beta \in \alpha + 1$ транзитивен. Если $\beta\in\alpha$, то β транзитивен, т.к. все элементы α транзитивны. Если же $\beta = \alpha$, то транзитивность β очевидна.

Определение ординала $\alpha + 1$ и его свойства

Определение. Для любого ординала α положим $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Замечание. Множество $\alpha \cup \{\alpha\}$ существует! Действительно, по аксиоме пары существует $\{\alpha\} = \{\alpha, \alpha\}$. $\Longrightarrow$ Снова применяя аксиому пары к множествам α и $\{\alpha\}$, заключаем, что существует множество $\{\alpha, \{\alpha\}\}$. $\Longrightarrow$ По аксиоме объединения существует множество $\bigcup\{\alpha, \{\alpha\}\} = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Предложение 4. *Для любого ординала α множество $\alpha + 1$ тоже является ординалом, причём $\alpha \in \alpha + 1$ и не существует ординала β со свойством $\alpha \in \beta \in \alpha + 1$.*

Доказательство: Покажем, что $\alpha+1$ транзитивно. Пусть $\beta\in\alpha+1$. $\Rightarrow$ $\beta\in\alpha$ или $\beta=\alpha$. $\Rightarrow$ В силу транзитивности α, получаем соответственно $\beta\subseteq\alpha\subseteq\alpha+1$ или $\beta=\alpha\subseteq\alpha+1$.

Докажем, что любой элемент $\beta \in \alpha + 1$ транзитивен. Если $\beta\in\alpha$, то β транзитивен, т.к. все элементы α транзитивны. Если же $\beta = \alpha$, то транзитивность β очевидна.

Ясно, что $\alpha \in \alpha + 1$.

Определение ординала $\alpha + 1$ и его свойства

Определение. Для любого ординала α положим $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Замечание. Множество $\alpha \cup \{\alpha\}$ существует! Действительно, по аксиоме пары существует $\{\alpha\} = \{\alpha, \alpha\}$. $\Longrightarrow$ Снова применяя аксиому пары к множествам α и $\{\alpha\}$, заключаем, что существует множество $\{\alpha, \{\alpha\}\}$. $\Longrightarrow$ По аксиоме объединения существует множество $\bigcup\{\alpha, \{\alpha\}\} = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Предложение 4. *Для любого ординала α множество $\alpha + 1$ тоже является ординалом, причём $\alpha \in \alpha + 1$ и не существует ординала β со свойством $\alpha \in \beta \in \alpha + 1$.*

Доказательство: Покажем, что $\alpha{+}1$ транзитивно. Пусть $\beta{\in}\alpha{+}1$. $\Rightarrow$ $\beta{\in}\alpha$ или $\beta{=}\alpha$. $\Rightarrow$ В силу транзитивности α, получаем соответственно $\beta{\subseteq}\alpha{\subseteq}\alpha{+}1$ или $\beta{=}\alpha{\subseteq}\alpha{+}1$.

Докажем, что любой элемент $\beta \in \alpha + 1$ транзитивен. Если $\beta{\in}\alpha$, то β транзитивен, т.к. все элементы α транзитивны. Если же $\beta = \alpha$, то транзитивность β очевидна.

Ясно, что $\alpha \in \alpha + 1$. Допустим, существует β со свойством $\alpha \in \beta \in \alpha + 1$.

Определение ординала $\alpha + 1$ и его свойства

Определение. Для любого ординала α положим $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Замечание. Множество $\alpha \cup \{\alpha\}$ существует! Действительно, по аксиоме пары существует $\{\alpha\} = \{\alpha, \alpha\}$. $\Longrightarrow$ Снова применяя аксиому пары к множествам α и $\{\alpha\}$, заключаем, что существует множество $\{\alpha, \{\alpha\}\}$. $\Longrightarrow$ По аксиоме объединения существует множество $\bigcup\{\alpha, \{\alpha\}\} = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Предложение 4. *Для любого ординала α множество $\alpha + 1$ тоже является ординалом, причём $\alpha \in \alpha + 1$ и не существует ординала β со свойством $\alpha \in \beta \in \alpha + 1$.*

Доказательство: Покажем, что $\alpha+1$ транзитивно. Пусть $\beta\in\alpha+1$. $\Rightarrow$ $\beta\in\alpha$ или $\beta=\alpha$. $\Rightarrow$ В силу транзитивности α, получаем соответственно $\beta\subseteq\alpha\subseteq\alpha+1$ или $\beta=\alpha\subseteq\alpha+1$.

Докажем, что любой элемент $\beta \in \alpha + 1$ транзитивен. Если $\beta\in\alpha$, то β транзитивен, т.к. все элементы α транзитивны. Если же $\beta = \alpha$, то транзитивность β очевидна.

Ясно, что $\alpha \in \alpha + 1$. Допустим, существует β со свойством $\alpha \in \beta \in \alpha + 1$. $\Longrightarrow$ $\alpha \in \beta \in \alpha$ или $\alpha \in \beta = \alpha$.

Определение ординала $\alpha + 1$ и его свойства

Определение. Для любого ординала α положим $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Замечание. Множество $\alpha \cup \{\alpha\}$ существует! Действительно, по аксиоме пары существует $\{\alpha\} = \{\alpha, \alpha\}$. $\Longrightarrow$ Снова применяя аксиому пары к множествам α и $\{\alpha\}$, заключаем, что существует множество $\{\alpha, \{\alpha\}\}$. $\Longrightarrow$ По аксиоме объединения существует множество $\bigcup\{\alpha, \{\alpha\}\} = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Предложение 4. *Для любого ординала α множество $\alpha + 1$ тоже является ординалом, причём $\alpha \in \alpha + 1$ и не существует ординала β со свойством $\alpha \in \beta \in \alpha + 1$.*

Доказательство: Покажем, что $\alpha+1$ транзитивно. Пусть $\beta\in\alpha+1$. $\Rightarrow$ $\beta\in\alpha$ или $\beta=\alpha$. $\Rightarrow$ В силу транзитивности α, получаем соответственно $\beta\subseteq\alpha\subseteq\alpha+1$ или $\beta=\alpha\subseteq\alpha+1$.

Докажем, что любой элемент $\beta \in \alpha + 1$ транзитивен. Если $\beta\in\alpha$, то β транзитивен, т.к. все элементы α транзитивны. Если же $\beta = \alpha$, то транзитивность β очевидна.

Ясно, что $\alpha \in \alpha + 1$. Допустим, существует β со свойством $\alpha \in \beta \in \alpha + 1$. $\Longrightarrow$ $\alpha \in \beta \in \alpha$ или $\alpha \in \beta = \alpha$. $\Longrightarrow$ В обоих случаях получаем противоречие с аксиомой регулярности (см. Следствие 3). $\square$

Определение предельных и непредельных ординалов

Определение. Ординал α называется *непредельным*, если он представим в виде $\alpha = \beta + 1$ для некоторого ординала β.

Определение предельных и непредельных ординалов

Определение. Ординал α называется *непредельным*, если он представим в виде $\alpha = \beta + 1$ для некоторого ординала β. Ненулевой ординал α называется *предельным*, если он не представим в виде $\alpha = \beta + 1$ ни для какого ординала β.

Определение предельных и непредельных ординалов

Определение. Ординал α называется *непредельным*, если он представим в виде $\alpha = \beta + 1$ для некоторого ординала β. Ненулевой ординал α называется *предельным*, если он не представим в виде $\alpha = \beta + 1$ ни для какого ординала β.

(Нулевой ординал $\varnothing$ не является ни предельным, ни непредельным. Непредельные ординалы ещё называют ординалами-последователями.)

Определение предельных и непредельных ординалов

Определение. Ординал α называется *непредельным*, если он представим в виде $\alpha = \beta + 1$ для некоторого ординала β. Ненулевой ординал α называется *предельным*, если он не представим в виде $\alpha = \beta + 1$ ни для какого ординала β.

(Нулевой ординал $\varnothing$ не является ни предельным, ни непредельным. Непредельные ординалы ещё называют ординалами-последователями.)

Определение. С помощью классической арифметической индукции из метатеории определим последовательность ординалов, каждый из которых будем называть *натуральным числом*:

Определение предельных и непредельных ординалов

Определение. Ординал α называется *непредельным*, если он представим в виде $\alpha = \beta + 1$ для некоторого ординала β. Ненулевой ординал α называется *предельным*, если он не представим в виде $\alpha = \beta + 1$ ни для какого ординала β.

(Нулевой ординал $\varnothing$ не является ни предельным, ни непредельным. Непредельные ординалы ещё называют ординалами-последователями.)

Определение. С помощью классической арифметической индукции из метатеории определим последовательность ординалов, каждый из которых будем называть *натуральным числом*:

(1) Положим $0 = \varnothing$.

Определение предельных и непредельных ординалов

Определение. Ординал α называется *непредельным*, если он представим в виде $\alpha = \beta + 1$ для некоторого ординала β. Ненулевой ординал α называется *предельным*, если он не представим в виде $\alpha = \beta + 1$ ни для какого ординала β.

(Нулевой ординал $\varnothing$ не является ни предельным, ни непредельным. Непредельные ординалы ещё называют ординалами-последователями.)

Определение. С помощью классической арифметической индукции из метатеории определим последовательность ординалов, каждый из которых будем называть *натуральным числом*:

(1) Положим $0 = \varnothing$. Тогда 0 существует по аксиоме пустого множества, является ординалом и содежит 0 элементов.

Определение предельных и непредельных ординалов

Определение. Ординал α называется *непредельным*, если он представим в виде $\alpha = \beta + 1$ для некоторого ординала β. Ненулевой ординал α называется *предельным*, если он не представим в виде $\alpha = \beta + 1$ ни для какого ординала β.

(Нулевой ординал $\varnothing$ не является ни предельным, ни непредельным. Непредельные ординалы ещё называют ординалами-последователями.)

Определение. С помощью классической арифметической индукции из метатеории определим последовательность ординалов, каждый из которых будем называть *натуральным числом*:

(1) Положим $0 = \varnothing$. Тогда 0 существует по аксиоме пустого множества, является ординалом и содежит 0 элементов.

(2) Допустим уже определён ординал n, который содержит ровно n элементов, а именно ординалы $0, 1, \ldots, n-1$.

Определение предельных и непредельных ординалов

Определение. Ординал α называется *непредельным*, если он представим в виде $\alpha = \beta + 1$ для некоторого ординала β. Ненулевой ординал α называется *предельным*, если он не представим в виде $\alpha = \beta + 1$ ни для какого ординала β.

(Нулевой ординал $\varnothing$ не является ни предельным, ни непредельным. Непредельные ординалы ещё называют ординалами-последователями.)

Определение. С помощью классической арифметической индукции из метатеории определим последовательность ординалов, каждый из которых будем называть *натуральным числом*:

(1) Положим $0 = \varnothing$. Тогда 0 существует по аксиоме пустого множества, является ординалом и содежит 0 элементов.

(2) Допустим уже определён ординал n, который содержит ровно n элементов, а именно ординалы $0, 1, \ldots, n-1$. Положим $n + 1 = n \cup \{n\}$.

Определение предельных и непредельных ординалов

Определение. Ординал α называется *непредельным*, если он представим в виде $\alpha = \beta + 1$ для некоторого ординала β. Ненулевой ординал α называется *предельным*, если он не представим в виде $\alpha = \beta + 1$ ни для какого ординала β.

(Нулевой ординал $\varnothing$ не является ни предельным, ни непредельным. Непредельные ординалы ещё называют ординалами-последователями.)

Определение. С помощью классической арифметической индукции из метатеории определим последовательность ординалов, каждый из которых будем называть *натуральным числом*:

(1) Положим $0 = \varnothing$. Тогда 0 существует по аксиоме пустого множества, является ординалом и содежит 0 элементов.

(2) Допустим уже определён ординал n, который содержит ровно n элементов, а именно ординалы $0, 1, \ldots, n-1$. Положим $n + 1 = n \cup \{n\}$. Тогда ординал $n+1$ существует в силу Предложения 4 и содержит ровно $n+1$ элементов, а именно ординалы $0, 1, \ldots, n-1, n$.

Определение предельных и непредельных ординалов

Определение. Ординал α называется *непредельным*, если он представим в виде $\alpha = \beta + 1$ для некоторого ординала β. Ненулевой ординал α называется *предельным*, если он не представим в виде $\alpha = \beta + 1$ ни для какого ординала β.

(Нулевой ординал $\varnothing$ не является ни предельным, ни непредельным. Непредельные ординалы ещё называют ординалами-последователями.)

Определение. С помощью классической арифметической индукции из метатеории определим последовательность ординалов, каждый из которых будем называть *натуральным числом*:

(1) Положим $0 = \varnothing$. Тогда 0 существует по аксиоме пустого множества, является ординалом и содежит 0 элементов.

(2) Допустим уже определён ординал n, который содержит ровно n элементов, а именно ординалы $0, 1, \ldots, n-1$. Положим $n+1 = n \cup \{n\}$. Тогда ординал $n+1$ существует в силу Предложения 4 и содержит ровно $n+1$ элементов, а именно ординалы $0, 1, \ldots, n-1, n$. Более того, в силу Предложения 4, между ординалами n и $n+1$ нет других ординалов.

Характеристическое свойство натуральных чисел

Нам потребуется теоретико-множественная формула, определяющая свойство «множество x представимо в виде $x = y \cup \{y\}$»:

$$\mathrm{Succ}(x) = \exists y \forall z \big(z \in x \longleftrightarrow (z \in y \vee z = y)\big).$$

Заметим также, что утверждение $x = 0$ легко записывается формулой $\neg\exists y (y \in x)$.

Характеристическое свойство натуральных чисел

Нам потребуется теоретико-множественная формула, определяющая свойство «множество x представимо в виде $x = y \cup \{y\}$»:

$$\mathrm{Succ}(x) = \exists y \forall z \bigl(z \in x \longleftrightarrow (z \in y \vee z = y)\bigr).$$

Заметим также, что утверждение $x = 0$ легко записывается формулой $\neg\exists y(y \in x)$.

Лемма 5. *Множество α является натуральным числом тогда и только тогда, когда выполняется следующее теоретико-множественное свойство:*

$$\mathrm{Nat}(\alpha) = \mathrm{Ord}(\alpha) \mathbin{\&} \Bigl(\bigl(\alpha = 0 \vee \mathrm{Succ}(\alpha)\bigr) \mathbin{\&} \forall \beta \in \alpha\bigl(\beta = 0 \vee \mathrm{Succ}(\beta)\bigr)\Bigr).$$

Характеристическое свойство натуральных чисел

Нам потребуется теоретико-множественная формула, определяющая свойство «множество x представимо в виде $x = y \cup \{y\}$»:

$$\mathrm{Succ}(x) = \exists y \forall z \big(z \in x \longleftrightarrow (z \in y \vee z = y)\big).$$

Заметим также, что утверждение $x = 0$ легко записывается формулой $\neg\exists y(y \in x)$.

Лемма 5. *Множество α является натуральным числом тогда и только тогда, когда выполняется следующее теоретико-множественное свойство:*

$$\mathrm{Nat}(\alpha) = \mathrm{Ord}(\alpha) \mathbin{\&} \Big(\big(\alpha = 0 \vee \mathrm{Succ}(\alpha)\big) \mathbin{\&} \forall \beta \in \alpha\big(\beta = 0 \vee \mathrm{Succ}(\beta)\big)\Big).$$

Доказательство: ($\Longrightarrow$) По построению любой элемент α из последовательности $0, 1, \ldots, n, \ldots$ является ординалом и обладает свойством:

Характеристическое свойство натуральных чисел

Нам потребуется теоретико-множественная формула, определяющая свойство «множество x представимо в виде $x = y \cup \{y\}$»:

$$\mathrm{Succ}(x) = \exists y \forall z \big(z \in x \longleftrightarrow (z \in y \vee z = y)\big).$$

Заметим также, что утверждение $x = 0$ легко записывается формулой $\neg\exists y(y \in x)$.

Лемма 5. *Множество α является натуральным числом тогда и только тогда, когда выполняется следующее теоретико-множественное свойство:*

$$\mathrm{Nat}(\alpha) = \mathrm{Ord}(\alpha) \mathbin{\&} \Big(\big(\alpha = 0 \vee \mathrm{Succ}(\alpha)\big) \mathbin{\&} \forall \beta \in \alpha \big(\beta = 0 \vee \mathrm{Succ}(\beta)\big)\Big).$$

Доказательство: $(\Longrightarrow)$ По построению любой элемент α из последовательности $0, 1, \ldots, n, \ldots$ является ординалом и обладает свойством: $\alpha = 0$ *или* α *— непредельный и для любого* $\beta \in \alpha$ *верно, что* $\beta = 0$ *или* β *— непредельный.*

Характеристическое свойство натуральных чисел

Нам потребуется теоретико-множественная формула, определяющая свойство «множество x представимо в виде $x = y \cup \{y\}$»:

$$\mathrm{Succ}(x) = \exists y \forall z \big(z \in x \longleftrightarrow (z \in y \vee z = y)\big).$$

Заметим также, что утверждение $x = 0$ легко записывается формулой $\neg\exists y(y \in x)$.

Лемма 5. *Множество α является натуральным числом тогда и только тогда, когда выполняется следующее теоретико-множественное свойство:*

$$\mathrm{Nat}(\alpha) = \mathrm{Ord}(\alpha)\ \&\ \Big(\big(\alpha = 0 \vee \mathrm{Succ}(\alpha)\big)\ \&\ \forall \beta \in \alpha\big(\beta = 0 \vee \mathrm{Succ}(\beta)\big)\Big).$$

Доказательство: ($\Longrightarrow$) По построению любой элемент α из последовательности $0, 1, \ldots, n, \ldots$ является ординалом и обладает свойством: $\alpha = 0$ *или* α *— непредельный и для любого* $\beta \in \alpha$ *верно, что* $\beta = 0$ *или* β *— непредельный.* $\Longrightarrow$ Справедливо $\mathrm{Nat}(\alpha)$.

Характеристическое свойство натуральных чисел

($\Longleftarrow$) Предположим, ординал α удовлетворяет свойству $\mathrm{Nat}(\alpha)$.

Характеристическое свойство натуральных чисел

$(\Longleftarrow)$ Предположим, ординал α удовлетворяет свойству $\mathrm{Nat}(\alpha)$. Докажем, что тогда $\alpha = n$ для некоторого (наивного) натурального n.

Характеристическое свойство натуральных чисел

($\Longleftarrow$) Предположим, ординал α удовлетворяет свойству $\mathrm{Nat}(\alpha)$. Докажем, что тогда $\alpha = n$ для некоторого (наивного) натурального n. Обозначим $\alpha_0 = \alpha$.

Характеристическое свойство натуральных чисел

($\Longleftarrow$) Предположим, ординал α удовлетворяет свойству $\mathrm{Nat}(\alpha)$. Докажем, что тогда $\alpha = n$ для некоторого (наивного) натурального n. Обозначим $\alpha_0 = \alpha$. В силу предположения, $\alpha_0 = 0$ или α_0 — непредельный.

Характеристическое свойство натуральных чисел

($\Longleftarrow$) Предположим, ординал α удовлетворяет свойству $\mathrm{Nat}(\alpha)$. Докажем, что тогда $\alpha = n$ для некоторого (наивного) натурального n. Обозначим $\alpha_0 = \alpha$. В силу предположения, $\alpha_0 = 0$ или α_0 — непредельный. Если $\alpha_0 = 0$, то всё доказано.

Характеристическое свойство натуральных чисел

($\Longleftarrow$) Предположим, ординал α удовлетворяет свойству $\mathrm{Nat}(\alpha)$. Докажем, что тогда $\alpha = n$ для некоторого (наивного) натурального n. Обозначим $\alpha_0 = \alpha$. В силу предположения, $\alpha_0 = 0$ или α_0 — непредельный. Если $\alpha_0 = 0$, то всё доказано. Если же $\alpha_0 \neq 0$, то $\alpha_0 = \alpha_1 + 1$ для некоторого α_1.

Характеристическое свойство натуральных чисел

($\Longleftarrow$) Предположим, ординал α удовлетворяет свойству $\mathrm{Nat}(\alpha)$. Докажем, что тогда $\alpha = n$ для некоторого (наивного) натурального n. Обозначим $\alpha_0 = \alpha$. В силу предположения, $\alpha_0 = 0$ или α_0 — непредельный. Если $\alpha_0 = 0$, то всё доказано. Если же $\alpha_0 \neq 0$, то $\alpha_0 = \alpha_1 + 1$ для некоторого α_1. $\Longrightarrow$ $\alpha_1 \in \alpha_0$ и, в силу предположения, $\alpha_1 = 0$ или α_1 — непредельный.

Характеристическое свойство натуральных чисел

($\Longleftarrow$) Предположим, ординал α удовлетворяет свойству $\mathrm{Nat}(\alpha)$. Докажем, что тогда $\alpha = n$ для некоторого (наивного) натурального n. Обозначим $\alpha_0 = \alpha$. В силу предположения, $\alpha_0 = 0$ или α_0 — непредельный. Если $\alpha_0 = 0$, то всё доказано. Если же $\alpha_0 \neq 0$, то $\alpha_0 = \alpha_1 + 1$ для некоторого α_1. $\Longrightarrow$ $\alpha_1 \in \alpha_0$ и, в силу предположения, $\alpha_1 = 0$ или α_1 — непредельный. Если $\alpha_1 = 0$, то $\alpha = 1$ и утверждение доказано.

Характеристическое свойство натуральных чисел

($\Longleftarrow$) Предположим, ординал α удовлетворяет свойству $\mathrm{Nat}(\alpha)$. Докажем, что тогда $\alpha = n$ для некоторого (наивного) натурального n. Обозначим $\alpha_0 = \alpha$. В силу предположения, $\alpha_0 = 0$ или α_0 — непредельный. Если $\alpha_0 = 0$, то всё доказано. Если же $\alpha_0 \neq 0$, то $\alpha_0 = \alpha_1 + 1$ для некоторого α_1. $\Longrightarrow$ $\alpha_1 \in \alpha_0$ и, в силу предположения, $\alpha_1 = 0$ или α_1 — непредельный. Если $\alpha_1 = 0$, то $\alpha = 1$ и утверждение доказано. Если же $\alpha_1 \neq 0$, то $\alpha_1 = \alpha_2 + 1$ для некоторого α_2.

