В. Г. Бардаков

ШИРИНА ВЕРБАЛЬНЫХ ПОДГРУПП НЕКОТОРЫХ ГРУПП АРТИНА[1]

Напомним [1, с. 118], что *шириной* $wid(G, V)$ вербальной подгруппы $V(G)$, определенной в группе G множеством слов V относительно этого V, называется наименьшее $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ такое, что всякий элемент подгруппы $V(G)$ записывается в виде произведения $\leq m$ значений слов из V. Легко показать,что ширина $wid(G, V)$, вообще говоря, зависит от множества слов V, а не только от подгруппы $V(G)$ [2, с. 7].

Ряд авторов исследовал ширину вербальных подгрупп в группах кос (см. [2] и указанную там литературу). Так как группы кос являются частным случаем групп Артина, введённых Брискорном и Сайто (определения см. в §1), то можно исследовать ширину вербальных подгрупп других групп Артина.

В предлагаемой работе доказывается, что любая собственная вербальная подгруппа групп Артина $A_l (l \geq 2)$, $B_l (l \geq 2)$, $D_l (l \geq 4)$, F_4, G_2, $I_2(p) (p \geq 5)$, $\tilde{A}_l (l \geq 1)$, $\tilde{B}_l (l \geq 2)$, $\tilde{C}_l (l \geq 3)$, $\tilde{D}_l (l \geq 4)$, $\tilde{F}_4, \tilde{G}_2$ имеет бесконечную ширину относительно любого конечного множества слов V. Кроме основного случая $A_l (l \geq 2)$, охватываемого уже умопянутой работой [2], ранее это было известно только для коммутанта группы $I_2(p)$ при нечётном p относительно коммутатора [3]. Аналогичные результаты получены также для граф-групп.

Заметим, что доказательство по существу заключается в сведении всех перечисленных выше случаев к основному случаю групп $A_l (l \geq 2)$, рассмотренному в [2].

§ 1. **Определения и обозначения**

Группой Артина типа I (см. [4]) называется группа A_I с порождающими $a_i, i \in I$ и определяющими соотношениями

$$a_i a_j a_i ... = a_j a_i a_j ... \text{ при } i, j \in I,$$

где слова, стоящие в левой и правой частях состоят каждое из $m_{i,j}$ чередующихся букв a_i и a_j. Условимся записывать такие соотношения в виде

$$< a_i a_j >^{m_{i,j}} = < a_j a_i >^{m_{i,j}} .$$

Если a_i и a_j на самом деле не связаны таким соотношением ни для какого $m_{i,j}$, то полагаем $m_{i,j} = \infty$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 93-01-01513).

Добавив к определяющим соотношениям группы A_I соотношения $a_i^2 = 1$ для всех $i \in I$, получим генетический код группы Кокстера $\overline{A}_I$, соответствующей группе Артина A_I. Ясно, что $\overline{A}_I$ — фактор-группа группы A_I. Таким образом, каждой группе Артина соответствует некоторая группа Кокстера. В свою очередь, каждой группе Кокстера $\overline{A}_I$ можно сопоставить матрицу Кокстера M_I и граф Кокстера Γ_I (см., например, [5, с. 24]). Симметрическую квадратную матрицу $M_I = (m_{i,j})_{i,j \in I}$ элементы которой — целые положительные числа или же символ ∞, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{array}{rcl} m_{i,i} & = & 1 \text{ для всех } i \in I, \\ m_{i,j} & \geq & 2 \text{ для } i, j \in I, i \neq j, \end{array}$$

будем называть *матрицей Кокстера. Графом Кокстера* Γ_I, соответствующим группе Кокстера $\overline{A}_I$, называется неориентированный граф, состоящий из множества вершин I и множества рёбер, строящихся следующим образом: две вершины $i, j \in I$ соединены ребром $e_{i,j}$ веса $m_{i,j}$, если в группе Кокстера $\overline{A}_I$ порождающие a_i и a_j связаны соотношением

$$< a_i a_j >^{m_{i,j}} = < a_j a_i >^{m_{i,j}} \qquad \text{при } m_{i,j} \geq 3.$$

Понятно, что каждому графу Кокстера можно однозначно сопоставить группу Артина.