Характеристическое свойство натуральных чисел

($\Longleftarrow$) Предположим, ординал α удовлетворяет свойству $\mathrm{Nat}(\alpha)$. Докажем, что тогда $\alpha = n$ для некоторого (наивного) натурального n. Обозначим $\alpha_0 = \alpha$. В силу предположения, $\alpha_0 = 0$ или α_0 — непредельный. Если $\alpha_0 = 0$, то всё доказано. Если же $\alpha_0 \neq 0$, то $\alpha_0 = \alpha_1 + 1$ для некоторого α_1. $\Longrightarrow$ $\alpha_1 \in \alpha_0$ и, в силу предположения, $\alpha_1 = 0$ или α_1 — непредельный. Если $\alpha_1 = 0$, то $\alpha = 1$ и утверждение доказано. Если же $\alpha_1 \neq 0$, то $\alpha_1 = \alpha_2 + 1$ для некоторого α_2. $\Longrightarrow$
$\alpha_2 \in \alpha_1 \in \alpha_0$.

Характеристическое свойство натуральных чисел

($\Longleftarrow$) Предположим, ординал α удовлетворяет свойству $\mathrm{Nat}(\alpha)$. Докажем, что тогда $\alpha = n$ для некоторого (наивного) натурального n. Обозначим $\alpha_0 = \alpha$. В силу предположения, $\alpha_0 = 0$ или α_0 — непредельный. Если $\alpha_0 = 0$, то всё доказано. Если же $\alpha_0 \neq 0$, то $\alpha_0 = \alpha_1 + 1$ для некоторого α_1. $\Longrightarrow$ $\alpha_1 \in \alpha_0$ и, в силу предположения, $\alpha_1 = 0$ или α_1 — непредельный. Если $\alpha_1 = 0$, то $\alpha = 1$ и утверждение доказано. Если же $\alpha_1 \neq 0$, то $\alpha_1 = \alpha_2 + 1$ для некоторого α_2. $\Longrightarrow$ $\alpha_2 \in \alpha_1 \in \alpha_0$. $\Longrightarrow$ В силу транзитивности, $\alpha_2 \in \alpha_0$.

Характеристическое свойство натуральных чисел

($\Longleftarrow$) Предположим, ординал α удовлетворяет свойству $\mathrm{Nat}(\alpha)$. Докажем, что тогда $\alpha = n$ для некоторого (наивного) натурального n. Обозначим $\alpha_0 = \alpha$. В силу предположения, $\alpha_0 = 0$ или α_0 — непредельный. Если $\alpha_0 = 0$, то всё доказано. Если же $\alpha_0 \neq 0$, то $\alpha_0 = \alpha_1 + 1$ для некоторого α_1. $\Longrightarrow$ $\alpha_1 \in \alpha_0$ и, в силу предположения, $\alpha_1 = 0$ или α_1 — непредельный. Если $\alpha_1 = 0$, то $\alpha = 1$ и утверждение доказано. Если же $\alpha_1 \neq 0$, то $\alpha_1 = \alpha_2 + 1$ для некоторого α_2. $\Longrightarrow$ $\alpha_2 \in \alpha_1 \in \alpha_0$. $\Longrightarrow$ В силу транзитивности, $\alpha_2 \in \alpha_0$. $\Longrightarrow$ В силу предположения, $\alpha_2 = 0$ или α_2 — непредельный.

Характеристическое свойство натуральных чисел

($\Longleftarrow$) Предположим, ординал α удовлетворяет свойству $\mathrm{Nat}(\alpha)$. Докажем, что тогда $\alpha = n$ для некоторого (наивного) натурального n. Обозначим $\alpha_0 = \alpha$. В силу предположения, $\alpha_0 = 0$ или α_0 — непредельный. Если $\alpha_0 = 0$, то всё доказано. Если же $\alpha_0 \neq 0$, то $\alpha_0 = \alpha_1 + 1$ для некоторого α_1. $\Longrightarrow$ $\alpha_1 \in \alpha_0$ и, в силу предположения, $\alpha_1 = 0$ или α_1 — непредельный. Если $\alpha_1 = 0$, то $\alpha = 1$ и утверждение доказано. Если же $\alpha_1 \neq 0$, то $\alpha_1 = \alpha_2 + 1$ для некоторого α_2. $\Longrightarrow$ $\alpha_2 \in \alpha_1 \in \alpha_0$. $\Longrightarrow$ В силу транзитивности, $\alpha_2 \in \alpha_0$. $\Longrightarrow$ В силу предположения, $\alpha_2 = 0$ или α_2 — непредельный. Если $\alpha_2 = 0$, то $\alpha = 2$ и утверждение доказано.

Характеристическое свойство натуральных чисел

($\Longleftarrow$) Предположим, ординал α удовлетворяет свойству $\mathrm{Nat}(\alpha)$. Докажем, что тогда $\alpha = n$ для некоторого (наивного) натурального n. Обозначим $\alpha_0 = \alpha$. В силу предположения, $\alpha_0 = 0$ или α_0 — непредельный. Если $\alpha_0 = 0$, то всё доказано. Если же $\alpha_0 \neq 0$, то $\alpha_0 = \alpha_1 + 1$ для некоторого α_1. $\Longrightarrow$ $\alpha_1 \in \alpha_0$ и, в силу предположения, $\alpha_1 = 0$ или α_1 — непредельный. Если $\alpha_1 = 0$, то $\alpha = 1$ и утверждение доказано. Если же $\alpha_1 \neq 0$, то $\alpha_1 = \alpha_2 + 1$ для некоторого α_2. $\Longrightarrow$ $\alpha_2 \in \alpha_1 \in \alpha_0$. $\Longrightarrow$ В силу транзитивности, $\alpha_2 \in \alpha_0$. $\Longrightarrow$ В силу предположения, $\alpha_2 = 0$ или α_2 — непредельный. Если $\alpha_2 = 0$, то $\alpha = 2$ и утверждение доказано. Если же $\alpha_2 \neq 0$, то продолжая далее аналогичные рассуждения, мы построим убывающую последовательность ординалов $\alpha_0 \ni \alpha_1 \ni \dots \ni \alpha_n \ni \dots$, которая, в силу аксиомы регулярности, должна оборваться на некотором конечном шаге n, т.е. $\alpha_n = 0$.

Характеристическое свойство натуральных чисел

$(\Longleftarrow)$ Предположим, ординал α удовлетворяет свойству $\mathrm{Nat}(\alpha)$. Докажем, что тогда $\alpha = n$ для некоторого (наивного) натурального n. Обозначим $\alpha_0 = \alpha$. В силу предположения, $\alpha_0 = 0$ или α_0 — непредельный. Если $\alpha_0 = 0$, то всё доказано. Если же $\alpha_0 \neq 0$, то $\alpha_0 = \alpha_1 + 1$ для некоторого α_1. $\Longrightarrow$ $\alpha_1 \in \alpha_0$ и, в силу предположения, $\alpha_1 = 0$ или α_1 — непредельный. Если $\alpha_1 = 0$, то $\alpha = 1$ и утверждение доказано. Если же $\alpha_1 \neq 0$, то $\alpha_1 = \alpha_2 + 1$ для некоторого α_2. $\Longrightarrow$ $\alpha_2 \in \alpha_1 \in \alpha_0$. $\Longrightarrow$ В силу транзитивности, $\alpha_2 \in \alpha_0$. $\Longrightarrow$ В силу предположения, $\alpha_2 = 0$ или α_2 — непредельный. Если $\alpha_2 = 0$, то $\alpha = 2$ и утверждение доказано. Если же $\alpha_2 \neq 0$, то продолжая далее аналогичные рассуждения, мы построим убывающую последовательность ординалов $\alpha_0 \ni \alpha_1 \ni \cdots \ni \alpha_n \ni \ldots$, которая, в силу аксиомы регулярности, должна оборваться на некотором конечном шаге n, т.е. $\alpha_n = 0$. $\Longrightarrow$ $\alpha = (\ldots(0 + \underbrace{1) + \ldots + 1) + 1}_{n} = n$.

Характеристическое свойство натуральных чисел

$(\Longleftarrow)$ Предположим, ординал α удовлетворяет свойству $\mathrm{Nat}(\alpha)$. Докажем, что тогда $\alpha = n$ для некоторого (наивного) натурального n. Обозначим $\alpha_0 = \alpha$. В силу предположения, $\alpha_0 = 0$ или α_0 — непредельный. Если $\alpha_0 = 0$, то всё доказано. Если же $\alpha_0 \neq 0$, то $\alpha_0 = \alpha_1 + 1$ для некоторого α_1. $\Longrightarrow$ $\alpha_1 \in \alpha_0$ и, в силу предположения, $\alpha_1 = 0$ или α_1 — непредельный. Если $\alpha_1 = 0$, то $\alpha = 1$ и утверждение доказано. Если же $\alpha_1 \neq 0$, то $\alpha_1 = \alpha_2 + 1$ для некоторого α_2. $\Longrightarrow$ $\alpha_2 \in \alpha_1 \in \alpha_0$. $\Longrightarrow$ В силу транзитивности, $\alpha_2 \in \alpha_0$. $\Longrightarrow$ В силу предположения, $\alpha_2 = 0$ или α_2 — непредельный. Если $\alpha_2 = 0$, то $\alpha = 2$ и утверждение доказано. Если же $\alpha_2 \neq 0$, то продолжая далее аналогичные рассуждения, мы построим убывающую последовательность ординалов $\alpha_0 \ni \alpha_1 \ni \dots \ni \alpha_n \ni \dots$, которая, в силу аксиомы регулярности, должна оборваться на некотором конечном шаге n, т.е. $\alpha_n = 0$. $\Longrightarrow$ $\alpha = (\dots(0 + \underbrace{1) + \dots + 1) + 1}_{n} = n$. Что и требовалось. $\square$

Теорема о существовании ординала ω

Для доказательства существования первого бесконечного ординала потребуется следующая аксиома.

Теорема о существовании ординала ω

Для доказательства существования первого бесконечного ординала потребуется следующая аксиома.

Аксиома бесконечности ZF. *Существует множество A такое, что $\varnothing \in A$ и для любого $x \in A$ выполняется $x \cup \{x\} \in A$.*

Теорема о существовании ординала ω

Для доказательства существования первого бесконечного ординала потребуется следующая аксиома.

Аксиома бесконечности ZF. *Существует множество A такое, что $\varnothing \in A$ и для любого $x \in A$ выполняется $x \cup \{x\} \in A$.*

Замечание. Пусть A — множество из аксиомы бесконечности.

Теорема о существовании ординала ω

Для доказательства существования первого бесконечного ординала потребуется следующая аксиома.

Аксиома бесконечности ZF. *Существует множество A такое, что $\varnothing \in A$ и для любого $x \in A$ выполняется $x \cup \{x\} \in A$.*

Замечание. Пусть A — множество из аксиомы бесконечности. $\Longrightarrow$ A содержит все натуральные числа.

Теорема о существовании ординала ω

Для доказательства существования первого бесконечного ординала потребуется следующая аксиома.

Аксиома бесконечности ZF. *Существует множество* A *такое, что* $\varnothing \in A$ *и для любого* $x \in A$ *выполняется* $x \cup \{x\} \in A$.

Замечание. Пусть A — множество из аксиомы бесконечности. $\Longrightarrow$ A содержит все натуральные числа. Однако, ниоткуда не следует, что в A нет элементов, отличных от натуральных чисел.

Теорема о существовании ординала ω

Для доказательства существования первого бесконечного ординала потребуется следующая аксиома.

Аксиома бесконечности ZF. *Существует множество A такое, что $\varnothing \in A$ и для любого $x \in A$ выполняется $x \cup \{x\} \in A$.*

Замечание. Пусть A — множество из аксиомы бесконечности. $\Longrightarrow$ A содержит все натуральные числа. Однако, ниоткуда не следует, что в A нет элементов, отличных от натуральных чисел. $\Longrightarrow$ Чтобы доказать, что совокупность всех натуральных чисел образует множество, нужно удалить из A всё лишнее с помощью аксиомы выделения.

Теорема о существовании ординала ω

Для доказательства существования первого бесконечного ординала потребуется следующая аксиома.

Аксиома бесконечности ZF. *Существует множество A такое, что $\varnothing \in A$ и для любого $x \in A$ выполняется $x \cup \{x\} \in A$.*

Замечание. Пусть A — множество из аксиомы бесконечности. $\Longrightarrow$ A содержит все натуральные числа. Однако, ниоткуда не следует, что в A нет элементов, отличных от натуральных чисел. $\Longrightarrow$ Чтобы доказать, что совокупность всех натуральных чисел образует множество, нужно удалить из A всё лишнее с помощью аксиомы выделения.

Теорема 6 (о существовании ординала ω).
Существует предельный ординал ω, состоящий в точности из всех натуральных чисел, т.е. $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots\}$.

Теорема о существовании ординала ω

Для доказательства существования первого бесконечного ординала потребуется следующая аксиома.

Аксиома бесконечности ZF. *Существует множество A такое, что $\varnothing \in A$ и для любого $x \in A$ выполняется $x \cup \{x\} \in A$.*

Замечание. Пусть A — множество из аксиомы бесконечности. $\Longrightarrow$ A содержит все натуральные числа. Однако, ниоткуда не следует, что в A нет элементов, отличных от натуральных чисел. $\Longrightarrow$ Чтобы доказать, что совокупность всех натуральных чисел образует множество, нужно удалить из A всё лишнее с помощью аксиомы выделения.

Теорема 6 (о существовании ординала ω).
Существует предельный ординал ω, состоящий в точности из всех натуральных чисел, т.е. $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \ldots\}$.

Доказательство: Пусть A — множество, существование которого постулируется в аксиоме бесконечности,

Теорема о существовании ординала ω

Для доказательства существования первого бесконечного ординала потребуется следующая аксиома.

Аксиома бесконечности ZF. *Существует множество A такое, что $\varnothing \in A$ и для любого $x \in A$ выполняется $x \cup \{x\} \in A$.*

Замечание. Пусть A — множество из аксиомы бесконечности. $\Longrightarrow$ A содержит все натуральные числа. Однако, ниоткуда не следует, что в A нет элементов, отличных от натуральных чисел. $\Longrightarrow$ Чтобы доказать, что совокупность всех натуральных чисел образует множество, нужно удалить из A всё лишнее с помощью аксиомы выделения.

Теорема 6 (о существовании ординала ω).
Существует предельный ординал ω, состоящий в точности из всех натуральных чисел, т.е. $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \ldots\}$.

Доказательство: Пусть A — множество, существование которого постулируется в аксиоме бесконечности, а $\mathrm{Nat}(x)$ — теоретико-множественное свойство из Леммы 5.

Теорема о существовании ординала ω

Для доказательства существования первого бесконечного ординала потребуется следующая аксиома.

Аксиома бесконечности ZF. *Существует множество A такое, что $\varnothing \in A$ и для любого $x \in A$ выполняется $x \cup \{x\} \in A$.*

Замечание. Пусть A — множество из аксиомы бесконечности. $\Longrightarrow$ A содержит все натуральные числа. Однако, ниоткуда не следует, что в A нет элементов, отличных от натуральных чисел. $\Longrightarrow$ Чтобы доказать, что совокупность всех натуральных чисел образует множество, нужно удалить из A всё лишнее с помощью аксиомы выделения.

Теорема 6 (о существовании ординала ω).
Существует предельный ординал ω, состоящий в точности из всех натуральных чисел, т.е. $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \ldots\}$.

Доказательство: Пусть A — множество, существование которого постулируется в аксиоме бесконечности, а $\mathrm{Nat}(x)$ — теоретико-множественное свойство из Леммы 5. $\Longrightarrow$ По аксиоме выделения существует множество $\omega = \{\alpha \in A \mid \mathrm{Nat}(\alpha)\}$.

Теорема о существовании ординала ω

$\Longrightarrow$ По лемме 5 множество ω состоит в точности из всех натуральных чисел, т.е. $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots\}$.

Теорема о существовании ординала ω

$\Longrightarrow$ По лемме 5 множество ω состоит в точности из всех натуральных чисел, т.е. $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots\}$.

Докажем, что ω транзитивно.

Теорема о существовании ординала ω

$\Longrightarrow$ По лемме 5 множество ω состоит в точности из всех натуральных чисел, т.е. $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \ldots\}$.

Докажем, что ω транзитивно. Пусть $\alpha \in \omega$.

Теорема о существовании ординала ω

$\Longrightarrow$ По лемме 5 множество ω состоит в точности из всех натуральных чисел, т.е. $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots\}$.

Докажем, что ω транзитивно. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ $\alpha = \varnothing$ или α — непредельный.

Теорема о существовании ординала ω

$\Longrightarrow$ По лемме 5 множество ω состоит в точности из всех натуральных чисел, т.е. $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \ldots\}$.

Докажем, что ω транзитивно. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ $\alpha = \varnothing$ или α — непредельный.
Если $\alpha = \varnothing$, то очевидно $\alpha \subseteq \omega$.

Теорема о существовании ординала ω

$\Longrightarrow$ По лемме 5 множество ω состоит в точности из всех натуральных чисел, т.е. $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots\}$.

Докажем, что ω транзитивно. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ $\alpha = \varnothing$ или α — непредельный. Если $\alpha = \varnothing$, то очевидно $\alpha \subseteq \omega$. Если же α — непредельный, то $\alpha = n + 1$ для некоторого натурального n.

Теорема о существовании ординала ω

$\Longrightarrow$ По лемме 5 множество ω состоит в точности из всех натуральных чисел, т.е. $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots\}$.

Докажем, что ω транзитивно. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ $\alpha = \varnothing$ или α — непредельный. Если $\alpha = \varnothing$, то очевидно $\alpha \subseteq \omega$. Если же α — непредельный, то $\alpha = n + 1$ для некоторого натурального n. $\Longrightarrow$ По определению ординала $n + 1$ получаем, что $\alpha = n + 1 = \{0, 1, \dots, n\} \subseteq \omega$.

Теорема о существовании ординала ω

$\Longrightarrow$ По лемме 5 множество ω состоит в точности из всех натуральных чисел, т.е. $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots\}$.

Докажем, что ω транзитивно. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ $\alpha = \varnothing$ или α — непредельный. Если $\alpha = \varnothing$, то очевидно $\alpha \subseteq \omega$. Если же α — непредельный, то $\alpha = n + 1$ для некоторого натурального n. $\Longrightarrow$ По определению ординала $n + 1$ получаем, что $\alpha = n + 1 = \{0, 1, \dots, n\} \subseteq \omega$.

Докажем, что любой элемент ω транзитивен.

Теорема о существовании ординала ω

$\Longrightarrow$ По лемме 5 множество ω состоит в точности из всех натуральных чисел, т.е. $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots\}$.

Докажем, что ω транзитивно. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ $\alpha = \varnothing$ или α — непредельный. Если $\alpha = \varnothing$, то очевидно $\alpha \subseteq \omega$. Если же α — непредельный, то $\alpha = n + 1$ для некоторого натурального n. $\Longrightarrow$ По определению ординала $n + 1$ получаем, что $\alpha = n + 1 = \{0, 1, \dots, n\} \subseteq \omega$.

Докажем, что любой элемент ω транзитивен. Пусть $\alpha \in \omega$.

Теорема о существовании ординала ω

$\Longrightarrow$ По лемме 5 множество ω состоит в точности из всех натуральных чисел, т.е. $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots\}$.

Докажем, что ω транзитивно. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ $\alpha = \varnothing$ или α — непредельный. Если $\alpha = \varnothing$, то очевидно $\alpha \subseteq \omega$. Если же α — непредельный, то $\alpha = n + 1$ для некоторого натурального n. $\Longrightarrow$ По определению ординала $n + 1$ получаем, что $\alpha = n + 1 = \{0, 1, \dots, n\} \subseteq \omega$.

Докажем, что любой элемент ω транзитивен. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ По лемме 5 справедливо $\mathrm{Nat}(\alpha)$.

Теорема о существовании ординала ω

$\Longrightarrow$ По лемме 5 множество ω состоит в точности из всех натуральных чисел, т.е. $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots\}$.

Докажем, что ω транзитивно. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ $\alpha = \varnothing$ или α — непредельный. Если $\alpha = \varnothing$, то очевидно $\alpha \subseteq \omega$. Если же α — непредельный, то $\alpha = n + 1$ для некоторого натурального n. $\Longrightarrow$ По определению ординала $n + 1$ получаем, что $\alpha = n + 1 = \{0, 1, \dots, n\} \subseteq \omega$.

Докажем, что любой элемент ω транзитивен. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ По лемме 5 справедливо $\mathrm{Nat}(\alpha)$. В частности, α является ординалом, и значит, ω транзитивен.

Теорема о существовании ординала ω

$\Longrightarrow$ По лемме 5 множество ω состоит в точности из всех натуральных чисел, т.е. $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots\}$.

Докажем, что ω транзитивно. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ $\alpha = \varnothing$ или α — непредельный. Если $\alpha = \varnothing$, то очевидно $\alpha \subseteq \omega$. Если же α — непредельный, то $\alpha = n + 1$ для некоторого натурального n. $\Longrightarrow$ По определению ординала $n+1$ получаем, что $\alpha = n + 1 = \{0, 1, \dots, n\} \subseteq \omega$.

Докажем, что любой элемент ω транзитивен. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ По лемме 5 справедливо $\mathrm{Nat}(\alpha)$. В частности, α является ординалом, и значит, ω транзитивен.

Итак, ω — ординал.

Теорема о существовании ординала ω

$\Longrightarrow$ По лемме 5 множество ω состоит в точности из всех натуральных чисел, т.е. $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots\}$.

Докажем, что ω транзитивно. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ $\alpha = \varnothing$ или α — непредельный. Если $\alpha = \varnothing$, то очевидно $\alpha \subseteq \omega$. Если же α — непредельный, то $\alpha = n + 1$ для некоторого натурального n. $\Longrightarrow$ По определению ординала $n + 1$ получаем, что $\alpha = n + 1 = \{0, 1, \dots, n\} \subseteq \omega$.

Докажем, что любой элемент ω транзитивен. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ По лемме 5 справедливо $\mathrm{Nat}(\alpha)$. В частности, α является ординалом, и значит, ω транзитивен.

Итак, ω — ординал. Допустим, ω не является предельным.

Теорема о существовании ординала ω

$\Longrightarrow$ По лемме 5 множество ω состоит в точности из всех натуральных чисел, т.е. $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots\}$.

Докажем, что ω транзитивно. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ $\alpha = \varnothing$ или α — непредельный. Если $\alpha = \varnothing$, то очевидно $\alpha \subseteq \omega$. Если же α — непредельный, то $\alpha = n + 1$ для некоторого натурального n. $\Longrightarrow$ По определению ординала $n + 1$ получаем, что $\alpha = n + 1 = \{0, 1, \dots, n\} \subseteq \omega$.

Докажем, что любой элемент ω транзитивен. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ По лемме 5 справедливо $\mathrm{Nat}(\alpha)$. В частности, α является ординалом, и значит, ω транзитивен.