Будем говорить, что группа Артина A_I и соответствующая ей группа Кокстера $\overline{A}_I$ *неприводимы*, если граф Кокстера Γ_I непуст и связен.

Пусть Γ_i, $i \in J$, — конечное семейство связных компонент графа Кокстера Γ. Тогда соответствующая ему группа Артина A_I распадается в прямое произведение $A_I = \prod_{i \in J} A_i$, где A_i — неприводимая группа Артина, соответствующая связной компоненте Γ_i.

Кокстер установил [5, с. 241], что неприводимая группа Кокстера конечна тогда и только тогда, когда её граф Кокстера изоморфен одному из следующих графов (см. рис. 1):

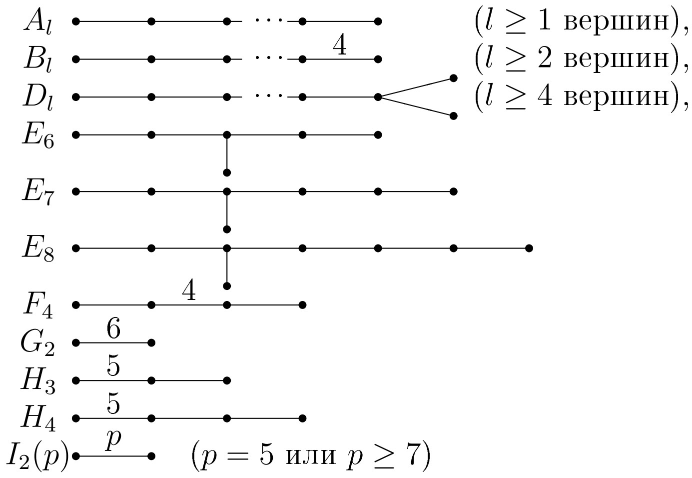

Рис. 1.

Здесь над ребром указывается его вес, если он ≥ 4; вес ребра не указывается, если он равен 3. Группы Артина, отвечающие этим графам, будем обозначать теми же символами A_l, B_l ,... и называть *группами Артина конечного типа.* Для групп Артина конечного типа разрешима проблема равенства и сопряжённости [4]. Проблема вхождения в этих группах изучалась В. Н. Безверхним [6].

Среди других групп Артина выделяют неприводимые группы, имеющие следующие графы Кокстера (см. рис. 2):

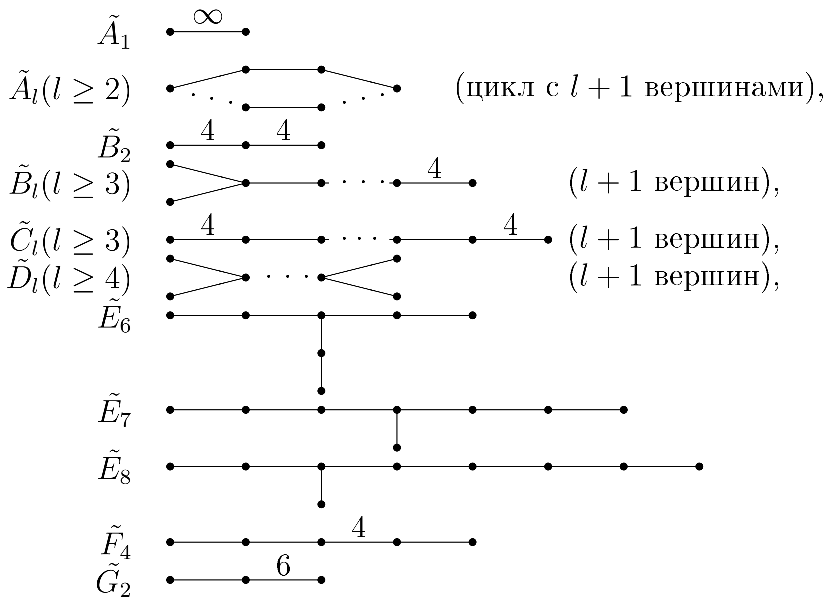

Рис. 2.