Итак, ω — ординал. Допустим, ω не является предельным. $\Longrightarrow$ Поскольку очевидно $\omega \neq \varnothing$, найдётся ординал β такой, что $\omega = \beta + 1$.

Теорема о существовании ординала ω

$\Longrightarrow$ По лемме 5 множество ω состоит в точности из всех натуральных чисел, т.е. $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \ldots\}$.

Докажем, что ω транзитивно. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ $\alpha = \varnothing$ или α — непредельный. Если $\alpha = \varnothing$, то очевидно $\alpha \subseteq \omega$. Если же α — непредельный, то $\alpha = n + 1$ для некоторого натурального n. $\Longrightarrow$ По определению ординала $n + 1$ получаем, что $\alpha = n + 1 = \{0, 1, \ldots, n\} \subseteq \omega$.

Докажем, что любой элемент ω транзитивен. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ По лемме 5 справедливо $\mathrm{Nat}(\alpha)$. В частности, α является ординалом, и значит, ω транзитивен.

Итак, ω — ординал. Допустим, ω не является предельным. $\Longrightarrow$ Поскольку очевидно $\omega \neq \varnothing$, найдётся ординал β такой, что $\omega = \beta + 1$. $\Longrightarrow$ $\beta \in \omega$

Теорема о существовании ординала ω

$\Longrightarrow$ По лемме 5 множество ω состоит в точности из всех натуральных чисел, т.е. $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots\}$.

Докажем, что ω транзитивно. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ $\alpha = \varnothing$ или α — непредельный. Если $\alpha = \varnothing$, то очевидно $\alpha \subseteq \omega$. Если же α — непредельный, то $\alpha = n + 1$ для некоторого натурального n. $\Longrightarrow$ По определению ординала $n + 1$ получаем, что $\alpha = n + 1 = \{0, 1, \dots, n\} \subseteq \omega$.

Докажем, что любой элемент ω транзитивен. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ По лемме 5 справедливо $\mathrm{Nat}(\alpha)$. В частности, α является ординалом, и значит, ω транзитивен.

Итак, ω — ординал. Допустим, ω не является предельным. $\Longrightarrow$ Поскольку очевидно $\omega \neq \varnothing$, найдётся ординал β такой, что $\omega = \beta + 1$. $\Longrightarrow$ $\beta \in \omega$ $\Longrightarrow$ $\beta \in A$

Теорема о существовании ординала ω

$\Longrightarrow$ По лемме 5 множество ω состоит в точности из всех натуральных чисел, т.е. $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots\}$.

Докажем, что ω транзитивно. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ $\alpha = \varnothing$ или α — непредельный. Если $\alpha = \varnothing$, то очевидно $\alpha \subseteq \omega$. Если же α — непредельный, то $\alpha = n + 1$ для некоторого натурального n. $\Longrightarrow$ По определению ординала $n + 1$ получаем, что $\alpha = n + 1 = \{0, 1, \dots, n\} \subseteq \omega$.

Докажем, что любой элемент ω транзитивен. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ По лемме 5 справедливо $\mathrm{Nat}(\alpha)$. В частности, α является ординалом, и значит, ω транзитивен.

Итак, ω — ординал. Допустим, ω не является предельным. $\Longrightarrow$ Поскольку очевидно $\omega \neq \varnothing$, найдётся ординал β такой, что $\omega = \beta + 1$. $\Longrightarrow$ $\beta \in \omega \Longrightarrow \beta \in A \Longrightarrow$ Поскольку A удовлетворяет аксиоме бесконечности, заключаем, что $\beta + 1 \in A$.

Теорема о существовании ординала ω

$\Longrightarrow$ По лемме 5 множество ω состоит в точности из всех натуральных чисел, т.е. $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \ldots\}$.

Докажем, что ω транзитивно. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ $\alpha = \varnothing$ или α — непредельный. Если $\alpha = \varnothing$, то очевидно $\alpha \subseteq \omega$. Если же α — непредельный, то $\alpha = n + 1$ для некоторого натурального n. $\Longrightarrow$ По определению ординала $n + 1$ получаем, что $\alpha = n + 1 = \{0, 1, \ldots, n\} \subseteq \omega$.

Докажем, что любой элемент ω транзитивен. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ По лемме 5 справедливо $\mathrm{Nat}(\alpha)$. В частности, α является ординалом, и значит, ω транзитивен.

Итак, ω — ординал. Допустим, ω не является предельным. $\Longrightarrow$ Поскольку очевидно $\omega \neq \varnothing$, найдётся ординал β такой, что $\omega = \beta + 1$. $\Longrightarrow$ $\beta \in \omega$ $\Longrightarrow$ $\beta \in A$ $\Longrightarrow$ Поскольку A удовлетворяет аксиоме бесконечности, заключаем, что $\beta + 1 \in A$. $\Longrightarrow$ $\omega = \beta + 1 \in A$.

Теорема о существовании ординала ω

$\Longrightarrow$ По лемме 5 множество ω состоит в точности из всех натуральных чисел, т.е. $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \ldots\}$.

Докажем, что ω транзитивно. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ $\alpha = \varnothing$ или α — непредельный. Если $\alpha = \varnothing$, то очевидно $\alpha \subseteq \omega$. Если же α — непредельный, то $\alpha = n + 1$ для некоторого натурального n. $\Longrightarrow$ По определению ординала $n + 1$ получаем, что $\alpha = n + 1 = \{0, 1, \ldots, n\} \subseteq \omega$.

Докажем, что любой элемент ω транзитивен. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ По лемме 5 справедливо $\mathrm{Nat}(\alpha)$. В частности, α является ординалом, и значит, ω транзитивен.

Итак, ω — ординал. Допустим, ω не является предельным. $\Longrightarrow$ Поскольку очевидно $\omega \neq \varnothing$, найдётся ординал β такой, что $\omega = \beta + 1$. $\Longrightarrow$ $\beta \in \omega$ $\Longrightarrow$ $\beta \in A$ $\Longrightarrow$ Поскольку A удовлетворяет аксиоме бесконечности, заключаем, что $\beta + 1 \in A$. $\Longrightarrow$ $\omega = \beta + 1 \in A$. Кроме этого, $\omega = \beta + 1$ — непредельный и по-прежнему, в силу характеристического свойства натуральных чисел, выполняется условие $\forall \gamma \in \omega (\gamma = 0 \vee \gamma$ — непредельный$)$.

Теорема о существовании ординала ω

$\Longrightarrow$ По лемме 5 множество ω состоит в точности из всех натуральных чисел, т.е. $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \ldots\}$.

Докажем, что ω транзитивно. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ $\alpha = \varnothing$ или α — непредельный. Если $\alpha = \varnothing$, то очевидно $\alpha \subseteq \omega$. Если же α — непредельный, то $\alpha = n + 1$ для некоторого натурального n. $\Longrightarrow$ По определению ординала $n + 1$ получаем, что $\alpha = n + 1 = \{0, 1, \ldots, n\} \subseteq \omega$.

Докажем, что любой элемент ω транзитивен. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ По лемме 5 справедливо $\mathrm{Nat}(\alpha)$. В частности, α является ординалом, и значит, ω транзитивен.

Итак, ω — ординал. Допустим, ω не является предельным. $\Longrightarrow$ Поскольку очевидно $\omega \neq \varnothing$, найдётся ординал β такой, что $\omega = \beta + 1$. $\Longrightarrow$ $\beta \in \omega$ $\Longrightarrow$ $\beta \in A$ $\Longrightarrow$ Поскольку A удовлетворяет аксиоме бесконечности, заключаем, что $\beta + 1 \in A$. $\Longrightarrow$ $\omega = \beta + 1 \in A$. Кроме этого, $\omega = \beta + 1$ — непредельный и по-прежнему, в силу характеристического свойства натуральных чисел, выполняется условие $\forall \gamma \in \omega (\gamma = 0 \vee \gamma$ — непредельный$)$. $\Longrightarrow$ $\omega \in \{\alpha \in A \mid \mathrm{Nat}(\alpha)\}$.

Теорема о существовании ординала ω

$\Longrightarrow$ По лемме 5 множество ω состоит в точности из всех натуральных чисел, т.е. $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \ldots\}$.

Докажем, что ω транзитивно. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ $\alpha = \varnothing$ или α — непредельный. Если $\alpha = \varnothing$, то очевидно $\alpha \subseteq \omega$. Если же α — непредельный, то $\alpha = n + 1$ для некоторого натурального n. $\Longrightarrow$ По определению ординала $n + 1$ получаем, что $\alpha = n + 1 = \{0, 1, \ldots, n\} \subseteq \omega$.

Докажем, что любой элемент ω транзитивен. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ По лемме 5 справедливо $\mathrm{Nat}(\alpha)$. В частности, α является ординалом, и значит, ω транзитивен.

Итак, ω — ординал. Допустим, ω не является предельным. $\Longrightarrow$ Поскольку очевидно $\omega \neq \varnothing$, найдётся ординал β такой, что $\omega = \beta + 1$. $\Longrightarrow$ $\beta \in \omega$ $\Longrightarrow$ $\beta \in A$ $\Longrightarrow$ Поскольку A удовлетворяет аксиоме бесконечности, заключаем, что $\beta + 1 \in A$. $\Longrightarrow$ $\omega = \beta + 1 \in A$. Кроме этого, $\omega = \beta + 1$ — непредельный и по-прежнему, в силу характеристического свойства натуральных чисел, выполняется условие $\forall \gamma \in \omega (\gamma = 0 \vee \gamma$ — непредельный$)$. $\Longrightarrow$ $\omega \in \{\alpha \in A \mid \mathrm{Nat}(\alpha)\}$. $\Longrightarrow$ $\omega \in \omega$.

Теорема о существовании ординала ω

$\Longrightarrow$ По лемме 5 множество ω состоит в точности из всех натуральных чисел, т.е. $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots\}$.

Докажем, что ω транзитивно. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ $\alpha = \varnothing$ или α — непредельный. Если $\alpha = \varnothing$, то очевидно $\alpha \subseteq \omega$. Если же α — непредельный, то $\alpha = n + 1$ для некоторого натурального n. $\Longrightarrow$ По определению ординала $n + 1$ получаем, что $\alpha = n + 1 = \{0, 1, \dots, n\} \subseteq \omega$.

Докажем, что любой элемент ω транзитивен. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ По лемме 5 справедливо $\mathrm{Nat}(\alpha)$. В частности, α является ординалом, и значит, ω транзитивен.

Итак, ω — ординал. Допустим, ω не является предельным. $\Longrightarrow$ Поскольку очевидно $\omega \neq \varnothing$, найдётся ординал β такой, что $\omega = \beta + 1$. $\Longrightarrow$ $\beta \in \omega$ $\Longrightarrow$ $\beta \in A$ $\Longrightarrow$ Поскольку A удовлетворяет аксиоме бесконечности, заключаем, что $\beta + 1 \in A$. $\Longrightarrow$ $\omega = \beta + 1 \in A$. Кроме этого, $\omega = \beta + 1$ — непредельный и по-прежнему, в силу характеристического свойства натуральных чисел, выполняется условие $\forall \gamma \in \omega (\gamma = 0 \vee \gamma$ — непредельный$)$. $\Longrightarrow$ $\omega \in \{\alpha \in A \mid \mathrm{Nat}(\alpha)\}$. $\Longrightarrow$ $\omega \in \omega$. Противоречие с аксиомой регулярности.

Теорема о существовании ординала ω

$\Longrightarrow$ По лемме 5 множество ω состоит в точности из всех натуральных чисел, т.е. $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots\}$.

Докажем, что ω транзитивно. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ $\alpha = \varnothing$ или α — непредельный. Если $\alpha = \varnothing$, то очевидно $\alpha \subseteq \omega$. Если же α — непредельный, то $\alpha = n + 1$ для некоторого натурального n. $\Longrightarrow$ По определению ординала $n + 1$ получаем, что $\alpha = n + 1 = \{0, 1, \dots, n\} \subseteq \omega$.

Докажем, что любой элемент ω транзитивен. Пусть $\alpha \in \omega$. $\Longrightarrow$ По лемме 5 справедливо $\mathrm{Nat}(\alpha)$. В частности, α является ординалом, и значит, ω транзитивен.

Итак, ω — ординал. Допустим, ω не является предельным. $\Longrightarrow$ Поскольку очевидно $\omega \neq \varnothing$, найдётся ординал β такой, что $\omega = \beta + 1$. $\Longrightarrow$ $\beta \in \omega$ $\Longrightarrow$ $\beta \in A$ $\Longrightarrow$ Поскольку A удовлетворяет аксиоме бесконечности, заключаем, что $\beta + 1 \in A$. $\Longrightarrow$ $\omega = \beta + 1 \in A$. Кроме этого, $\omega = \beta + 1$ — непредельный и по-прежнему, в силу характеристического свойства натуральных чисел, выполняется условие $\forall \gamma \in \omega (\gamma = 0 \vee \gamma$ — непредельный$)$. $\Longrightarrow$ $\omega \in \{\alpha \in A \mid \mathrm{Nat}(\alpha)\}$. $\Longrightarrow$ $\omega \in \omega$. Противоречие с аксиомой регулярности. Таким образом, ω — предельный ординал. $\square$

Принцип трансфинитной индукции для ординалов

Теорема 7 (принцип трансфинитной индукции).
Пусть $\Phi(x)$ *— теоретико-множественное свойство такое, что для любого ординала* α *имеет место* $\forall\beta \in \alpha\big(\Phi(\beta)\big) \longrightarrow \Phi(\alpha)$. *Тогда для любого ординала* α *справедливо свойство* $\Phi(\alpha)$.

Принцип трансфинитной индукции для ординалов

Теорема 7 (принцип трансфинитной индукции).
Пусть $\Phi(x)$ *— теоретико-множественное свойство такое, что для любого ординала* α *имеет место* $\forall\beta \in \alpha\big(\Phi(\beta)\big) \longrightarrow \Phi(\alpha)$*. Тогда для любого ординала* α *справедливо свойство* $\Phi(\alpha)$*.*

Доказательство: Допустим, напротив, существует ординал α, для которого свойство $\Phi(\alpha)$ ложно.

Принцип трансфинитной индукции для ординалов

Теорема 7 (принцип трансфинитной индукции).
Пусть $\Phi(x)$ *— теоретико-множественное свойство такое, что для любого ординала* α *имеет место* $\forall\beta \in \alpha\big(\Phi(\beta)\big) \longrightarrow \Phi(\alpha)$. *Тогда для любого ординала* α *справедливо свойство* $\Phi(\alpha)$.

Доказательство: Допустим, напротив, существует ординал α, для которого свойство $\Phi(\alpha)$ ложно. $\Longrightarrow$ Из условия теоремы следует, что утверждение $\forall\beta \in \alpha\big(\Phi(\beta)\big)$ тоже ложно.

Принцип трансфинитной индукции для ординалов

Теорема 7 (принцип трансфинитной индукции).
Пусть $\Phi(x)$ *— теоретико-множественное свойство такое, что для любого ординала* α *имеет место* $\forall\beta \in \alpha\big(\Phi(\beta)\big) \longrightarrow \Phi(\alpha)$. *Тогда для любого ординала* α *справедливо свойство* $\Phi(\alpha)$.

Доказательство: Допустим, напротив, существует ординал α, для которого свойство $\Phi(\alpha)$ ложно. $\Longrightarrow$ Из условия теоремы следует, что утверждение $\forall\beta \in \alpha\big(\Phi(\beta)\big)$ тоже ложно. $\Longrightarrow$ Существует $\beta \in \alpha$ такой, что имеет место $\neg\Phi(\beta)$.

Принцип трансфинитной индукции для ординалов

Теорема 7 (принцип трансфинитной индукции).
Пусть $\Phi(x)$ *— теоретико-множественное свойство такое, что для любого ординала* α *имеет место* $\forall\beta \in \alpha\big(\Phi(\beta)\big) \longrightarrow \Phi(\alpha)$*. Тогда для любого ординала* α *справедливо свойство* $\Phi(\alpha)$*.*

Доказательство: Допустим, напротив, существует ординал α, для которого свойство $\Phi(\alpha)$ ложно. $\Longrightarrow$ Из условия теоремы следует, что утверждение $\forall\beta \in \alpha\big(\Phi(\beta)\big)$ тоже ложно. $\Longrightarrow$ Существует $\beta \in \alpha$ такой, что имеет место $\neg\Phi(\beta)$. $\Longrightarrow$ По аксиоме выделения существует множество $X = \{\gamma \in \alpha \mid \neg\Phi(\gamma)\}$, причём $X \neq \varnothing$.

Принцип трансфинитной индукции для ординалов

Теорема 7 (принцип трансфинитной индукции).
Пусть $\Phi(x)$ *— теоретико-множественное свойство такое, что для любого ординала* α *имеет место* $\forall\beta \in \alpha\big(\Phi(\beta)\big) \longrightarrow \Phi(\alpha)$*. Тогда для любого ординала* α *справедливо свойство* $\Phi(\alpha)$*.*

Доказательство: Допустим, напротив, существует ординал α, для которого свойство $\Phi(\alpha)$ ложно. $\Longrightarrow$ Из условия теоремы следует, что утверждение $\forall\beta \in \alpha\big(\Phi(\beta)\big)$ тоже ложно. $\Longrightarrow$ Существует $\beta \in \alpha$ такой, что имеет место $\neg\Phi(\beta)$. $\Longrightarrow$ По аксиоме выделения существует множество $X = \{\gamma \in \alpha \mid \neg\Phi(\gamma)\}$, причём $X \neq \varnothing$. $\Longrightarrow$ По аксиоме регулярности существует $\gamma_0 \in X$ такой, что $\gamma_0 \cap X = \varnothing$.

Принцип трансфинитной индукции для ординалов

Теорема 7 (принцип трансфинитной индукции).
Пусть $\Phi(x)$ *— теоретико-множественное свойство такое, что для любого ординала* α *имеет место* $\forall\beta \in \alpha\big(\Phi(\beta)\big) \longrightarrow \Phi(\alpha)$. *Тогда для любого ординала* α *справедливо свойство* $\Phi(\alpha)$.

Доказательство: Допустим, напротив, существует ординал α, для которого свойство $\Phi(\alpha)$ ложно. $\Longrightarrow$ Из условия теоремы следует, что утверждение $\forall\beta \in \alpha\big(\Phi(\beta)\big)$ тоже ложно. $\Longrightarrow$ Существует $\beta \in \alpha$ такой, что имеет место $\neg\Phi(\beta)$. $\Longrightarrow$ По аксиоме выделения существует множество $X = \{\gamma \in \alpha \mid \neg\Phi(\gamma)\}$, причём $X \neq \varnothing$. $\Longrightarrow$ По аксиоме регулярности существует $\gamma_0 \in X$ такой, что $\gamma_0 \cap X = \varnothing$. Т.к. $\gamma_0 \in \alpha$, то по Предложению 1 заключаем, что γ_0 — ординал.

Принцип трансфинитной индукции для ординалов

Теорема 7 (принцип трансфинитной индукции).
Пусть $\Phi(x)$ *— теоретико-множественное свойство такое, что для любого ординала* α *имеет место* $\forall\beta \in \alpha\big(\Phi(\beta)\big) \longrightarrow \Phi(\alpha)$. *Тогда для любого ординала* α *справедливо свойство* $\Phi(\alpha)$.

Доказательство: Допустим, напротив, существует ординал α, для которого свойство $\Phi(\alpha)$ ложно. $\Longrightarrow$ Из условия теоремы следует, что утверждение $\forall\beta \in \alpha\big(\Phi(\beta)\big)$ тоже ложно. $\Longrightarrow$ Существует $\beta \in \alpha$ такой, что имеет место $\neg\Phi(\beta)$. $\Longrightarrow$ По аксиоме выделения существует множество $X = \{\gamma \in \alpha \mid \neg\Phi(\gamma)\}$, причём $X \neq \varnothing$. $\Longrightarrow$ По аксиоме регулярности существует $\gamma_0 \in X$ такой, что $\gamma_0 \cap X = \varnothing$. Т.к. $\gamma_0 \in \alpha$, то по Предложению 1 заключаем, что γ_0 — ординал.

Докажем, что $\forall\beta \in \gamma_0\big(\Phi(\beta)\big)$.

Принцип трансфинитной индукции для ординалов

Теорема 7 (принцип трансфинитной индукции).
Пусть $\Phi(x)$ *— теоретико-множественное свойство такое, что для любого ординала* α *имеет место* $\forall\beta \in \alpha\big(\Phi(\beta)\big) \longrightarrow \Phi(\alpha)$*. Тогда для любого ординала* α *справедливо свойство* $\Phi(\alpha)$*.*

Доказательство: Допустим, напротив, существует ординал α, для которого свойство $\Phi(\alpha)$ ложно. $\Longrightarrow$ Из условия теоремы следует, что утверждение $\forall\beta \in \alpha\big(\Phi(\beta)\big)$ тоже ложно. $\Longrightarrow$ Существует $\beta \in \alpha$ такой, что имеет место $\neg\Phi(\beta)$. $\Longrightarrow$ По аксиоме выделения существует множество $X = \{\gamma \in \alpha \mid \neg\Phi(\gamma)\}$, причём $X \neq \varnothing$. $\Longrightarrow$ По аксиоме регулярности существует $\gamma_0 \in X$ такой, что $\gamma_0 \cap X = \varnothing$. Т.к. $\gamma_0 \in \alpha$, то по Предложению 1 заключаем, что γ_0 — ординал.

Докажем, что $\forall\beta \in \gamma_0\big(\Phi(\beta)\big)$. Пусть $\beta \in \gamma_0$.

Принцип трансфинитной индукции для ординалов

Теорема 7 (принцип трансфинитной индукции).
Пусть $\Phi(x)$ *— теоретико-множественное свойство такое, что для любого ординала* α *имеет место* $\forall\beta \in \alpha\big(\Phi(\beta)\big) \longrightarrow \Phi(\alpha)$*. Тогда для любого ординала* α *справедливо свойство* $\Phi(\alpha)$*.*

Доказательство: Допустим, напротив, существует ординал α, для которого свойство $\Phi(\alpha)$ ложно. $\Longrightarrow$ Из условия теоремы следует, что утверждение $\forall\beta \in \alpha\big(\Phi(\beta)\big)$ тоже ложно. $\Longrightarrow$ Существует $\beta \in \alpha$ такой, что имеет место $\neg\Phi(\beta)$. $\Longrightarrow$ По аксиоме выделения существует множество $X = \{\gamma \in \alpha \mid \neg\Phi(\gamma)\}$, причём $X \neq \varnothing$. $\Longrightarrow$ По аксиоме регулярности существует $\gamma_0 \in X$ такой, что $\gamma_0 \cap X = \varnothing$. Т.к. $\gamma_0 \in \alpha$, то по Предложению 1 заключаем, что γ_0 — ординал.

Докажем, что $\forall\beta \in \gamma_0\big(\Phi(\beta)\big)$. Пусть $\beta \in \gamma_0$. $\Longrightarrow$ Из транзитивности α следует, что $\beta \in \alpha$.

Принцип трансфинитной индукции для ординалов

Теорема 7 (принцип трансфинитной индукции).
Пусть $\Phi(x)$ *— теоретико-множественное свойство такое, что для любого ординала* α *имеет место* $\forall\beta \in \alpha\big(\Phi(\beta)\big) \longrightarrow \Phi(\alpha)$*. Тогда для любого ординала* α *справедливо свойство* $\Phi(\alpha)$*.*

Доказательство: Допустим, напротив, существует ординал α, для которого свойство $\Phi(\alpha)$ ложно. $\Longrightarrow$ Из условия теоремы следует, что утверждение $\forall\beta \in \alpha\big(\Phi(\beta)\big)$ тоже ложно. $\Longrightarrow$ Существует $\beta \in \alpha$ такой, что имеет место $\neg\Phi(\beta)$. $\Longrightarrow$ По аксиоме выделения существует множество $X = \{\gamma \in \alpha \mid \neg\Phi(\gamma)\}$, причём $X \neq \varnothing$. $\Longrightarrow$ По аксиоме регулярности существует $\gamma_0 \in X$ такой, что $\gamma_0 \cap X = \varnothing$. Т.к. $\gamma_0 \in \alpha$, то по Предложению 1 заключаем, что γ_0 — ординал.

Докажем, что $\forall\beta \in \gamma_0\big(\Phi(\beta)\big)$. Пусть $\beta \in \gamma_0$. $\Longrightarrow$ Из транзитивности α следует, что $\beta \in \alpha$. Поэтому если верно $\neg\Phi(\beta)$, то $\beta \in \gamma_0 \cap X$, что невозможно.

Принцип трансфинитной индукции для ординалов

Теорема 7 (принцип трансфинитной индукции).
Пусть $\Phi(x)$ — теоретико-множественное свойство такое, что для любого ординала α имеет место $\forall\beta \in \alpha\big(\Phi(\beta)\big) \longrightarrow \Phi(\alpha)$. Тогда для любого ординала α справедливо свойство $\Phi(\alpha)$.

Доказательство: Допустим, напротив, существует ординал α, для которого свойство $\Phi(\alpha)$ ложно. $\Longrightarrow$ Из условия теоремы следует, что утверждение $\forall\beta \in \alpha\big(\Phi(\beta)\big)$ тоже ложно. $\Longrightarrow$ Существует $\beta \in \alpha$ такой, что имеет место $\neg\Phi(\beta)$. $\Longrightarrow$ По аксиоме выделения существует множество $X = \{\gamma \in \alpha \mid \neg\Phi(\gamma)\}$, причём $X \neq \varnothing$. $\Longrightarrow$ По аксиоме регулярности существует $\gamma_0 \in X$ такой, что $\gamma_0 \cap X = \varnothing$. Т.к. $\gamma_0 \in \alpha$, то по Предложению 1 заключаем, что γ_0 — ординал.

Докажем, что $\forall\beta \in \gamma_0\big(\Phi(\beta)\big)$. Пусть $\beta \in \gamma_0$. $\Longrightarrow$ Из транзитивности α следует, что $\beta \in \alpha$. Поэтому если верно $\neg\Phi(\beta)$, то $\beta \in \gamma_0 \cap X$, что невозможно. $\Longrightarrow$ Имеет место $\Phi(\beta)$.

Принцип трансфинитной индукции для ординалов

Теорема 7 (принцип трансфинитной индукции).
Пусть $\Phi(x)$ *— теоретико-множественное свойство такое, что для любого ординала* α *имеет место* $\forall\beta \in \alpha\big(\Phi(\beta)\big) \longrightarrow \Phi(\alpha)$. *Тогда для любого ординала* α *справедливо свойство* $\Phi(\alpha)$.

Доказательство: Допустим, напротив, существует ординал α, для которого свойство $\Phi(\alpha)$ ложно. $\Longrightarrow$ Из условия теоремы следует, что утверждение $\forall\beta \in \alpha\big(\Phi(\beta)\big)$ тоже ложно. $\Longrightarrow$ Существует $\beta \in \alpha$ такой, что имеет место $\neg\Phi(\beta)$. $\Longrightarrow$ По аксиоме выделения существует множество $X = \{\gamma \in \alpha \mid \neg\Phi(\gamma)\}$, причём $X \neq \varnothing$. $\Longrightarrow$ По аксиоме регулярности существует $\gamma_0 \in X$ такой, что $\gamma_0 \cap X = \varnothing$. Т.к. $\gamma_0 \in \alpha$, то по Предложению 1 заключаем, что γ_0 — ординал.

Докажем, что $\forall\beta \in \gamma_0\big(\Phi(\beta)\big)$. Пусть $\beta \in \gamma_0$. $\Longrightarrow$ Из транзитивности α следует, что $\beta \in \alpha$. Поэтому если верно $\neg\Phi(\beta)$, то $\beta \in \gamma_0 \cap X$, что невозможно. $\Longrightarrow$ Имеет место $\Phi(\beta)$.

Итак, мы доказали, что $\forall\beta \in \gamma_0\big(\Phi(\beta)\big)$.

Принцип трансфинитной индукции для ординалов

Теорема 7 (принцип трансфинитной индукции).
Пусть $\Phi(x)$ *— теоретико-множественное свойство такое, что для любого ординала* α *имеет место* $\forall\beta \in \alpha\big(\Phi(\beta)\big) \longrightarrow \Phi(\alpha)$. *Тогда для любого ординала* α *справедливо свойство* $\Phi(\alpha)$.

Доказательство: Допустим, напротив, существует ординал α, для которого свойство $\Phi(\alpha)$ ложно. $\Longrightarrow$ Из условия теоремы следует, что утверждение $\forall\beta \in \alpha\big(\Phi(\beta)\big)$ тоже ложно. $\Longrightarrow$ Существует $\beta \in \alpha$ такой, что имеет место $\neg\Phi(\beta)$. $\Longrightarrow$ По аксиоме выделения существует множество $X = \{\gamma \in \alpha \mid \neg\Phi(\gamma)\}$, причём $X \neq \varnothing$. $\Longrightarrow$ По аксиоме регулярности существует $\gamma_0 \in X$ такой, что $\gamma_0 \cap X = \varnothing$. Т.к. $\gamma_0 \in \alpha$, то по Предложению 1 заключаем, что γ_0 — ординал.

Докажем, что $\forall\beta \in \gamma_0\big(\Phi(\beta)\big)$. Пусть $\beta \in \gamma_0$. $\Longrightarrow$ Из транзитивности α следует, что $\beta \in \alpha$. Поэтому если верно $\neg\Phi(\beta)$, то $\beta \in \gamma_0 \cap X$, что невозможно. $\Longrightarrow$ Имеет место $\Phi(\beta)$.

Итак, мы доказали, что $\forall\beta \in \gamma_0\big(\Phi(\beta)\big)$. $\Longrightarrow$ По условию теоремы получаем, что верно $\Phi(\gamma_0)$.

Принцип трансфинитной индукции для ординалов

Теорема 7 (принцип трансфинитной индукции).
Пусть $\Phi(x)$ — теоретико-множественное свойство такое, что для любого ординала α имеет место $\forall\beta\in\alpha\big(\Phi(\beta)\big)\longrightarrow\Phi(\alpha)$. Тогда для любого ординала α справедливо свойство $\Phi(\alpha)$.

Доказательство: Допустим, напротив, существует ординал α, для которого свойство $\Phi(\alpha)$ ложно. $\Longrightarrow$ Из условия теоремы следует, что утверждение $\forall\beta\in\alpha\big(\Phi(\beta)\big)$ тоже ложно. $\Longrightarrow$ Существует $\beta\in\alpha$ такой, что имеет место $\neg\Phi(\beta)$. $\Longrightarrow$ По аксиоме выделения существует множество $X=\{\gamma\in\alpha\mid\neg\Phi(\gamma)\}$, причём $X\neq\varnothing$. $\Longrightarrow$ По аксиоме регулярности существует $\gamma_0\in X$ такой, что $\gamma_0\cap X=\varnothing$. Т.к. $\gamma_0\in\alpha$, то по Предложению 1 заключаем, что γ_0 — ординал.

Докажем, что $\forall\beta\in\gamma_0\big(\Phi(\beta)\big)$. Пусть $\beta\in\gamma_0$. $\Longrightarrow$ Из транзитивности α следует, что $\beta\in\alpha$. Поэтому если верно $\neg\Phi(\beta)$, то $\beta\in\gamma_0\cap X$, что невозможно. $\Longrightarrow$ Имеет место $\Phi(\beta)$.

Итак, мы доказали, что $\forall\beta\in\gamma_0\big(\Phi(\beta)\big)$. $\Longrightarrow$ По условию теоремы получаем, что верно $\Phi(\gamma_0)$. Противоречие с тем, что $\gamma_0\in X$. $\square$

Теорема о сравнимости ординалов

Теорема 8 (о сравнимости ординалов).

Для любых ординалов α и β выполняется одно из условий: либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\beta \in \alpha$.

Теорема о сравнимости ординалов

Теорема 8 (о сравнимости ординалов).
Для любых ординалов α и β выполняется одно из условий: либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\beta \in \alpha$.

Доказательство: То, что условия из утверждения теоремы взаимно исключают друг друга, вытекает из Следствия 3.

Теорема о сравнимости ординалов

Теорема 8 (о сравнимости ординалов).
Для любых ординалов α и β выполняется одно из условий: либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\beta \in \alpha$.

Доказательство: То, что условия из утверждения теоремы взаимно исключают друг друга, вытекает из Следствия 3. Необходимо доказать следующее теоретико-множественное свойство

$$\forall\alpha\forall\beta\Big(\big(\mathrm{Ord}(\alpha)\ \&\ \mathrm{Ord}(\beta)\big) \longrightarrow \big(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha\big)\Big). \qquad (1)$$

Теорема 8 (о сравнимости ординалов).
Для любых ординалов α и β выполняется одно из условий: либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\beta \in \alpha$.

Доказательство: То, что условия из утверждения теоремы взаимно исключают друг друга, вытекает из Следствия 3. Необходимо доказать следующее теоретико-множественное свойство

$$\forall\alpha\forall\beta\Big(\big(\mathrm{Ord}(\alpha)\ \&\ \mathrm{Ord}(\beta)\big) \longrightarrow \big(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha\big)\Big). \qquad (1)$$

Будем доказывать (1) с помощью (внешней) трансфинитной индукции.

Теорема о сравнимости ординалов

Теорема 8 (о сравнимости ординалов).
Для любых ординалов α и β выполняется одно из условий: либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\beta \in \alpha$.

Доказательство: То, что условия из утверждения теоремы взаимно исключают друг друга, вытекает из Следствия 3. Необходимо доказать следующее теоретико-множественное свойство

$$\forall\alpha\forall\beta\Big(\big(\mathrm{Ord}(\alpha)\ \&\ \mathrm{Ord}(\beta)\big) \longrightarrow \big(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha\big)\Big). \qquad (1)$$

Будем доказывать (1) с помощью (внешней) трансфинитной индукции. Для этого введём обозначение

$$\Phi(x) = \forall\beta\Big(\big(\mathrm{Ord}(x)\ \&\ \mathrm{Ord}(\beta)\big) \longrightarrow \big(x \in \beta \vee x = \beta \vee \beta \in x\big)\Big).$$

Теорема о сравнимости ординалов

Теорема 8 (о сравнимости ординалов).
Для любых ординалов α и β выполняется одно из условий: либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\beta \in \alpha$.

Доказательство: То, что условия из утверждения теоремы взаимно исключают друг друга, вытекает из Следствия 3. Необходимо доказать следующее теоретико-множественное свойство

$$\forall\alpha\forall\beta\Big(\big(\mathrm{Ord}(\alpha)\ \&\ \mathrm{Ord}(\beta)\big) \longrightarrow \big(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha\big)\Big). \quad (1)$$

Будем доказывать (1) с помощью (внешней) трансфинитной индукции. Для этого введём обозначение

$$\Phi(x) = \forall\beta\Big(\big(\mathrm{Ord}(x)\ \&\ \mathrm{Ord}(\beta)\big) \longrightarrow \big(x \in \beta \vee x = \beta \vee \beta \in x\big)\Big).$$

В силу Теоремы 7, чтобы доказать (1), достаточно доказать следующее свойство

$$\forall\alpha\Big(\forall\gamma \in \alpha\big(\Phi(\gamma)\big) \longrightarrow \Phi(\alpha)\Big). \quad (2)$$

Теорема о сравнимости ординалов

Чтобы доказать (2), сделаем *предположение внешней индукции*: *пусть α — произвольный ординал такой, что для любого $\gamma \in \alpha$ выполняется $\Phi(\gamma)$.*

Теорема о сравнимости ординалов

Чтобы доказать (2), сделаем *предположение внешней индукции*: *пусть α — произвольный ординал такой, что для любого $\gamma \in \alpha$ выполняется* $\Phi(\gamma)$.

Для данного α требуется доказать $\Phi(\alpha)$, но поскольку утверждение $\mathrm{Ord}(\alpha)$ уже и так верно, осталось доказать, что

$$\forall\beta\Big(\mathrm{Ord}(\beta) \longrightarrow (\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha)\Big). \quad (3)$$

Теорема о сравнимости ординалов

Чтобы доказать (2), сделаем *предположение внешней индукции*: *пусть* α *— произвольный ординал такой, что для любого* $\gamma \in \alpha$ *выполняется* $\Phi(\gamma)$.

Для данного α требуется доказать $\Phi(\alpha)$, но поскольку утверждение $\mathrm{Ord}(\alpha)$ уже и так верно, осталось доказать, что

$$\forall\beta\Big(\mathrm{Ord}(\beta) \longrightarrow (\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha)\Big). \quad (3)$$

В свою очередь, будем доказывать (3) с помощью (внутренней) трансфинитной индукции.

Теорема о сравнимости ординалов

Чтобы доказать (2), сделаем *предположение внешней индукции*: *пусть α — произвольный ординал такой, что для любого $\gamma \in \alpha$ выполняется $\Phi(\gamma)$.*

Для данного α требуется доказать $\Phi(\alpha)$, но поскольку утверждение $\mathrm{Ord}(\alpha)$ уже и так верно, осталось доказать, что

$$\forall\beta\Big(\mathrm{Ord}(\beta) \longrightarrow (\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha)\Big). \quad (3)$$

В свою очередь, будем доказывать (3) с помощью (внутренней) трансфинитной индукции. Для этого введём обозначение

$$\Psi(x) = \mathrm{Ord}(x) \longrightarrow (\alpha \in x \vee \alpha = x \vee x \in \alpha).$$

Теорема о сравнимости ординалов

Чтобы доказать (2), сделаем *предположение внешней индукции*: *пусть* α *— произвольный ординал такой, что для любого* $\gamma \in \alpha$ *выполняется* $\Phi(\gamma)$.

Для данного α требуется доказать $\Phi(\alpha)$, но поскольку утверждение $\mathrm{Ord}(\alpha)$ уже и так верно, осталось доказать, что

$$\forall\beta\Big(\mathrm{Ord}(\beta) \longrightarrow (\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha)\Big). \quad (3)$$

В свою очередь, будем доказывать (3) с помощью (внутренней) трансфинитной индукции. Для этого введём обозначение

$$\Psi(x) = \mathrm{Ord}(x) \longrightarrow (\alpha \in x \vee \alpha = x \vee x \in \alpha).$$

В силу Теоремы 7, чтобы доказать (3), достаточно доказать следующее свойство

$$\forall\beta\Big(\forall\gamma \in \beta\big(\Psi(\gamma)\big) \longrightarrow \Psi(\beta)\Big). \quad (4)$$

Теорема о сравнимости ординалов

Чтобы доказать (4), сделаем *предположение внутренней индукции*: *пусть β — произвольный ординал такой, что для любого $\gamma \in \beta$ выполняется $\Psi(\gamma)$.*

Теорема о сравнимости ординалов

Чтобы доказать (4), сделаем *предположение внутренней индукции*: *пусть β — произвольный ординал такой, что для любого $\gamma \in \beta$ выполняется $\Psi(\gamma)$.*

Для данного β требуется показать свойство $(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha)$.

Теорема о сравнимости ординалов

Чтобы доказать (4), сделаем *предположение внутренней индукции*: *пусть β — произвольный ординал такой, что для любого $\gamma \in \beta$ выполняется* $\Psi(\gamma)$.

Для данного β требуется показать свойство $(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha)$.

Возможны три случая: (а) $\alpha = \beta$, или (б) $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, или (в) $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$.

Теорема о сравнимости ординалов

Чтобы доказать (4), сделаем *предположение внутренней индукции*: *пусть* β *— произвольный ординал такой, что для любого* $\gamma \in \beta$ *выполняется* $\Psi(\gamma)$.

Для данного β требуется показать свойство $(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha)$.

Возможны три случая: (а) $\alpha = \beta$, или (б) $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, или (в) $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$.

(а) Если $\alpha = \beta$, то всё доказано.

Теорема о сравнимости ординалов

Чтобы доказать (4), сделаем *предположение внутренней индукции*: *пусть* β — *произвольный ординал такой, что для любого* $\gamma \in \beta$ *выполняется* $\Psi(\gamma)$.

Для данного β требуется показать свойство $(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha)$.

Возможны три случая: (а) $\alpha = \beta$, или (б) $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, или (в) $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$.

(а) Если $\alpha = \beta$, то всё доказано.

(б) Если $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, то найдется $\gamma \in \alpha$ такой, что $\gamma \notin \beta$.

Теорема о сравнимости ординалов

Чтобы доказать (4), сделаем *предположение внутренней индукции*: *пусть β — произвольный ординал такой, что для любого $\gamma \in \beta$ выполняется $\Psi(\gamma)$.*

Для данного β требуется показать свойство $(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha)$.

Возможны три случая: (а) $\alpha = \beta$, или (б) $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, или (в) $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$.

(а) Если $\alpha = \beta$, то всё доказано.

(б) Если $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, то найдется $\gamma \in \alpha$ такой, что $\gamma \notin \beta$. $\Longrightarrow$ В силу предположения внешней индукции, имеет место $\Phi(\gamma)$.

Теорема о сравнимости ординалов

Чтобы доказать (4), сделаем *предположение внутренней индукции*: *пусть β — произвольный ординал такой, что для любого $\gamma \in \beta$ выполняется $\Psi(\gamma)$.*

Для данного β требуется показать свойство $(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha)$.

Возможны три случая: (а) $\alpha = \beta$, или (б) $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, или (в) $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$.

(а) Если $\alpha = \beta$, то всё доказано.

(б) Если $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, то найдется $\gamma \in \alpha$ такой, что $\gamma \notin \beta$. $\Longrightarrow$ В силу предположения внешней индукции, имеет место $\Phi(\gamma)$. $\Longrightarrow$ Поскольку γ — ординал, заключаем, что $(\gamma \in \beta \vee \gamma = \beta \vee \beta \in \gamma)$.

Теорема о сравнимости ординалов

Чтобы доказать (4), сделаем *предположение внутренней индукции*: *пусть β — произвольный ординал такой, что для любого $\gamma \in \beta$ выполняется $\Psi(\gamma)$.*

Для данного β требуется показать свойство $(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha)$.

Возможны три случая: (а) $\alpha = \beta$, или (б) $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, или (в) $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$.

(а) Если $\alpha = \beta$, то всё доказано.

(б) Если $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, то найдется $\gamma \in \alpha$ такой, что $\gamma \notin \beta$. $\Longrightarrow$ В силу предположения внешней индукции, имеет место $\Phi(\gamma)$. $\Longrightarrow$ Поскольку γ — ординал, заключаем, что $(\gamma \in \beta \vee \gamma = \beta \vee \beta \in \gamma)$. $\Longrightarrow$ Т.к. $\gamma \notin \beta$, то $\gamma = \beta$ или $\beta \in \gamma$.

Теорема о сравнимости ординалов

Чтобы доказать (4), сделаем *предположение внутренней индукции*: *пусть* β *— произвольный ординал такой, что для любого* $\gamma \in \beta$ *выполняется* $\Psi(\gamma)$.

Для данного β требуется показать свойство $(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha)$.

Возможны три случая: (а) $\alpha = \beta$, или (б) $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, или (в) $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$.

(а) Если $\alpha = \beta$, то всё доказано.

(б) Если $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, то найдется $\gamma \in \alpha$ такой, что $\gamma \notin \beta$. $\Longrightarrow$ В силу предположения внешней индукции, имеет место $\Phi(\gamma)$. $\Longrightarrow$ Поскольку γ — ординал, заключаем, что $(\gamma \in \beta \vee \gamma = \beta \vee \beta \in \gamma)$. $\Longrightarrow$ Т.к. $\gamma \notin \beta$, то $\gamma = \beta$ или $\beta \in \gamma$. $\Longrightarrow$ Соответственно $\beta \in \alpha$ или $\beta \in \gamma \in \alpha$.

Теорема о сравнимости ординалов

Чтобы доказать (4), сделаем *предположение внутренней индукции*: *пусть* β *— произвольный ординал такой, что для любого* $\gamma \in \beta$ *выполняется* $\Psi(\gamma)$.

Для данного β требуется показать свойство $(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha)$.

Возможны три случая: (а) $\alpha = \beta$, или (б) $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, или (в) $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$.

(а) Если $\alpha = \beta$, то всё доказано.

(б) Если $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, то найдется $\gamma \in \alpha$ такой, что $\gamma \notin \beta$. $\Longrightarrow$ В силу предположения внешней индукции, имеет место $\Phi(\gamma)$. $\Longrightarrow$ Поскольку γ — ординал, заключаем, что $(\gamma \in \beta \vee \gamma = \beta \vee \beta \in \gamma)$. $\Longrightarrow$ Т.к. $\gamma \notin \beta$, то $\gamma = \beta$ или $\beta \in \gamma$. $\Longrightarrow$ Соответственно $\beta \in \alpha$ или $\beta \in \gamma \in \alpha$. $\Longrightarrow$ В силу транзитивности α, в любом случае получаем $\beta \in \alpha$.

Теорема о сравнимости ординалов

Чтобы доказать (4), сделаем *предположение внутренней индукции*: *пусть* β — *произвольный ординал такой, что для любого* $\gamma \in \beta$ *выполняется* $\Psi(\gamma)$.

Для данного β требуется показать свойство $(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha)$.

Возможны три случая: (а) $\alpha = \beta$, или (б) $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, или (в) $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$.

(а) Если $\alpha = \beta$, то всё доказано.

(б) Если $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, то найдется $\gamma \in \alpha$ такой, что $\gamma \notin \beta$. $\Longrightarrow$ В силу предположения внешней индукции, имеет место $\Phi(\gamma)$. $\Longrightarrow$ Поскольку γ — ординал, заключаем, что $(\gamma \in \beta \vee \gamma = \beta \vee \beta \in \gamma)$. $\Longrightarrow$ Т.к. $\gamma \notin \beta$, то $\gamma = \beta$ или $\beta \in \gamma$. $\Longrightarrow$ Соответственно $\beta \in \alpha$ или $\beta \in \gamma \in \alpha$. $\Longrightarrow$ В силу транзитивности α, в любом случае получаем $\beta \in \alpha$. Что и требовалось.

Теорема о сравнимости ординалов

Чтобы доказать (4), сделаем *предположение внутренней индукции*: *пусть* β *— произвольный ординал такой, что для любого* $\gamma \in \beta$ *выполняется* $\Psi(\gamma)$.

Для данного β требуется показать свойство $(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha)$.

Возможны три случая: (а) $\alpha = \beta$, или (б) $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, или (в) $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$.

(а) Если $\alpha = \beta$, то всё доказано.

(б) Если $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, то найдется $\gamma \in \alpha$ такой, что $\gamma \notin \beta$. $\Longrightarrow$ В силу предположения внешней индукции, имеет место $\Phi(\gamma)$. $\Longrightarrow$ Поскольку γ — ординал, заключаем, что $(\gamma \in \beta \vee \gamma = \beta \vee \beta \in \gamma)$. $\Longrightarrow$ Т.к. $\gamma \notin \beta$, то $\gamma = \beta$ или $\beta \in \gamma$. $\Longrightarrow$ Соответственно $\beta \in \alpha$ или $\beta \in \gamma \in \alpha$. $\Longrightarrow$ В силу транзитивности α, в любом случае получаем $\beta \in \alpha$. Что и требовалось.

(в) Если $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$, то найдется $\gamma \in \beta$ такой, что $\gamma \notin \alpha$.

Теорема о сравнимости ординалов

Чтобы доказать (4), сделаем *предположение внутренней индукции*: *пусть β — произвольный ординал такой, что для любого $\gamma \in \beta$ выполняется* $\Psi(\gamma)$.

Для данного β требуется показать свойство $(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha)$.

Возможны три случая: (а) $\alpha = \beta$, или (б) $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, или (в) $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$.

(а) Если $\alpha = \beta$, то всё доказано.

(б) Если $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, то найдется $\gamma \in \alpha$ такой, что $\gamma \notin \beta$. $\Longrightarrow$ В силу предположения внешней индукции, имеет место $\Phi(\gamma)$. $\Longrightarrow$ Поскольку γ — ординал, заключаем, что $(\gamma \in \beta \vee \gamma = \beta \vee \beta \in \gamma)$. $\Longrightarrow$ Т.к. $\gamma \notin \beta$, то $\gamma = \beta$ или $\beta \in \gamma$. $\Longrightarrow$ Соответственно $\beta \in \alpha$ или $\beta \in \gamma \in \alpha$. $\Longrightarrow$ В силу транзитивности α, в любом случае получаем $\beta \in \alpha$. Что и требовалось.

(в) Если $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$, то найдется $\gamma \in \beta$ такой, что $\gamma \notin \alpha$. $\Longrightarrow$ В силу предположения внутренней индукции, имеет место $\Psi(\gamma)$.

Теорема о сравнимости ординалов

Чтобы доказать (4), сделаем *предположение внутренней индукции*: *пусть* β *— произвольный ординал такой, что для любого* $\gamma \in \beta$ *выполняется* $\Psi(\gamma)$.

Для данного β требуется показать свойство $(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha)$.

Возможны три случая: (а) $\alpha = \beta$, или (б) $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, или (в) $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$.

(а) Если $\alpha = \beta$, то всё доказано.

(б) Если $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, то найдется $\gamma \in \alpha$ такой, что $\gamma \notin \beta$. $\Longrightarrow$ В силу предположения внешней индукции, имеет место $\Phi(\gamma)$. $\Longrightarrow$ Поскольку γ — ординал, заключаем, что $(\gamma \in \beta \vee \gamma = \beta \vee \beta \in \gamma)$. $\Longrightarrow$ Т.к. $\gamma \notin \beta$, то $\gamma = \beta$ или $\beta \in \gamma$. $\Longrightarrow$ Соответственно $\beta \in \alpha$ или $\beta \in \gamma \in \alpha$. $\Longrightarrow$ В силу транзитивности α, в любом случае получаем $\beta \in \alpha$. Что и требовалось.

(в) Если $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$, то найдется $\gamma \in \beta$ такой, что $\gamma \notin \alpha$. $\Longrightarrow$ В силу предположения внутренней индукции, имеет место $\Psi(\gamma)$. $\Longrightarrow$ Поскольку γ — ординал, заключаем, что $(\alpha \in \gamma \vee \alpha = \gamma \vee \gamma \in \alpha)$.

Теорема о сравнимости ординалов

Чтобы доказать (4), сделаем *предположение внутренней индукции*: *пусть β — произвольный ординал такой, что для любого $\gamma \in \beta$ выполняется* $\Psi(\gamma)$.

Для данного β требуется показать свойство $(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha)$.

Возможны три случая: (а) $\alpha = \beta$, или (б) $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, или (в) $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$.

(а) Если $\alpha = \beta$, то всё доказано.

(б) Если $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, то найдется $\gamma \in \alpha$ такой, что $\gamma \notin \beta$. $\Longrightarrow$ В силу предположения внешней индукции, имеет место $\Phi(\gamma)$. $\Longrightarrow$ Поскольку γ — ординал, заключаем, что $(\gamma \in \beta \vee \gamma = \beta \vee \beta \in \gamma)$. $\Longrightarrow$ Т.к. $\gamma \notin \beta$, то $\gamma = \beta$ или $\beta \in \gamma$. $\Longrightarrow$ Соответственно $\beta \in \alpha$ или $\beta \in \gamma \in \alpha$. $\Longrightarrow$ В силу транзитивности α, в любом случае получаем $\beta \in \alpha$. Что и требовалось.

(в) Если $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$, то найдется $\gamma \in \beta$ такой, что $\gamma \notin \alpha$. $\Longrightarrow$ В силу предположения внутренней индукции, имеет место $\Psi(\gamma)$. $\Longrightarrow$ Поскольку γ — ординал, заключаем, что $(\alpha \in \gamma \vee \alpha = \gamma \vee \gamma \in \alpha)$. $\Longrightarrow$ Т.к. $\gamma \notin \alpha$, то $\alpha \in \gamma$ или $\alpha = \gamma$.

Теорема о сравнимости ординалов

Чтобы доказать (4), сделаем *предположение внутренней индукции*: *пусть β — произвольный ординал такой, что для любого $\gamma \in \beta$ выполняется* $\Psi(\gamma)$.

Для данного β требуется показать свойство $(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha)$.

Возможны три случая: (а) $\alpha = \beta$, или (б) $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, или (в) $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$.

(а) Если $\alpha = \beta$, то всё доказано.

(б) Если $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, то найдется $\gamma \in \alpha$ такой, что $\gamma \notin \beta$. $\Longrightarrow$ В силу предположения внешней индукции, имеет место $\Phi(\gamma)$. $\Longrightarrow$ Поскольку γ — ординал, заключаем, что $(\gamma \in \beta \vee \gamma = \beta \vee \beta \in \gamma)$. $\Longrightarrow$ Т.к. $\gamma \notin \beta$, то $\gamma = \beta$ или $\beta \in \gamma$. $\Longrightarrow$ Соответственно $\beta \in \alpha$ или $\beta \in \gamma \in \alpha$. $\Longrightarrow$ В силу транзитивности α, в любом случае получаем $\beta \in \alpha$. Что и требовалось.

(в) Если $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$, то найдется $\gamma \in \beta$ такой, что $\gamma \notin \alpha$. $\Longrightarrow$ В силу предположения внутренней индукции, имеет место $\Psi(\gamma)$. $\Longrightarrow$ Поскольку γ — ординал, заключаем, что $(\alpha \in \gamma \vee \alpha = \gamma \vee \gamma \in \alpha)$. $\Longrightarrow$ Т.к. $\gamma \notin \alpha$, то $\alpha \in \gamma$ или $\alpha = \gamma$. $\Longrightarrow$ Соответственно $\alpha \in \gamma \in \beta$ или $\alpha \in \beta$.

Теорема о сравнимости ординалов

Чтобы доказать (4), сделаем *предположение внутренней индукции*: *пусть β — произвольный ординал такой, что для любого $\gamma \in \beta$ выполняется* $\Psi(\gamma)$.

Для данного β требуется показать свойство $(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha)$.

Возможны три случая: (а) $\alpha = \beta$, или (б) $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, или (в) $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$.

(а) Если $\alpha = \beta$, то всё доказано.

(б) Если $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, то найдется $\gamma \in \alpha$ такой, что $\gamma \notin \beta$. $\Longrightarrow$ В силу предположения внешней индукции, имеет место $\Phi(\gamma)$. $\Longrightarrow$ Поскольку γ — ординал, заключаем, что $(\gamma \in \beta \vee \gamma = \beta \vee \beta \in \gamma)$. $\Longrightarrow$ Т.к. $\gamma \notin \beta$, то $\gamma = \beta$ или $\beta \in \gamma$. $\Longrightarrow$ Соответственно $\beta \in \alpha$ или $\beta \in \gamma \in \alpha$. $\Longrightarrow$ В силу транзитивности α, в любом случае получаем $\beta \in \alpha$. Что и требовалось.

(в) Если $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$, то найдется $\gamma \in \beta$ такой, что $\gamma \notin \alpha$. $\Longrightarrow$ В силу предположения внутренней индукции, имеет место $\Psi(\gamma)$. $\Longrightarrow$ Поскольку γ — ординал, заключаем, что $(\alpha \in \gamma \vee \alpha = \gamma \vee \gamma \in \alpha)$. $\Longrightarrow$ Т.к. $\gamma \notin \alpha$, то $\alpha \in \gamma$ или $\alpha = \gamma$. $\Longrightarrow$ Соответственно $\alpha \in \gamma \in \beta$ или $\alpha \in \beta$. $\Longrightarrow$ В силу транзитивности β, в любом случае получаем $\alpha \in \beta$.

Теорема о сравнимости ординалов

Чтобы доказать (4), сделаем *предположение внутренней индукции*: *пусть β — произвольный ординал такой, что для любого $\gamma \in \beta$ выполняется $\Psi(\gamma)$.*

Для данного β требуется показать свойство $(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha)$.

Возможны три случая: (а) $\alpha = \beta$, или (б) $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, или (в) $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$.

(а) Если $\alpha = \beta$, то всё доказано.

(б) Если $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$, то найдется $\gamma \in \alpha$ такой, что $\gamma \notin \beta$. $\Longrightarrow$ В силу предположения внешней индукции, имеет место $\Phi(\gamma)$. $\Longrightarrow$ Поскольку γ — ординал, заключаем, что $(\gamma \in \beta \vee \gamma = \beta \vee \beta \in \gamma)$. $\Longrightarrow$ Т.к. $\gamma \notin \beta$, то $\gamma = \beta$ или $\beta \in \gamma$. $\Longrightarrow$ Соответственно $\beta \in \alpha$ или $\beta \in \gamma \in \alpha$. $\Longrightarrow$ В силу транзитивности α, в любом случае получаем $\beta \in \alpha$. Что и требовалось.

(в) Если $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$, то найдется $\gamma \in \beta$ такой, что $\gamma \notin \alpha$. $\Longrightarrow$ В силу предположения внутренней индукции, имеет место $\Psi(\gamma)$. $\Longrightarrow$ Поскольку γ — ординал, заключаем, что $(\alpha \in \gamma \vee \alpha = \gamma \vee \gamma \in \alpha)$. $\Longrightarrow$ Т.к. $\gamma \notin \alpha$, то $\alpha \in \gamma$ или $\alpha = \gamma$. $\Longrightarrow$ Соответственно $\alpha \in \gamma \in \beta$ или $\alpha \in \beta$. $\Longrightarrow$ В силу транзитивности β, в любом случае получаем $\alpha \in \beta$. Что и требовалось. $\square$

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Определение. Пусть X — произвольное множество ординалов. Определим на элементах X следующий *порядок по принадлежности*:

$$\alpha \leqslant_o \beta \overset{\text{опр}}{\iff} (\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta).$$

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Определение. Пусть X — произвольное множество ординалов. Определим на элементах X следующий *порядок по принадлежности*:

$$\alpha \leqslant_o \beta \overset{\text{опр}}{\Longleftrightarrow} (\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta).$$

Теорема 9 (о вполне упорядоченности ординала).
Если α — ординал, то $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ — в.у.м.

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Определение. Пусть X — произвольное множество ординалов. Определим на элементах X следующий *порядок по принадлежности*:

$$\alpha \leqslant_o \beta \overset{\text{опр}}{\Longleftrightarrow} (\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta).$$

Теорема 9 (о вполне упорядоченности ординала).
Если α — ординал, то $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ — в.у.м.

Доказательство: Рефлексивность $\leqslant_o$ очевидна.

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Определение. Пусть X — произвольное множество ординалов. Определим на элементах X следующий *порядок по принадлежности*:

$$\alpha \leqslant_o \beta \overset{\text{опр}}{\Longleftrightarrow} (\alpha = \beta \lor \alpha \in \beta).$$

Теорема 9 (о вполне упорядоченности ординала).
Если α — ординал, то $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ — в.у.м.

Доказательство: Рефлексивность $\leqslant_o$ очевидна. Докажем антисимметричность.

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Определение. Пусть X — произвольное множество ординалов. Определим на элементах X следующий *порядок по принадлежности*:

$$\alpha \leqslant_o \beta \overset{\text{опр}}{\Longleftrightarrow} (\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta).$$

Теорема 9 (о вполне упорядоченности ординала).
Если α — ординал, то $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ — в.у.м.

Доказательство: Рефлексивность $\leqslant_o$ очевидна. Докажем антисимметричность. Пусть $\beta, \gamma \in \alpha$, $\beta \leqslant_o \gamma$ и $\gamma \leqslant_o \beta$.

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Определение. Пусть X — произвольное множество ординалов. Определим на элементах X следующий *порядок по принадлежности*:

$$\alpha \leqslant_o \beta \overset{\text{опр}}{\Longleftrightarrow} (\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta).$$

Теорема 9 (о вполне упорядоченности ординала).
Если α — ординал, то $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ — в.у.м.

Доказательство: Рефлексивность $\leqslant_o$ очевидна. Докажем антисимметричность. Пусть $\beta, \gamma \in \alpha$, $\beta \leqslant_o \gamma$ и $\gamma \leqslant_o \beta$. $\Longrightarrow$ В силу определения $\leqslant_o$, возможны четыре случая: $\beta = \gamma \vee (\beta = \gamma \mathbin{\&} \beta \in \gamma) \vee (\beta = \gamma \mathbin{\&} \gamma \in \beta) \vee (\beta \in \gamma \mathbin{\&} \gamma \in \beta)$.

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Определение. Пусть X — произвольное множество ординалов. Определим на элементах X следующий *порядок по принадлежности*:

$$\alpha \leqslant_o \beta \overset{\text{опр}}{\iff} (\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta).$$

Теорема 9 (о вполне упорядоченности ординала).
Если α — ординал, то $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ — в.у.м.

Доказательство: Рефлексивность $\leqslant_o$ очевидна. Докажем антисимметричность. Пусть $\beta, \gamma \in \alpha$, $\beta \leqslant_o \gamma$ и $\gamma \leqslant_o \beta$. $\Longrightarrow$ В силу определения $\leqslant_o$, возможны четыре случая: $\beta = \gamma \vee (\beta = \gamma \;\&\; \beta \in \gamma) \vee (\beta = \gamma \;\&\; \gamma \in \beta) \vee (\beta \in \gamma \;\&\; \gamma \in \beta)$. Во 2-м и 3-м случаях получаем $\beta \in \beta$, что противоречит Следствию 3 (1).

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Определение. Пусть X — произвольное множество ординалов. Определим на элементах X следующий *порядок по принадлежности*:

$$\alpha \leqslant_o \beta \overset{\text{опр}}{\Longleftrightarrow} (\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta).$$

Теорема 9 (о вполне упорядоченности ординала).
Если α — ординал, то $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ — в.у.м.

Доказательство: Рефлексивность $\leqslant_o$ очевидна. Докажем антисимметричность. Пусть $\beta, \gamma \in \alpha$, $\beta \leqslant_o \gamma$ и $\gamma \leqslant_o \beta$. $\Longrightarrow$ В силу определения $\leqslant_o$, возможны четыре случая: $\beta = \gamma \vee (\beta = \gamma \mathbin{\&} \beta \in \gamma) \vee (\beta = \gamma \mathbin{\&} \gamma \in \beta) \vee (\beta \in \gamma \mathbin{\&} \gamma \in \beta)$. Во 2-м и 3-м случаях получаем $\beta \in \beta$, что противоречит Следствию 3 (1). В 4-м случае получаем противоречие со Следствием 3 (2).

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Определение. Пусть X — произвольное множество ординалов. Определим на элементах X следующий *порядок по принадлежности*:

$$\alpha \leqslant_o \beta \overset{\text{опр}}{\Longleftrightarrow} (\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta).$$

Теорема 9 (о вполне упорядоченности ординала).
Если α — ординал, то $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ — в.у.м.

Доказательство: Рефлексивность $\leqslant_o$ очевидна. Докажем антисимметричность. Пусть $\beta, \gamma \in \alpha$, $\beta \leqslant_o \gamma$ и $\gamma \leqslant_o \beta$. $\Longrightarrow$ В силу определения $\leqslant_o$, возможны четыре случая: $\beta = \gamma \vee (\beta = \gamma \;\&\; \beta \in \gamma) \vee (\beta = \gamma \;\&\; \gamma \in \beta) \vee (\beta \in \gamma \;\&\; \gamma \in \beta)$. Во 2-м и 3-м случаях получаем $\beta \in \beta$, что противоречит Следствию 3 (1). В 4-м случае получаем противоречие со Следствием 3 (2). $\Longrightarrow$ Остаётся 1-й случай, из которого вытекает антисимметричность.

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Определение. Пусть X — произвольное множество ординалов. Определим на элементах X следующий *порядок по принадлежности*:

$$\alpha \leqslant_o \beta \overset{\text{опр}}{\iff} (\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta).$$

Теорема 9 (о вполне упорядоченности ординала).
Если α — ординал, то $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ — в.у.м.

Доказательство: Рефлексивность $\leqslant_o$ очевидна. Докажем антисимметричность. Пусть $\beta, \gamma \in \alpha$, $\beta \leqslant_o \gamma$ и $\gamma \leqslant_o \beta$. $\Longrightarrow$ В силу определения $\leqslant_o$, возможны четыре случая: $\beta = \gamma \vee (\beta = \gamma \;\&\; \beta \in \gamma) \vee (\beta = \gamma \;\&\; \gamma \in \beta) \vee (\beta \in \gamma \;\&\; \gamma \in \beta)$. Во 2-м и 3-м случаях получаем $\beta \in \beta$, что противоречит Следствию 3 (1). В 4-м случае получаем противоречие со Следствием 3 (2). $\Longrightarrow$ Остаётся 1-й случай, из которого вытекает антисимметричность.

Докажем транзитивность.

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Определение. Пусть X — произвольное множество ординалов. Определим на элементах X следующий *порядок по принадлежности*:

$$\alpha \leqslant_o \beta \overset{\text{опр}}{\Longleftrightarrow} (\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta).$$

Теорема 9 (о вполне упорядоченности ординала).
Если α — ординал, то $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ — в.у.м.

Доказательство: Рефлексивность $\leqslant_o$ очевидна. Докажем антисимметричность. Пусть $\beta, \gamma \in \alpha$, $\beta \leqslant_o \gamma$ и $\gamma \leqslant_o \beta$. $\Longrightarrow$ В силу определения $\leqslant_o$, возможны четыре случая: $\beta = \gamma \vee (\beta = \gamma \;\&\; \beta \in \gamma) \vee (\beta = \gamma \;\&\; \gamma \in \beta) \vee (\beta \in \gamma \;\&\; \gamma \in \beta)$. Во 2-м и 3-м случаях получаем $\beta \in \beta$, что противоречит Следствию 3 (1). В 4-м случае получаем противоречие со Следствием 3 (2). $\Longrightarrow$ Остаётся 1-й случай, из которого вытекает антисимметричность.

Докажем транзитивность. Пусть $\beta, \gamma, \delta \in \alpha$, $\beta \leqslant_o \gamma$ и $\gamma \leqslant_o \delta$.

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Определение. Пусть X — произвольное множество ординалов. Определим на элементах X следующий *порядок по принадлежности*:

$$\alpha \leqslant_o \beta \overset{\text{опр}}{\Longleftrightarrow} (\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta).$$

Теорема 9 (о вполне упорядоченности ординала).
Если α — ординал, то $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ — в.у.м.

Доказательство: Рефлексивность $\leqslant_o$ очевидна. Докажем антисимметричность. Пусть $\beta, \gamma \in \alpha$, $\beta \leqslant_o \gamma$ и $\gamma \leqslant_o \beta$. $\Longrightarrow$ В силу определения $\leqslant_o$, возможны четыре случая: $\beta = \gamma \vee (\beta = \gamma \,\&\, \beta \in \gamma) \vee (\beta = \gamma \,\&\, \gamma \in \beta) \vee (\beta \in \gamma \,\&\, \gamma \in \beta)$. Во 2-м и 3-м случаях получаем $\beta \in \beta$, что противоречит Следствию 3 (1). В 4-м случае получаем противоречие со Следствием 3 (2). $\Longrightarrow$ Остаётся 1-й случай, из которого вытекает антисимметричность.

Докажем транзитивность. Пусть $\beta, \gamma, \delta \in \alpha$, $\beta \leqslant_o \gamma$ и $\gamma \leqslant_o \delta$. Если $\beta{=}\gamma$ или $\gamma{=}\delta$, то очевидно выполняется $\beta \leqslant_o \delta$.

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Определение. Пусть X — произвольное множество ординалов. Определим на элементах X следующий *порядок по принадлежности*:

$$\alpha \leqslant_o \beta \overset{\text{опр}}{\iff} (\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta).$$

Теорема 9 (о вполне упорядоченности ординала).
Если α — ординал, то $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ — в.у.м.

Доказательство: Рефлексивность $\leqslant_o$ очевидна. Докажем антисимметричность. Пусть $\beta, \gamma \in \alpha$, $\beta \leqslant_o \gamma$ и $\gamma \leqslant_o \beta$. $\Longrightarrow$ В силу определения $\leqslant_o$, возможны четыре случая: $\beta = \gamma \vee (\beta = \gamma \mathbin{\&} \beta \in \gamma) \vee (\beta = \gamma \mathbin{\&} \gamma \in \beta) \vee (\beta \in \gamma \mathbin{\&} \gamma \in \beta)$. Во 2-м и 3-м случаях получаем $\beta \in \beta$, что противоречит Следствию 3 (1). В 4-м случае получаем противоречие со Следствием 3 (2). $\Longrightarrow$ Остаётся 1-й случай, из которого вытекает антисимметричность.

Докажем транзитивность. Пусть $\beta, \gamma, \delta \in \alpha$, $\beta \leqslant_o \gamma$ и $\gamma \leqslant_o \delta$. Если $\beta{=}\gamma$ или $\gamma{=}\delta$, то очевидно выполняется $\beta \leqslant_o \delta$. Пусть $\beta{\neq}\gamma$ и $\gamma{\neq}\delta$.

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Определение. Пусть X — произвольное множество ординалов. Определим на элементах X следующий *порядок по принадлежности*:

$$\alpha \leqslant_o \beta \overset{\text{опр}}{\iff} (\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta).$$

Теорема 9 (о вполне упорядоченности ординала).
Если α — ординал, то $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ — в.у.м.

Доказательство: Рефлексивность $\leqslant_o$ очевидна. Докажем антисимметричность. Пусть $\beta, \gamma \in \alpha$, $\beta \leqslant_o \gamma$ и $\gamma \leqslant_o \beta$. $\Longrightarrow$ В силу определения $\leqslant_o$, возможны четыре случая: $\beta = \gamma \vee (\beta = \gamma \,\&\, \beta \in \gamma) \vee (\beta = \gamma \,\&\, \gamma \in \beta) \vee (\beta \in \gamma \,\&\, \gamma \in \beta)$. Во 2-м и 3-м случаях получаем $\beta \in \beta$, что противоречит Следствию 3 (1). В 4-м случае получаем противоречие со Следствием 3 (2). $\Longrightarrow$ Остаётся 1-й случай, из которого вытекает антисимметричность.

Докажем транзитивность. Пусть $\beta, \gamma, \delta \in \alpha$, $\beta \leqslant_o \gamma$ и $\gamma \leqslant_o \delta$. Если $\beta{=}\gamma$ или $\gamma{=}\delta$, то очевидно выполняется $\beta \leqslant_o \delta$. Пусть $\beta{\neq}\gamma$ и $\gamma{\neq}\delta$. $\Longrightarrow$ $\beta \in \gamma \in \delta$. В силу транзитивности δ, получаем $\beta \in \gamma \subseteq \delta$.

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Определение. Пусть X — произвольное множество ординалов. Определим на элементах X следующий *порядок по принадлежности*:

$$\alpha \leqslant_o \beta \overset{\text{опр}}{\Longleftrightarrow} (\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta).$$

Теорема 9 (о вполне упорядоченности ординала).
Если α — ординал, то $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ — в.у.м.

Доказательство: Рефлексивность $\leqslant_o$ очевидна. Докажем антисимметричность. Пусть $\beta, \gamma \in \alpha$, $\beta \leqslant_o \gamma$ и $\gamma \leqslant_o \beta$. $\Longrightarrow$ В силу определения $\leqslant_o$, возможны четыре случая: $\beta = \gamma \vee (\beta = \gamma \mathbin{\&} \beta \in \gamma) \vee (\beta = \gamma \mathbin{\&} \gamma \in \beta) \vee (\beta \in \gamma \mathbin{\&} \gamma \in \beta)$. Во 2-м и 3-м случаях получаем $\beta \in \beta$, что противоречит Следствию 3 (1). В 4-м случае получаем противоречие со Следствием 3 (2). $\Longrightarrow$ Остаётся 1-й случай, из которого вытекает антисимметричность.

Докажем транзитивность. Пусть $\beta, \gamma, \delta \in \alpha$, $\beta \leqslant_o \gamma$ и $\gamma \leqslant_o \delta$. Если $\beta{=}\gamma$ или $\gamma{=}\delta$, то очевидно выполняется $\beta \leqslant_o \delta$. Пусть $\beta{\neq}\gamma$ и $\gamma{\neq}\delta$. $\Longrightarrow$ $\beta \in \gamma \in \delta$. В силу транзитивности δ, получаем $\beta \in \gamma \subseteq \delta$. $\Longrightarrow$ $\beta \in \delta$.

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Определение. Пусть X — произвольное множество ординалов. Определим на элементах X следующий *порядок по принадлежности*:

$$\alpha \leqslant_o \beta \overset{\text{опр}}{\iff} (\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta).$$

Теорема 9 (о вполне упорядоченности ординала).
Если α — ординал, то $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ — в.у.м.

Доказательство: Рефлексивность $\leqslant_o$ очевидна. Докажем антисимметричность. Пусть $\beta, \gamma \in \alpha$, $\beta \leqslant_o \gamma$ и $\gamma \leqslant_o \beta$. $\Longrightarrow$ В силу определения $\leqslant_o$, возможны четыре случая: $\beta = \gamma \vee (\beta = \gamma \;\&\; \beta \in \gamma) \vee (\beta = \gamma \;\&\; \gamma \in \beta) \vee (\beta \in \gamma \;\&\; \gamma \in \beta)$. Во 2-м и 3-м случаях получаем $\beta \in \beta$, что противоречит Следствию 3 (1). В 4-м случае получаем противоречие со Следствием 3 (2). $\Longrightarrow$ Остаётся 1-й случай, из которого вытекает антисимметричность.

Докажем транзитивность. Пусть $\beta, \gamma, \delta \in \alpha$, $\beta \leqslant_o \gamma$ и $\gamma \leqslant_o \delta$. Если $\beta{=}\gamma$ или $\gamma{=}\delta$, то очевидно выполняется $\beta \leqslant_o \delta$. Пусть $\beta{\neq}\gamma$ и $\gamma{\neq}\delta$. $\Longrightarrow$ $\beta \in \gamma \in \delta$. В силу транзитивности δ, получаем $\beta \in \gamma \subseteq \delta$. $\Longrightarrow$ $\beta \in \delta$. $\Longrightarrow$ $\beta \leqslant_o \delta$.

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Линейность $\leqslant_o$ очевидно вытекает из теоремы о сравнимости ординалов.

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Линейность $\leqslant_o$ очевидно вытекает из теоремы о сравнимости ординалов.

Докажем фундированность.

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Линейность $\leqslant_o$ очевидно вытекает из теоремы о сравнимости ординалов.

Докажем фундированность. Пусть $X \subseteq \alpha$ — произвольное непустое подмножество α.

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Линейность $\leqslant_o$ очевидно вытекает из теоремы о сравнимости ординалов.

Докажем фундированность. Пусть $X \subseteq \alpha$ — произвольное непустое подмножество α. По аксиоме регулярности существует $\beta \in X$ такой, что $\beta \cap X = \varnothing$.

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Линейность $\leqslant_o$ очевидно вытекает из теоремы о сравнимости ординалов.

Докажем фундированность. Пусть $X \subseteq \alpha$ — произвольное непустое подмножество α. По аксиоме регулярности существует $\beta \in X$ такой, что $\beta \cap X = \varnothing$. Покажем, что ординал β является наименьшим в X относительно порядка по принадлежности.

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Линейность $\leqslant_o$ очевидно вытекает из теоремы о сравнимости ординалов.

Докажем фундированность. Пусть $X \subseteq \alpha$ — произвольное непустое подмножество α. По аксиоме регулярности существует $\beta \in X$ такой, что $\beta \cap X = \varnothing$. Покажем, что ординал β является наименьшим в X относительно порядка по принадлежности. Рассмотрим произвольный ординал $\gamma \in X$.

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Линейность $\leqslant_o$ очевидно вытекает из теоремы о сравнимости ординалов.

Докажем фундированность. Пусть $X \subseteq \alpha$ — произвольное непустое подмножество α. По аксиоме регулярности существует $\beta \in X$ такой, что $\beta \cap X = \varnothing$. Покажем, что ординал β является наименьшим в X относительно порядка по принадлежности. Рассмотрим произвольный ординал $\gamma \in X$. По теореме о сравнимости ординалов либо $\beta \in \gamma$, либо $\beta = \gamma$, либо $\gamma \in \beta$.

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Линейность $\leqslant_o$ очевидно вытекает из теоремы о сравнимости ординалов.

Докажем фундированность. Пусть $X \subseteq \alpha$ — произвольное непустое подмножество α. По аксиоме регулярности существует $\beta \in X$ такой, что $\beta \cap X = \varnothing$. Покажем, что ординал β является наименьшим в X относительно порядка по принадлежности. Рассмотрим произвольный ординал $\gamma \in X$. По теореме о сравнимости ординалов либо $\beta \in \gamma$, либо $\beta = \gamma$, либо $\gamma \in \beta$. В случае $\gamma \in \beta$ получаем, что $\gamma \in \beta \cap X$, что невозможно.

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Линейность $\leqslant_o$ очевидно вытекает из теоремы о сравнимости ординалов.

Докажем фундированность. Пусть $X \subseteq \alpha$ — произвольное непустое подмножество α. По аксиоме регулярности существует $\beta \in X$ такой, что $\beta \cap X = \varnothing$. Покажем, что ординал β является наименьшим в X относительно порядка по принадлежности. Рассмотрим произвольный ординал $\gamma \in X$. По теореме о сравнимости ординалов либо $\beta \in \gamma$, либо $\beta = \gamma$, либо $\gamma \in \beta$. В случае $\gamma \in \beta$ получаем, что $\gamma \in \beta \cap X$, что невозможно. $\Longrightarrow$ Остаются лишь случаи $\beta \in \gamma$ или $\beta = \gamma$.

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Линейность $\leqslant_o$ очевидно вытекает из теоремы о сравнимости ординалов.

Докажем фундированность. Пусть $X \subseteq \alpha$ — произвольное непустое подмножество α. По аксиоме регулярности существует $\beta \in X$ такой, что $\beta \cap X = \varnothing$. Покажем, что ординал β является наименьшим в X относительно порядка по принадлежности. Рассмотрим произвольный ординал $\gamma \in X$. По теореме о сравнимости ординалов либо $\beta \in \gamma$, либо $\beta = \gamma$, либо $\gamma \in \beta$. В случае $\gamma \in \beta$ получаем, что $\gamma \in \beta \cap X$, что невозможно. $\Longrightarrow$ Остаются лишь случаи $\beta \in \gamma$ или $\beta = \gamma$. $\Longrightarrow$ $\beta \leqslant_o \gamma$.

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Линейность $\leqslant_o$ очевидно вытекает из теоремы о сравнимости ординалов.

Докажем фундированность. Пусть $X \subseteq \alpha$ — произвольное непустое подмножество α. По аксиоме регулярности существует $\beta \in X$ такой, что $\beta \cap X = \varnothing$. Покажем, что ординал β является наименьшим в X относительно порядка по принадлежности. Рассмотрим произвольный ординал $\gamma \in X$. По теореме о сравнимости ординалов либо $\beta \in \gamma$, либо $\beta = \gamma$, либо $\gamma \in \beta$. В случае $\gamma \in \beta$ получаем, что $\gamma \in \beta \cap X$, что невозможно. $\Longrightarrow$ Остаются лишь случаи $\beta \in \gamma$ или $\beta = \gamma$. $\Longrightarrow$ $\beta \leqslant_o \gamma$. Что и требовалось. $\square$

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Линейность $\leqslant_o$ очевидно вытекает из теоремы о сравнимости ординалов.

Докажем фундированность. Пусть $X \subseteq \alpha$ — произвольное непустое подмножество α. По аксиоме регулярности существует $\beta \in X$ такой, что $\beta \cap X = \varnothing$. Покажем, что ординал β является наименьшим в X относительно порядка по принадлежности. Рассмотрим произвольный ординал $\gamma \in X$. По теореме о сравнимости ординалов либо $\beta \in \gamma$, либо $\beta = \gamma$, либо $\gamma \in \beta$. В случае $\gamma \in \beta$ получаем, что $\gamma \in \beta \cap X$, что невозможно. $\Longrightarrow$ Остаются лишь случаи $\beta \in \gamma$ или $\beta = \gamma$. $\Longrightarrow$ $\beta \leqslant_o \gamma$. Что и требовалось. $\square$

Следующая наша цель — показать, что с точностью до изоморфизма, ординалами исчерпывается весь класс вполне упорядоченных множеств.

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Линейность $\leqslant_o$ очевидно вытекает из теоремы о сравнимости ординалов.

Докажем фундированность. Пусть $X \subseteq \alpha$ — произвольное непустое подмножество α. По аксиоме регулярности существует $\beta \in X$ такой, что $\beta \cap X = \varnothing$. Покажем, что ординал β является наименьшим в X относительно порядка по принадлежности. Рассмотрим произвольный ординал $\gamma \in X$. По теореме о сравнимости ординалов либо $\beta \in \gamma$, либо $\beta = \gamma$, либо $\gamma \in \beta$. В случае $\gamma \in \beta$ получаем, что $\gamma \in \beta \cap X$, что невозможно. $\Longrightarrow$ Остаются лишь случаи $\beta \in \gamma$ или $\beta = \gamma$. $\Longrightarrow$ $\beta \leqslant_o \gamma$. Что и требовалось. $\square$

Следующая наша цель — показать, что с точностью до изоморфизма, ординалами исчерпывается весь класс вполне упорядоченных множеств. Для этого нам потребуются некоторые общие сведения о вполне упорядоченных множествах.

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Линейность $\leqslant_o$ очевидно вытекает из теоремы о сравнимости ординалов.

Докажем фундированность. Пусть $X \subseteq \alpha$ — произвольное непустое подмножество α. По аксиоме регулярности существует $\beta \in X$ такой, что $\beta \cap X = \varnothing$. Покажем, что ординал β является наименьшим в X относительно порядка по принадлежности. Рассмотрим произвольный ординал $\gamma \in X$. По теореме о сравнимости ординалов либо $\beta \in \gamma$, либо $\beta = \gamma$, либо $\gamma \in \beta$. В случае $\gamma \in \beta$ получаем, что $\gamma \in \beta \cap X$, что невозможно. $\Longrightarrow$ Остаются лишь случаи $\beta \in \gamma$ или $\beta = \gamma$. $\Longrightarrow$ $\beta \leqslant_o \gamma$. Что и требовалось. $\square$

Следующая наша цель — показать, что с точностью до изоморфизма, ординалами исчерпывается весь класс вполне упорядоченных множеств. Для этого нам потребуются некоторые общие сведения о вполне упорядоченных множествах.

Определение. Пусть $\mathfrak{A}=\langle A, \leqslant\rangle$ — л.у.м. Подмножество $X \subseteq A$ называется *начальным сегментом* в $\mathfrak{A}$, если выполняется условие $\forall x \in X\ \forall a \in A(a \leqslant x \to a \in X)$.

Теорема о вполне упорядоченности ординала

Линейность $\leqslant_o$ очевидно вытекает из теоремы о сравнимости ординалов.

Докажем фундированность. Пусть $X \subseteq \alpha$ — произвольное непустое подмножество α. По аксиоме регулярности существует $\beta \in X$ такой, что $\beta \cap X = \varnothing$. Покажем, что ординал β является наименьшим в X относительно порядка по принадлежности. Рассмотрим произвольный ординал $\gamma \in X$. По теореме о сравнимости ординалов либо $\beta \in \gamma$, либо $\beta = \gamma$, либо $\gamma \in \beta$. В случае $\gamma \in \beta$ получаем, что $\gamma \in \beta \cap X$, что невозможно. $\Longrightarrow$ Остаются лишь случаи $\beta \in \gamma$ или $\beta = \gamma$. $\Longrightarrow$ $\beta \leqslant_o \gamma$. Что и требовалось. $\square$

Следующая наша цель — показать, что с точностью до изоморфизма, ординалами исчерпывается весь класс вполне упорядоченных множеств. Для этого нам потребуются некоторые общие сведения о вполне упорядоченных множествах.

Определение. Пусть $\mathfrak{A}=\langle A, \leqslant\rangle$ — л.у.м. Подмножество $X \subseteq A$ называется *начальным сегментом* в $\mathfrak{A}$, если выполняется условие $\forall x \in X\ \forall a \in A (a \leqslant x \to a \in X)$. Для любого $a \in A$ множество $\widehat{a} = \{b \in a \mid b < a\}$ очевидно является начальным сегментом в $\mathfrak{A}$ и называется *открытым начальным сегментом*.

Предложение о монотонных функциях для в.у.м. и его следствия

Предложение 10 (о монотонных функциях).

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ *— в.у.м.,* $f : A \xrightarrow{1-1} A$ *— изоморфное вложение. Тогда для любого* $a \in A$ *справедливо* $a \leqslant f(a)$*.*

Предложение о монотонных функциях для в.у.м. и его следствия

Предложение 10 (о монотонных функциях).
Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ *— в.у.м.,* $f : A \xrightarrow{1-1} A$ *— изоморфное вложение. Тогда для любого* $a \in A$ *справедливо* $a \leqslant f(a)$*.*

Доказательство: Допустим, напротив, множество $X = \{a \in A \mid a \nleqslant f(a)\}$ не пусто.

Предложение о монотонных функциях для в.у.м. и его следствия

Предложение 10 (о монотонных функциях).
Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ *— в.у.м.,* $f : A \xrightarrow{1-1} A$ *— изоморфное вложение. Тогда для любого* $a \in A$ *справедливо* $a \leqslant f(a)$*.*

Доказательство: Допустим, напротив, множество $X = \{a \in A \mid a \nleqslant f(a)\}$ не пусто.
$\Longrightarrow$ В силу вполне упорядоченности, существует a_0 — наименьший элемент в X.

Предложение 10 (о монотонных функциях).

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ — в.у.м., $f : A \xrightarrow{1-1} A$ — изоморфное вложение. Тогда для любого $a \in A$ справедливо $a \leqslant f(a)$.

Доказательство: Допустим, напротив, множество $X = \{a \in A \mid a \nleqslant f(a)\}$ не пусто.
$\Longrightarrow$ В силу вполне упорядоченности, существует a_0 — наименьший элемент в X.
В силу линейной упорядоченности, из $a_0 \nleqslant f(a_0)$ следует, что $f(a_0) < a_0$.

Предложение о монотонных функциях для в.у.м. и его следствия

Предложение 10 (о монотонных функциях).

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ *— в.у.м.,* $f : A \xrightarrow{1-1} A$ *— изоморфное вложение. Тогда для любого* $a \in A$ *справедливо* $a \leqslant f(a)$.

Доказательство: Допустим, напротив, множество $X = \{a \in A \mid a \nleqslant f(a)\}$ не пусто.
$\Longrightarrow$ В силу вполне упорядоченности, существует a_0 — наименьший элемент в X.
В силу линейной упорядоченности, из $a_0 \nleqslant f(a_0)$ следует, что $f(a_0) < a_0$. $\Longrightarrow$ Т.к. f — изоморфное вложение, заключаем, что $f(f(a_0)) < f(a_0)$.

Предложение о монотонных функциях для в.у.м. и его следствия

Предложение 10 (о монотонных функциях).
Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ *— в.у.м.,* $f : A \xrightarrow{1-1} A$ *— изоморфное вложение. Тогда для любого* $a \in A$ *справедливо* $a \leqslant f(a)$.

Доказательство: Допустим, напротив, множество $X = \{a \in A \mid a \nleqslant f(a)\}$ не пусто. $\Longrightarrow$ В силу вполне упорядоченности, существует a_0 — наименьший элемент в X. В силу линейной упорядоченности, из $a_0 \nleqslant f(a_0)$ следует, что $f(a_0) < a_0$. $\Longrightarrow$ Т.к. f — изоморфное вложение, заключаем, что $f(f(a_0)) < f(a_0)$. $\Longrightarrow$ $f(a_0) \in X$, что противоречит минимальности a_0 в X. $\square$

Предложение о монотонных функциях для в.у.м. и его следствия

Предложение 10 (о монотонных функциях).
Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ *— в.у.м.,* $f : A \xrightarrow{1-1} A$ *— изоморфное вложение. Тогда для любого* $a \in A$ *справедливо* $a \leqslant f(a)$*.*

Доказательство: Допустим, напротив, множество $X = \{a \in A \mid a \nleqslant f(a)\}$ не пусто.
$\Longrightarrow$ В силу вполне упорядоченности, существует a_0 — наименьший элемент в X.
В силу линейной упорядоченности, из $a_0 \nleqslant f(a_0)$ следует, что $f(a_0) < a_0$. $\Longrightarrow$ Т.к. f — изоморфное вложение, заключаем, что $f(f(a_0)) < f(a_0)$. $\Longrightarrow$ $f(a_0) \in X$, что противоречит минимальности a_0 в X. $\square$

Следствие 11. *Для любых ординалов* α*,* β *справедливы следующие утверждения:*
(1) *Если существует изоморфное вложение* $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ *в* $\langle \beta, \leqslant_o \rangle$*, то* $\alpha = \beta$ *или* $\alpha \in \beta$*.*
(2) *Если существует изоморфизм из* $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ *на* $\langle \beta, \leqslant_o \rangle$*, то* $\alpha = \beta$*.*

Предложение о монотонных функциях для в.у.м. и его следствия

Предложение 10 (о монотонных функциях).
Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ — в.у.м., $f : A \xrightarrow{1-1} A$ — изоморфное вложение. Тогда для любого $a \in A$ справедливо $a \leqslant f(a)$.

Доказательство: Допустим, напротив, множество $X = \{a \in A \mid a \nleqslant f(a)\}$ не пусто. $\Longrightarrow$ В силу вполне упорядоченности, существует a_0 — наименьший элемент в X. В силу линейной упорядоченности, из $a_0 \nleqslant f(a_0)$ следует, что $f(a_0) < a_0$. $\Longrightarrow$ Т.к. f — изоморфное вложение, заключаем, что $f(f(a_0)) < f(a_0)$. $\Longrightarrow$ $f(a_0) \in X$, что противоречит минимальности a_0 в X. $\square$

Следствие 11. *Для любых ординалов α, β справедливы следующие утверждения:*
(1) *Если существует изоморфное вложение $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ в $\langle \beta, \leqslant_o \rangle$, то $\alpha = \beta$ или $\alpha \in \beta$.*
(2) *Если существует изоморфизм из $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ на $\langle \beta, \leqslant_o \rangle$, то $\alpha = \beta$.*

Доказательство: Пункт (2) очевидно вытекает из пункта (1) и из аксиомы регулярности.

Предложение о монотонных функциях для в.у.м. и его следствия

Предложение 10 (о монотонных функциях).
Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ *— в.у.м.,* $f : A \xrightarrow{1-1} A$ *— изоморфное вложение. Тогда для любого* $a \in A$ *справедливо* $a \leqslant f(a)$*.*

Доказательство: Допустим, напротив, множество $X = \{a \in A \mid a \nleqslant f(a)\}$ не пусто. $\Longrightarrow$ В силу вполне упорядоченности, существует a_0 — наименьший элемент в X. В силу линейной упорядоченности, из $a_0 \nleqslant f(a_0)$ следует, что $f(a_0) < a_0$. $\Longrightarrow$ Т.к. f — изоморфное вложение, заключаем, что $f(f(a_0)) < f(a_0)$. $\Longrightarrow$ $f(a_0) \in X$, что противоречит минимальности a_0 в X. $\square$

Следствие 11. *Для любых ординалов* α*,* β *справедливы следующие утверждения:*
(1) *Если существует изоморфное вложение* $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ *в* $\langle \beta, \leqslant_o \rangle$*, то* $\alpha = \beta$ *или* $\alpha \in \beta$*.*
(2) *Если существует изоморфизм из* $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ *на* $\langle \beta, \leqslant_o \rangle$*, то* $\alpha = \beta$*.*

Доказательство: Пункт (2) очевидно вытекает из пункта (1) и из аксиомы регулярности. Докажем пункт (1).

Аксиома подстановки ZF

(1) Пусть $f : \alpha \xrightarrow{1-1} \beta$ — изоморфное вложение.

Аксиома подстановки ZF

(1) Пусть $f : \alpha \xrightarrow{1-1} \beta$ — изоморфное вложение. По теореме о сравнимости ординалов либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\beta \in \alpha$.

Аксиома подстановки ZF

(1) Пусть $f : \alpha \xrightarrow{1-1} \beta$ — изоморфное вложение. По теореме о сравнимости ординалов либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\beta \in \alpha$. Допустим, $\beta \in \alpha$.

Аксиома подстановки ZF

(1) Пусть $f : \alpha \xrightarrow{1-1} \beta$ — изоморфное вложение. По теореме о сравнимости ординалов либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\beta \in \alpha$. Допустим, $\beta \in \alpha$. $\Longrightarrow$ Определён образ $f(\beta) \in \beta$.

Аксиома подстановки ZF

(1) Пусть $f : \alpha \xrightarrow{1-1} \beta$ — изоморфное вложение. По теореме о сравнимости ординалов либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\beta \in \alpha$. Допустим, $\beta \in \alpha$. $\implies$ Определён образ $f(\beta) \in \beta$. С другой стороны, из транзитивности α следует, что $\beta \subseteq \alpha$.

Аксиома подстановки ZF

(1) Пусть $f : \alpha \xrightarrow{1-1} \beta$ — изоморфное вложение. По теореме о сравнимости ординалов либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\beta \in \alpha$. Допустим, $\beta \in \alpha$. $\Longrightarrow$ Определён образ $f(\beta) \in \beta$. С другой стороны, из транзитивности α следует, что $\beta \subseteq \alpha$. $\Longrightarrow$ Отображение f можно рассматривать как изоморфное вложение $f : \alpha \xrightarrow{1-1} \alpha$.

Аксиома подстановки ZF

(1) Пусть $f : \alpha \xrightarrow{1-1} \beta$ — изоморфное вложение. По теореме о сравнимости ординалов либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\beta \in \alpha$. Допустим, $\beta \in \alpha$. $\Longrightarrow$ Определён образ $f(\beta) \in \beta$. С другой стороны, из транзитивности α следует, что $\beta \subseteq \alpha$. $\Longrightarrow$ Отображение f можно рассматривать как изоморфное вложение $f : \alpha \xrightarrow{1-1} \alpha$. $\Longrightarrow$ По предложению 10 получаем, что $\beta \leqslant_o f(\beta)$.

Аксиома подстановки ZF

(1) Пусть $f : \alpha \xrightarrow{1-1} \beta$ — изоморфное вложение. По теореме о сравнимости ординалов либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\beta \in \alpha$. Допустим, $\beta \in \alpha$. $\Longrightarrow$ Определён образ $f(\beta) \in \beta$. С другой стороны, из транзитивности α следует, что $\beta \subseteq \alpha$. $\Longrightarrow$ Отображение f можно рассматривать как изоморфное вложение $f : \alpha \xrightarrow{1-1} \alpha$. $\Longrightarrow$ По предложению 10 получаем, что $\beta \leqslant_o f(\beta)$. $\Longrightarrow$ Либо $\beta = f(\beta) \in \beta$, либо $\beta \in f(\beta) \in \beta$.

Аксиома подстановки ZF

(1) Пусть $f : \alpha \xrightarrow{1-1} \beta$ — изоморфное вложение. По теореме о сравнимости ординалов либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\beta \in \alpha$. Допустим, $\beta \in \alpha$. $\Longrightarrow$ Определён образ $f(\beta) \in \beta$. С другой стороны, из транзитивности α следует, что $\beta \subseteq \alpha$. $\Longrightarrow$ Отображение f можно рассматривать как изоморфное вложение $f : \alpha \xrightarrow{1-1} \alpha$. $\Longrightarrow$ По предложению 10 получаем, что $\beta \leqslant_o f(\beta)$. $\Longrightarrow$ Либо $\beta = f(\beta) \in \beta$, либо $\beta \in f(\beta) \in \beta$. В любом случае получаем противоречие с аксиомой регулярности.

Аксиома подстановки ZF

(1) Пусть $f : \alpha \xrightarrow{1-1} \beta$ — изоморфное вложение. По теореме о сравнимости ординалов либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\beta \in \alpha$. Допустим, $\beta \in \alpha$. $\Longrightarrow$ Определён образ $f(\beta) \in \beta$. С другой стороны, из транзитивности α следует, что $\beta \subseteq \alpha$. $\Longrightarrow$ Отображение f можно рассматривать как изоморфное вложение $f : \alpha \xrightarrow{1-1} \alpha$. $\Longrightarrow$ По предложению 10 получаем, что $\beta \leqslant_o f(\beta)$. $\Longrightarrow$ Либо $\beta = f(\beta) \in \beta$, либо $\beta \in f(\beta) \in \beta$. В любом случае получаем противоречие с аксиомой регулярности. $\Longrightarrow$ Либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$. $\square$

Аксиома подстановки ZF

(1) Пусть $f : \alpha \xrightarrow{1-1} \beta$ — изоморфное вложение. По теореме о сравнимости ординалов либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\beta \in \alpha$. Допустим, $\beta \in \alpha$. $\Longrightarrow$ Определён образ $f(\beta) \in \beta$. С другой стороны, из транзитивности α следует, что $\beta \subseteq \alpha$. $\Longrightarrow$ Отображение f можно рассматривать как изоморфное вложение $f : \alpha \xrightarrow{1-1} \alpha$. $\Longrightarrow$ По предложению 10 получаем, что $\beta \leqslant_o f(\beta)$. $\Longrightarrow$ Либо $\beta = f(\beta) \in \beta$, либо $\beta \in f(\beta) \in \beta$. В любом случае получаем противоречие с аксиомой регулярности. $\Longrightarrow$ Либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$. $\square$

Для доказательства теоремы о каноническом в.у.м. нам также потребуется следующая аксиома.

Аксиома подстановки ZF

(1) Пусть $f : \alpha \xrightarrow{1-1} \beta$ — изоморфное вложение. По теореме о сравнимости ординалов либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\beta \in \alpha$. Допустим, $\beta \in \alpha$. $\Longrightarrow$ Определён образ $f(\beta) \in \beta$. С другой стороны, из транзитивности α следует, что $\beta \subseteq \alpha$. $\Longrightarrow$ Отображение f можно рассматривать как изоморфное вложение $f : \alpha \xrightarrow{1-1} \alpha$. $\Longrightarrow$ По предложению 10 получаем, что $\beta \leqslant_o f(\beta)$. $\Longrightarrow$ Либо $\beta = f(\beta) \in \beta$, либо $\beta \in f(\beta) \in \beta$. В любом случае получаем противоречие с аксиомой регулярности. $\Longrightarrow$ Либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$. $\square$

Для доказательства теоремы о каноническом в.у.м. нам также потребуется следующая аксиома.

Аксиома подстановки ZF. *Если A — множество, а $\Phi(x, y)$ — теоретико-множественное свойство такое, что для любого x существует не более одного y, удовлетворяющего свойству $\Phi(x, y)$, то существует множество*

$$\{y \mid \Phi(x, y) \text{ для некоторого } x \in A\}.$$

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Теорема 12 (о каноническом в.у.м.).
Для любого в.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ *существует единственный ординал* α *такой, что* $\mathfrak{A}$ *и* $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ *изоморфны.*

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Теорема 12 (о каноническом в.у.м.).
Для любого в.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ *существует единственный ординал* α *такой, что* $\mathfrak{A}$ *и* $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ *изоморфны.*

Доказательство:

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Теорема 12 (о каноническом в.у.м.).
Для любого в.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ *существует единственный ординал* α *такой, что* $\mathfrak{A}$ *и* $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ *изоморфны.*

Доказательство: Единственность α вытекает из Следствия 11, пункт (2). Докажем существование.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Теорема 12 (о каноническом в.у.м.).
Для любого в.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ *существует единственный ординал* α *такой, что* $\mathfrak{A}$ *и* $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ *изоморфны.*

Доказательство: Единственность α вытекает из Следствия 11, пункт (2). Докажем существование. Рассмотрим следующее теоретико-множественное свойство (с параметром $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$):

$$\Phi(x, y) = (x \in A) \ \& \ \mathrm{Ord}(y) \ \& \ \big(\langle \widehat{x}, \leqslant \rangle \cong \langle y, \leqslant_o \rangle \big).$$

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Теорема 12 (о каноническом в.у.м.).
Для любого в.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ *существует единственный ординал* α *такой, что* $\mathfrak{A}$ *и* $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ *изоморфны.*

Доказательство: Единственность α вытекает из Следствия 11, пункт (2). Докажем существование. Рассмотрим следующее теоретико-множественное свойство (с параметром $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$):

$$\Phi(x, y) = (x \in A) \ \& \ \mathrm{Ord}(y) \ \& \ \big(\langle \widehat{x}, \leqslant \rangle \cong \langle y, \leqslant_o \rangle\big).$$

По аксиоме выделения существует множество $A_0 = \{a \in A \mid \exists y \Phi(a, y)\}$.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Теорема 12 (о каноническом в.у.м.).
Для любого в.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ *существует единственный ординал* α *такой, что* $\mathfrak{A}$ *и* $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ *изоморфны.*

Доказательство: Единственность α вытекает из Следствия 11, пункт (2). Докажем существование. Рассмотрим следующее теоретико-множественное свойство (с параметром $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$):

$$\Phi(x, y) = (x \in A) \mathbin{\&} \mathrm{Ord}(y) \mathbin{\&} \big(\langle \widehat{x}, \leqslant \rangle \cong \langle y, \leqslant_o \rangle\big).$$

По аксиоме выделения существует множество $A_0 = \{a \in A \mid \exists y \Phi(a, y)\}$. В силу Следствия 11, пункт (2), для любого открытого начального сегмента $\widehat{x}$ в $\mathfrak{A}$ существует не более одного ординала y такого, что $\langle \widehat{x}, \leqslant \rangle$ и $\langle y, \leqslant_o \rangle$ изоморфны.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Теорема 12 (о каноническом в.у.м.).
Для любого в.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ *существует единственный ординал* α *такой, что* $\mathfrak{A}$ *и* $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ *изоморфны.*

Доказательство: Единственность α вытекает из Следствия 11, пункт (2). Докажем существование. Рассмотрим следующее теоретико-множественное свойство (с параметром $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$):

$$\Phi(x, y) = (x \in A) \ \& \ \mathrm{Ord}(y) \ \& \ \big(\langle \widehat{x}, \leqslant \rangle \cong \langle y, \leqslant_o \rangle\big).$$

По аксиоме выделения существует множество $A_0 = \{a \in A \mid \exists y \Phi(a, y)\}$. В силу Следствия 11, пункт (2), для любого открытого начального сегмента $\widehat{x}$ в $\mathfrak{A}$ существует не более одного ординала y такого, что $\langle \widehat{x}, \leqslant \rangle$ и $\langle y, \leqslant_o \rangle$ изоморфны.
$\Longrightarrow$ По аксиоме подстановки существует множество $\alpha = \{y \mid \exists x (x \in A \ \& \ \Phi(x, y))\}$.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Теорема 12 (о каноническом в.у.м.).
Для любого в.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ *существует единственный ординал* α *такой, что* $\mathfrak{A}$ *и* $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$ *изоморфны.*

Доказательство: Единственность α вытекает из Следствия 11, пункт (2). Докажем существование. Рассмотрим следующее теоретико-множественное свойство (с параметром $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$):

$$\Phi(x, y) = (x \in A) \,\&\, \mathrm{Ord}(y) \,\&\, \big(\langle \widehat{x}, \leqslant \rangle \cong \langle y, \leqslant_o \rangle\big).$$

По аксиоме выделения существует множество $A_0 = \{a \in A \mid \exists y \Phi(a, y)\}$. В силу Следствия 11, пункт (2), для любого открытого начального сегмента $\widehat{x}$ в $\mathfrak{A}$ существует не более одного ординала y такого, что $\langle \widehat{x}, \leqslant \rangle$ и $\langle y, \leqslant_o \rangle$ изоморфны.
$\Longrightarrow$ По аксиоме подстановки существует множество $\alpha = \{y \mid \exists x (x{\in}A \,\&\, \Phi(x, y))\}$.
$\Longrightarrow$ Из данных рассуждений следует, что если для $x \in A_0$ и $y \in \alpha$ положить

$$\varphi(x) = y \Longleftrightarrow \Phi(x, y),$$

то мы получим сюръективное отображение $\varphi : A_0 \to \alpha$ из A_0 на α.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Докажем, что $\varphi : A_0 \to \alpha$ инъективно.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Докажем, что $\varphi : A_0 \to \alpha$ инъективно. Допустим, $a, b \in A_0$, $a \neq b$ и $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Докажем, что $\varphi : A_0 \to \alpha$ инъективно. Допустим, $a, b \in A_0$, $a \neq b$ и $\varphi(a) = \varphi(b)$.
$\implies$ Можно считать, $a < b$.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Докажем, что $\varphi : A_0 \to \alpha$ инъективно. Допустим, $a, b \in A_0$, $a \neq b$ и $\varphi(a) = \varphi(b)$.
$\Longrightarrow$ Можно считать, $a < b$. Поскольку $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \widehat{b}, \leqslant \rangle$, существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \widehat{a} \subseteq \widehat{b}$.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Докажем, что $\varphi : A_0 \to \alpha$ инъективно. Допустим, $a, b \in A_0$, $a \neq b$ и $\varphi(a) = \varphi(b)$.
$\Longrightarrow$ Можно считать, $a < b$. Поскольку $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \widehat{b}, \leqslant \rangle$, существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \widehat{a} \subseteq \widehat{b}$. $\Longrightarrow$ Т.к. $a \in \widehat{b}$, то по Предложению 10 заключаем, что $a \leqslant f(a) \in \widehat{a}$.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Докажем, что $\varphi : A_0 \to \alpha$ инъективно. Допустим, $a, b \in A_0$, $a \neq b$ и $\varphi(a) = \varphi(b)$.
$\Longrightarrow$ Можно считать, $a < b$. Поскольку $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \widehat{b}, \leqslant \rangle$, существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \widehat{a} \subseteq \widehat{b}$. $\Longrightarrow$ Т.к. $a \in \widehat{b}$, то по Предложению 10 заключаем, что $a \leqslant f(a) \in \widehat{a}$.
$\Longrightarrow$ $a \leqslant f(a) < a$, что невозможно.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Докажем, что $\varphi : A_0 \to \alpha$ инъективно. Допустим, $a, b \in A_0$, $a \neq b$ и $\varphi(a) = \varphi(b)$.
$\Longrightarrow$ Можно считать, $a < b$. Поскольку $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \widehat{b}, \leqslant \rangle$, существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \widehat{a} \subseteq \widehat{b}$. $\Longrightarrow$ Т.к. $a \in \widehat{b}$, то по Предложению 10 заключаем, что $a \leqslant f(a) \in \widehat{a}$.
$\Longrightarrow$ $a \leqslant f(a) < a$, что невозможно.

Докажем, что биекция $\varphi : A_0 \to \alpha$ сохраняет порядок.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Докажем, что $\varphi : A_0 \to \alpha$ инъективно. Допустим, $a, b \in A_0$, $a \neq b$ и $\varphi(a) = \varphi(b)$.
$\Longrightarrow$ Можно считать, $a < b$. Поскольку $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \widehat{b}, \leqslant \rangle$, существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \widehat{a} \subseteq \widehat{b}$. $\Longrightarrow$ Т.к. $a \in \widehat{b}$, то по Предложению 10 заключаем, что $a \leqslant f(a) \in \widehat{a}$.
$\Longrightarrow$ $a \leqslant f(a) < a$, что невозможно.

Докажем, что биекция $\varphi : A_0 \to \alpha$ сохраняет порядок. Пусть $a, b \in A_0$, $a \leqslant b$.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Докажем, что $\varphi : A_0 \to \alpha$ инъективно. Допустим, $a, b \in A_0$, $a \neq b$ и $\varphi(a) = \varphi(b)$. $\Longrightarrow$ Можно считать, $a < b$. Поскольку $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \widehat{b}, \leqslant \rangle$, существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \widehat{a} \subseteq \widehat{b}$. $\Longrightarrow$ Т.к. $a \in \widehat{b}$, то по Предложению 10 заключаем, что $a \leqslant f(a) \in \widehat{a}$. $\Longrightarrow a \leqslant f(a) < a$, что невозможно.

Докажем, что биекция $\varphi : A_0 \to \alpha$ сохраняет порядок. Пусть $a, b \in A_0$, $a \leqslant b$. $\Longrightarrow$ $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(a), \leqslant_o \rangle$ и $\langle \widehat{b}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(b), \leqslant_o \rangle$.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Докажем, что $\varphi : A_0 \to \alpha$ инъективно. Допустим, $a, b \in A_0$, $a \neq b$ и $\varphi(a) = \varphi(b)$. $\Longrightarrow$ Можно считать, $a < b$. Поскольку $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \widehat{b}, \leqslant \rangle$, существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \widehat{a} \subseteq \widehat{b}$. $\Longrightarrow$ Т.к. $a \in \widehat{b}$, то по Предложению 10 заключаем, что $a \leqslant f(a) \in \widehat{a}$. $\Longrightarrow$ $a \leqslant f(a) < a$, что невозможно.

Докажем, что биекция $\varphi : A_0 \to \alpha$ сохраняет порядок. Пусть $a, b \in A_0$, $a \leqslant b$. $\Longrightarrow$ $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(a), \leqslant_o \rangle$ и $\langle \widehat{b}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(b), \leqslant_o \rangle$. $\Longrightarrow$ Т.к. $\widehat{a} \subseteq \widehat{b}$, существует изоморфное вложение $\langle \varphi(a), \leqslant_o \rangle$ в $\langle \varphi(b), \leqslant_o \rangle$.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Докажем, что $\varphi : A_0 \to \alpha$ инъективно. Допустим, $a, b \in A_0$, $a \neq b$ и $\varphi(a) = \varphi(b)$. $\Longrightarrow$ Можно считать, $a < b$. Поскольку $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \widehat{b}, \leqslant \rangle$, существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \widehat{a} \subseteq \widehat{b}$. $\Longrightarrow$ Т.к. $a \in \widehat{b}$, то по Предложению 10 заключаем, что $a \leqslant f(a) \in \widehat{a}$. $\Longrightarrow a \leqslant f(a) < a$, что невозможно.

Докажем, что биекция $\varphi : A_0 \to \alpha$ сохраняет порядок. Пусть $a, b \in A_0$, $a \leqslant b$. $\Longrightarrow$ $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(a), \leqslant_o \rangle$ и $\langle \widehat{b}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(b), \leqslant_o \rangle$. $\Longrightarrow$ Т.к. $\widehat{a} \subseteq \widehat{b}$, существует изоморфное вложение $\langle \varphi(a), \leqslant_o \rangle$ в $\langle \varphi(b), \leqslant_o \rangle$. $\Longrightarrow$ В силу Следствия 11, пункт (1), $\varphi(a) \leqslant_o \varphi(b)$.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Докажем, что $\varphi : A_0 \to \alpha$ инъективно. Допустим, $a, b \in A_0$, $a \neq b$ и $\varphi(a) = \varphi(b)$. $\Longrightarrow$ Можно считать, $a < b$. Поскольку $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \widehat{b}, \leqslant \rangle$, существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \widehat{a} \subseteq \widehat{b}$. $\Longrightarrow$ Т.к. $a \in \widehat{b}$, то по Предложению 10 заключаем, что $a \leqslant f(a) \in \widehat{a}$. $\Longrightarrow$ $a \leqslant f(a) < a$, что невозможно.

Докажем, что биекция $\varphi : A_0 \to \alpha$ сохраняет порядок. Пусть $a, b \in A_0$, $a \leqslant b$. $\Longrightarrow$ $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(a), \leqslant_o \rangle$ и $\langle \widehat{b}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(b), \leqslant_o \rangle$. $\Longrightarrow$ Т.к. $\widehat{a} \subseteq \widehat{b}$, существует изоморфное вложение $\langle \varphi(a), \leqslant_o \rangle$ в $\langle \varphi(b), \leqslant_o \rangle$. $\Longrightarrow$ В силу Следствия 11, пункт (1), $\varphi(a) \leqslant_o \varphi(b)$.

Докажем, что α — ординал.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Докажем, что $\varphi : A_0 \to \alpha$ инъективно. Допустим, $a, b \in A_0$, $a \neq b$ и $\varphi(a) = \varphi(b)$. $\Longrightarrow$ Можно считать, $a < b$. Поскольку $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \widehat{b}, \leqslant \rangle$, существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \widehat{a} \subseteq \widehat{b}$. $\Longrightarrow$ Т.к. $a \in \widehat{b}$, то по Предложению 10 заключаем, что $a \leqslant f(a) \in \widehat{a}$. $\Longrightarrow$ $a \leqslant f(a) < a$, что невозможно.

Докажем, что биекция $\varphi : A_0 \to \alpha$ сохраняет порядок. Пусть $a, b \in A_0$, $a \leqslant b$. $\Longrightarrow$ $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(a), \leqslant_o \rangle$ и $\langle \widehat{b}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(b), \leqslant_o \rangle$. $\Longrightarrow$ Т.к. $\widehat{a} \subseteq \widehat{b}$, существует изоморфное вложение $\langle \varphi(a), \leqslant_o \rangle$ в $\langle \varphi(b), \leqslant_o \rangle$. $\Longrightarrow$ В силу Следствия 11, пункт (1), $\varphi(a) \leqslant_o \varphi(b)$.

Докажем, что α — ординал. Поскольку элементами α являются ординалы, достаточно показать, что α транзитивно.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Докажем, что $\varphi : A_0 \to \alpha$ инъективно. Допустим, $a, b \in A_0$, $a \neq b$ и $\varphi(a) = \varphi(b)$. $\Longrightarrow$ Можно считать, $a < b$. Поскольку $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \widehat{b}, \leqslant \rangle$, существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \widehat{a} \subseteq \widehat{b}$. $\Longrightarrow$ Т.к. $a \in \widehat{b}$, то по Предложению 10 заключаем, что $a \leqslant f(a) \in \widehat{a}$. $\Longrightarrow$ $a \leqslant f(a) < a$, что невозможно.

Докажем, что биекция $\varphi : A_0 \to \alpha$ сохраняет порядок. Пусть $a, b \in A_0$, $a \leqslant b$. $\Longrightarrow$ $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(a), \leqslant_o \rangle$ и $\langle \widehat{b}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(b), \leqslant_o \rangle$. $\Longrightarrow$ Т.к. $\widehat{a} \subseteq \widehat{b}$, существует изоморфное вложение $\langle \varphi(a), \leqslant_o \rangle$ в $\langle \varphi(b), \leqslant_o \rangle$. $\Longrightarrow$ В силу Следствия 11, пункт (1), $\varphi(a) \leqslant_o \varphi(b)$.

Докажем, что α — ординал. Поскольку элементами α являются ординалы, достаточно показать, что α транзитивно. Пусть $\gamma \in \beta \in \alpha$.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Докажем, что $\varphi : A_0 \to \alpha$ инъективно. Допустим, $a, b \in A_0$, $a \neq b$ и $\varphi(a) = \varphi(b)$. $\Longrightarrow$ Можно считать, $a < b$. Поскольку $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \widehat{b}, \leqslant \rangle$, существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \widehat{a} \subseteq \widehat{b}$. $\Longrightarrow$ Т.к. $a \in \widehat{b}$, то по Предложению 10 заключаем, что $a \leqslant f(a) \in \widehat{a}$. $\Longrightarrow$ $a \leqslant f(a) < a$, что невозможно.

Докажем, что биекция $\varphi : A_0 \to \alpha$ сохраняет порядок. Пусть $a, b \in A_0$, $a \leqslant b$. $\Longrightarrow$ $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(a), \leqslant_o \rangle$ и $\langle \widehat{b}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(b), \leqslant_o \rangle$. $\Longrightarrow$ Т.к. $\widehat{a} \subseteq \widehat{b}$, существует изоморфное вложение $\langle \varphi(a), \leqslant_o \rangle$ в $\langle \varphi(b), \leqslant_o \rangle$. $\Longrightarrow$ В силу Следствия 11, пункт (1), $\varphi(a) \leqslant_o \varphi(b)$.

Докажем, что α — ординал. Поскольку элементами α являются ординалы, достаточно показать, что α транзитивно. Пусть $\gamma \in \beta \in \alpha$. $\Longrightarrow$ Для некоторого $b \in A_0$ существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \beta$.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Докажем, что $\varphi : A_0 \to \alpha$ инъективно. Допустим, $a, b \in A_0$, $a \neq b$ и $\varphi(a) = \varphi(b)$. $\Longrightarrow$ Можно считать, $a < b$. Поскольку $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \widehat{b}, \leqslant \rangle$, существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \widehat{a} \subseteq \widehat{b}$. $\Longrightarrow$ Т.к. $a \in \widehat{b}$, то по Предложению 10 заключаем, что $a \leqslant f(a) \in \widehat{a}$. $\Longrightarrow$ $a \leqslant f(a) < a$, что невозможно.

Докажем, что биекция $\varphi : A_0 \to \alpha$ сохраняет порядок. Пусть $a, b \in A_0$, $a \leqslant b$. $\Longrightarrow$ $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(a), \leqslant_o \rangle$ и $\langle \widehat{b}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(b), \leqslant_o \rangle$. $\Longrightarrow$ Т.к. $\widehat{a} \subseteq \widehat{b}$, существует изоморфное вложение $\langle \varphi(a), \leqslant_o \rangle$ в $\langle \varphi(b), \leqslant_o \rangle$. $\Longrightarrow$ В силу Следствия 11, пункт (1), $\varphi(a) \leqslant_o \varphi(b)$.

Докажем, что α — ординал. Поскольку элементами α являются ординалы, достаточно показать, что α транзитивно. Пусть $\gamma \in \beta \in \alpha$. $\Longrightarrow$ Для некоторого $b \in A_0$ существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \beta$. Положим $c = f^{-1}(\gamma)$.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Докажем, что $\varphi : A_0 \to \alpha$ инъективно. Допустим, $a, b \in A_0$, $a \neq b$ и $\varphi(a) = \varphi(b)$. $\Longrightarrow$ Можно считать, $a < b$. Поскольку $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \widehat{b}, \leqslant \rangle$, существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \widehat{a} \subseteq \widehat{b}$. $\Longrightarrow$ Т.к. $a \in \widehat{b}$, то по Предложению 10 заключаем, что $a \leqslant f(a) \in \widehat{a}$. $\Longrightarrow$ $a \leqslant f(a) < a$, что невозможно.

Докажем, что биекция $\varphi : A_0 \to \alpha$ сохраняет порядок. Пусть $a, b \in A_0$, $a \leqslant b$. $\Longrightarrow$ $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(a), \leqslant_o \rangle$ и $\langle \widehat{b}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(b), \leqslant_o \rangle$. $\Longrightarrow$ Т.к. $\widehat{a} \subseteq \widehat{b}$, существует изоморфное вложение $\langle \varphi(a), \leqslant_o \rangle$ в $\langle \varphi(b), \leqslant_o \rangle$. $\Longrightarrow$ В силу Следствия 11, пункт (1), $\varphi(a) \leqslant_o \varphi(b)$.

Докажем, что α — ординал. Поскольку элементами α являются ординалы, достаточно показать, что α транзитивно. Пусть $\gamma \in \beta \in \alpha$. $\Longrightarrow$ Для некоторого $b \in A_0$ существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \beta$. Положим $c = f^{-1}(\gamma)$. $\Longrightarrow$ Сужение $f \restriction \widehat{c}$ является изоморфизмом из $\langle \widehat{c}, \leqslant \rangle$ на $\langle \gamma, \leqslant_o \rangle$, и значит, $\gamma \in \alpha$.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Докажем, что $\varphi : A_0 \to \alpha$ инъективно. Допустим, $a, b \in A_0$, $a \neq b$ и $\varphi(a) = \varphi(b)$. $\implies$ Можно считать, $a < b$. Поскольку $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \widehat{b}, \leqslant \rangle$, существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \widehat{a} \subseteq \widehat{b}$. $\implies$ Т.к. $a \in \widehat{b}$, то по Предложению 10 заключаем, что $a \leqslant f(a) \in \widehat{a}$. $\implies$ $a \leqslant f(a) < a$, что невозможно.

Докажем, что биекция $\varphi : A_0 \to \alpha$ сохраняет порядок. Пусть $a, b \in A_0$, $a \leqslant b$. $\implies$ $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(a), \leqslant_o \rangle$ и $\langle \widehat{b}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(b), \leqslant_o \rangle$. $\implies$ Т.к. $\widehat{a} \subseteq \widehat{b}$, существует изоморфное вложение $\langle \varphi(a), \leqslant_o \rangle$ в $\langle \varphi(b), \leqslant_o \rangle$. $\implies$ В силу Следствия 11, пункт (1), $\varphi(a) \leqslant_o \varphi(b)$.

Докажем, что α — ординал. Поскольку элементами α являются ординалы, достаточно показать, что α транзитивно. Пусть $\gamma \in \beta \in \alpha$. $\implies$ Для некоторого $b \in A_0$ существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \beta$. Положим $c = f^{-1}(\gamma)$. $\implies$ Сужение $f \restriction \widehat{c}$ является изоморфизмом из $\langle \widehat{c}, \leqslant \rangle$ на $\langle \gamma, \leqslant_o \rangle$, и значит, $\gamma \in \alpha$.

Итак, мы установили, что отображение $\varphi : A_0 \to \alpha$ изоморфно отображает в.у.м. $\langle A_0, \leqslant \rangle$ на ординал $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Докажем, что $\varphi : A_0 \to \alpha$ инъективно. Допустим, $a, b \in A_0$, $a \neq b$ и $\varphi(a) = \varphi(b)$. $\Longrightarrow$ Можно считать, $a < b$. Поскольку $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \widehat{b}, \leqslant \rangle$, существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \widehat{a} \subseteq \widehat{b}$. $\Longrightarrow$ Т.к. $a \in \widehat{b}$, то по Предложению 10 заключаем, что $a \leqslant f(a) \in \widehat{a}$. $\Longrightarrow$ $a \leqslant f(a) < a$, что невозможно.

Докажем, что биекция $\varphi : A_0 \to \alpha$ сохраняет порядок. Пусть $a, b \in A_0$, $a \leqslant b$. $\Longrightarrow$ $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(a), \leqslant_o \rangle$ и $\langle \widehat{b}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(b), \leqslant_o \rangle$. $\Longrightarrow$ Т.к. $\widehat{a} \subseteq \widehat{b}$, существует изоморфное вложение $\langle \varphi(a), \leqslant_o \rangle$ в $\langle \varphi(b), \leqslant_o \rangle$. $\Longrightarrow$ В силу Следствия 11, пункт (1), $\varphi(a) \leqslant_o \varphi(b)$.

Докажем, что α — ординал. Поскольку элементами α являются ординалы, достаточно показать, что α транзитивно. Пусть $\gamma \in \beta \in \alpha$. $\Longrightarrow$ Для некоторого $b \in A_0$ существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \beta$. Положим $c = f^{-1}(\gamma)$. $\Longrightarrow$ Сужение $f \restriction \widehat{c}$ является изоморфизмом из $\langle \widehat{c}, \leqslant \rangle$ на $\langle \gamma, \leqslant_o \rangle$, и значит, $\gamma \in \alpha$.

Итак, мы установили, что отображение $\varphi : A_0 \to \alpha$ изоморфно отображает в.у.м. $\langle A_0, \leqslant \rangle$ на ординал $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$. Поэтому если $A_0 = A$, то теорема доказана.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Докажем, что $\varphi : A_0 \to \alpha$ инъективно. Допустим, $a, b \in A_0$, $a \neq b$ и $\varphi(a) = \varphi(b)$. $\Longrightarrow$ Можно считать, $a < b$. Поскольку $\langle \widehat{a}, \leqslant\rangle \cong \langle \widehat{b}, \leqslant\rangle$, существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \widehat{a} \subseteq \widehat{b}$. $\Longrightarrow$ Т.к. $a \in \widehat{b}$, то по Предложению 10 заключаем, что $a \leqslant f(a) \in \widehat{a}$. $\Longrightarrow$ $a \leqslant f(a) < a$, что невозможно.

Докажем, что биекция $\varphi : A_0 \to \alpha$ сохраняет порядок. Пусть $a, b \in A_0$, $a \leqslant b$. $\Longrightarrow$ $\langle \widehat{a}, \leqslant\rangle \cong \langle \varphi(a), \leqslant_o\rangle$ и $\langle \widehat{b}, \leqslant\rangle \cong \langle \varphi(b), \leqslant_o\rangle$. $\Longrightarrow$ Т.к. $\widehat{a} \subseteq \widehat{b}$, существует изоморфное вложение $\langle \varphi(a), \leqslant_o\rangle$ в $\langle \varphi(b), \leqslant_o\rangle$. $\Longrightarrow$ В силу Следствия 11, пункт (1), $\varphi(a) \leqslant_o \varphi(b)$.

Докажем, что α — ординал. Поскольку элементами α являются ординалы, достаточно показать, что α транзитивно. Пусть $\gamma \in \beta \in \alpha$. $\Longrightarrow$ Для некоторого $b \in A_0$ существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \beta$. Положим $c = f^{-1}(\gamma)$. $\Longrightarrow$ Сужение $f \restriction \widehat{c}$ является изоморфизмом из $\langle \widehat{c}, \leqslant\rangle$ на $\langle \gamma, \leqslant_o\rangle$, и значит, $\gamma \in \alpha$.

Итак, мы установили, что отображение $\varphi : A_0 \to \alpha$ изоморфно отображает в.у.м. $\langle A_0, \leqslant\rangle$ на ординал $\langle \alpha, \leqslant_o\rangle$. Поэтому если $A_0 = A$, то теорема доказана. Допустим, $A_0 \neq A$.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Докажем, что $\varphi : A_0 \to \alpha$ инъективно. Допустим, $a, b \in A_0$, $a \neq b$ и $\varphi(a) = \varphi(b)$. $\Longrightarrow$ Можно считать, $a < b$. Поскольку $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \widehat{b}, \leqslant \rangle$, существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \widehat{a} \subseteq \widehat{b}$. $\Longrightarrow$ Т.к. $a \in \widehat{b}$, то по Предложению 10 заключаем, что $a \leqslant f(a) \in \widehat{a}$. $\Longrightarrow$ $a \leqslant f(a) < a$, что невозможно.

Докажем, что биекция $\varphi : A_0 \to \alpha$ сохраняет порядок. Пусть $a, b \in A_0$, $a \leqslant b$. $\Longrightarrow$ $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(a), \leqslant_o \rangle$ и $\langle \widehat{b}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(b), \leqslant_o \rangle$. $\Longrightarrow$ Т.к. $\widehat{a} \subseteq \widehat{b}$, существует изоморфное вложение $\langle \varphi(a), \leqslant_o \rangle$ в $\langle \varphi(b), \leqslant_o \rangle$. $\Longrightarrow$ В силу Следствия 11, пункт (1), $\varphi(a) \leqslant_o \varphi(b)$.

Докажем, что α — ординал. Поскольку элементами α являются ординалы, достаточно показать, что α транзитивно. Пусть $\gamma \in \beta \in \alpha$. $\Longrightarrow$ Для некоторого $b \in A_0$ существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \beta$. Положим $c = f^{-1}(\gamma)$. $\Longrightarrow$ Сужение $f \restriction \widehat{c}$ является изоморфизмом из $\langle \widehat{c}, \leqslant \rangle$ на $\langle \gamma, \leqslant_o \rangle$, и значит, $\gamma \in \alpha$.

Итак, мы установили, что отображение $\varphi : A_0 \to \alpha$ изоморфно отображает в.у.м. $\langle A_0, \leqslant \rangle$ на ординал $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$. Поэтому если $A_0 = A$, то теорема доказана. Допустим, $A_0 \neq A$. $\Longrightarrow$ Существует a — наименьший элемент в $A \setminus A_0$.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Докажем, что $\varphi : A_0 \to \alpha$ инъективно. Допустим, $a, b \in A_0$, $a \neq b$ и $\varphi(a) = \varphi(b)$. $\implies$ Можно считать, $a < b$. Поскольку $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \widehat{b}, \leqslant \rangle$, существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \widehat{a} \subseteq \widehat{b}$. $\implies$ Т.к. $a \in \widehat{b}$, то по Предложению 10 заключаем, что $a \leqslant f(a) \in \widehat{a}$. $\implies$ $a \leqslant f(a) < a$, что невозможно.

Докажем, что биекция $\varphi : A_0 \to \alpha$ сохраняет порядок. Пусть $a, b \in A_0$, $a \leqslant b$. $\implies$ $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(a), \leqslant_o \rangle$ и $\langle \widehat{b}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(b), \leqslant_o \rangle$. $\implies$ Т.к. $\widehat{a} \subseteq \widehat{b}$, существует изоморфное вложение $\langle \varphi(a), \leqslant_o \rangle$ в $\langle \varphi(b), \leqslant_o \rangle$. $\implies$ В силу Следствия 11, пункт (1), $\varphi(a) \leqslant_o \varphi(b)$.

Докажем, что α — ординал. Поскольку элементами α являются ординалы, достаточно показать, что α транзитивно. Пусть $\gamma \in \beta \in \alpha$. $\implies$ Для некоторого $b \in A_0$ существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \beta$. Положим $c = f^{-1}(\gamma)$. $\implies$ Сужение $f \restriction \widehat{c}$ является изоморфизмом из $\langle \widehat{c}, \leqslant \rangle$ на $\langle \gamma, \leqslant_o \rangle$, и значит, $\gamma \in \alpha$.

Итак, мы установили, что отображение $\varphi : A_0 \to \alpha$ изоморфно отображает в.у.м. $\langle A_0, \leqslant \rangle$ на ординал $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$. Поэтому если $A_0 = A$, то теорема доказана. Допустим, $A_0 \neq A$. $\implies$ Существует a — наименьший элемент в $A \setminus A_0$. $\implies$ Очевидно $\widehat{a} = A_0$.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве

Докажем, что $\varphi : A_0 \to \alpha$ инъективно. Допустим, $a, b \in A_0$, $a \neq b$ и $\varphi(a) = \varphi(b)$. $\Longrightarrow$ Можно считать, $a < b$. Поскольку $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \widehat{b}, \leqslant \rangle$, существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \widehat{a} \subseteq \widehat{b}$. $\Longrightarrow$ Т.к. $a \in \widehat{b}$, то по Предложению 10 заключаем, что $a \leqslant f(a) \in \widehat{a}$. $\Longrightarrow$ $a \leqslant f(a) < a$, что невозможно.

Докажем, что биекция $\varphi : A_0 \to \alpha$ сохраняет порядок. Пусть $a, b \in A_0$, $a \leqslant b$. $\Longrightarrow$ $\langle \widehat{a}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(a), \leqslant_o \rangle$ и $\langle \widehat{b}, \leqslant \rangle \cong \langle \varphi(b), \leqslant_o \rangle$. $\Longrightarrow$ Т.к. $\widehat{a} \subseteq \widehat{b}$, существует изоморфное вложение $\langle \varphi(a), \leqslant_o \rangle$ в $\langle \varphi(b), \leqslant_o \rangle$. $\Longrightarrow$ В силу Следствия 11, пункт (1), $\varphi(a) \leqslant_o \varphi(b)$.

Докажем, что α — ординал. Поскольку элементами α являются ординалы, достаточно показать, что α транзитивно. Пусть $\gamma \in \beta \in \alpha$. $\Longrightarrow$ Для некоторого $b \in A_0$ существует изоморфизм $f : \widehat{b} \to \beta$. Положим $c = f^{-1}(\gamma)$. $\Longrightarrow$ Сужение $f \restriction \widehat{c}$ является изоморфизмом из $\langle \widehat{c}, \leqslant \rangle$ на $\langle \gamma, \leqslant_o \rangle$, и значит, $\gamma \in \alpha$.

Итак, мы установили, что отображение $\varphi : A_0 \to \alpha$ изоморфно отображает в.у.м. $\langle A_0, \leqslant \rangle$ на ординал $\langle \alpha, \leqslant_o \rangle$. Поэтому если $A_0 = A$, то теорема доказана. Допустим, $A_0 \neq A$. $\Longrightarrow$ Существует a — наименьший элемент в $A \setminus A_0$. $\Longrightarrow$ Очевидно $\widehat{a} = A_0$. $\Longrightarrow$ Построенный выше изоморфизм φ доказывает, что $a \in A_0$, что невозможно. $\square$

Теорема о сравнимости вполне упорядоченных множеств

Теорема 13 (о сравнимости в.у.м.).
Для любых вполне упорядоченных множеств $\langle A, \leqslant_A \rangle$ *и* $\langle B, \leqslant_B \rangle$ *справедливо одно и только одно из следующих трёх утверждений:*

(1) $\langle A, \leqslant_A \rangle \cong \langle B, \leqslant_B \rangle$;
(2) $\langle A, \leqslant_A \rangle \cong \langle \widehat{b}, \leqslant_B \rangle$ *для некоторого* $b \in B$;
(3) $\langle B, \leqslant_B \rangle \cong \langle \widehat{a}, \leqslant_A \rangle$ *для некоторого* $a \in A$.

Теорема о сравнимости вполне упорядоченных множеств

Теорема 13 (о сравнимости в.у.м.).
Для любых вполне упорядоченных множеств $\langle A, \leqslant_A \rangle$ *и* $\langle B, \leqslant_B \rangle$ *справедливо одно и только одно из следующих трёх утверждений:*

(1) $\langle A, \leqslant_A \rangle \cong \langle B, \leqslant_B \rangle$;
(2) $\langle A, \leqslant_A \rangle \cong \langle \widehat{b}, \leqslant_B \rangle$ *для некоторого* $b \in B$;
(3) $\langle B, \leqslant_B \rangle \cong \langle \widehat{a}, \leqslant_A \rangle$ *для некоторого* $a \in A$.

Доказательство: Заметим, что если α, β — ординалы и $\alpha \in \beta$, то

$$\alpha = \widehat{\alpha} = \{\gamma \in \beta \mid \gamma \in \alpha\},$$

т.е. α является открытым начальным сегментом в β относительно порядка по принадлежности.

Теорема о сравнимости вполне упорядоченных множеств

Теорема 13 (о сравнимости в.у.м.).
Для любых вполне упорядоченных множеств $\langle A, \leqslant_A \rangle$ *и* $\langle B, \leqslant_B \rangle$ *справедливо одно и только одно из следующих трёх утверждений:*

(1) $\langle A, \leqslant_A \rangle \cong \langle B, \leqslant_B \rangle$;
(2) $\langle A, \leqslant_A \rangle \cong \langle \widehat{b}, \leqslant_B \rangle$ *для некоторого* $b \in B$;
(3) $\langle B, \leqslant_B \rangle \cong \langle \widehat{a}, \leqslant_A \rangle$ *для некоторого* $a \in A$.

Доказательство: Заметим, что если α, β — ординалы и $\alpha \in \beta$, то

$$\alpha = \widehat{\alpha} = \{\gamma \in \beta \mid \gamma \in \alpha\},$$

т.е. α является открытым начальным сегментом в β относительно порядка по принадлежности. Поэтому утверждение теоремы следует из теоремы о сравнимости ординалов и теоремы о каноническом в.у.м. $\square$