Они замечательны тем, что квадратичная форма, ассоциированная с группами Кокстера, определяемыми этими графами (и только этими), положительна и вырождена. Группы Артина, соответствующие этим графам, будем обозначать теми же символами $\tilde{A}_1, \tilde{A}_l, \dots$.

Ясно, что группа $\tilde{A}_1$ — свободная группа степени свободы 2. Группы $\tilde{A}_l (l \geq 2)$ называются *круговыми группами кос.* Центр круговых групп кос указан в [7]. В [8] изучались 3-порождённые группы $\tilde{A}_2$, $\tilde{B}_2$ и $\tilde{C}_2$, для которых установлено, что любая из них — либо свободное произведение с объединением, либо HNN-расширение.

Пусть $\Gamma = \Gamma(U, E)$ — неориентированный граф с множеством вершин U и множеством рёбер $E \subseteq U \times U$. *Граф-группой* $G(\Gamma)$ называется группа с множеством порождающих $x_i, i \in U$, и определяющих соотношений

$$x_i x_j = x_j x_i \quad \text{при } (i, j) \in E.$$

Граф-группы изучались в работах [9, 10].

Будем называть группу G *богатой вербальными подгруппами,* если всякое множество слов V, определяющее собственную вербальную подгруппу свободной группы F_∞ счётной степени свободы, определяет собственную вербальную подгруппу группы G (под собственной мы понимаем подгруппу, отличную от единицы и самой группы).

Сакердот [13], используя технику Ю. И. Мерзлякова [12], установил, что любые свободные произведения $B * C$, $|B| \geq 2$, $|C| \geq 3$, имеют совпадающие позитивные теории. Следовательно, всякая группа вида $B * C$, $|B| \geq 2$, $|C| \geq 3$, богата вербальными подгруппами. А как установил Ремтулла [11], ширина всякой собственной вербальной подгруппы такой группы, относительно конечного множества V бесконечна.

Будем говорить, что *группа G не имеет собственных вербальных подгрупп конечной ширины,* если для всякого конечного множества V, определяющего собственную вербальную подгруппу $V(G)$, ширина $wid(G, V)$ бесконечна.

В следующем параграфе мы установим, что всякая неабелева конечно порождённая группа Артина богата вербальными подгруппами, а также докажем, что некоторые из них не имеют собственных вербальных подгрупп конечной ширины. Поэтому кажется правдоподобной

Гипотеза. Любая неабелева группа Артина не содержит собственных вербальных подгрупп конечной ширины.

В связи с введёнными определениями представляют интерес следующие нерешённые вопросы.

Вопрос 1. Существует ли конечно порождённая группа G и конечное множество слов V такое, что $V(G)$ собственная вербальная подгруппа, ширина $wid(G, V)$ конечна и в то же время G богата вербальными подгруппами?

Если не требовать конечную порождённость, то в качестве G можно взять прямое произведение $GL_2(\mathbb{Q}) \times \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел, а $\mathbb{Z}$ — бесконечная циклическая группа. В качестве V возьмём коммутатор $[x, y]$. Хорошо известно, что ширина коммутанта этой группы относительно множества V равна 1 и, вместе с тем, очевидно, что $GL_2(\mathbb{Q}) \times \mathbb{Z}$ богата вербальными подгруппами.

Группам Артина $A_n (n \geq 3)$ и $\tilde{A}_1$ соответствуют группы Кокстера, изоморфные симметрической группе и бесконечной группе диэдра $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ соответственно. Ширина коммутанта этих групп относительно коммутатора равна 1 (для группы S_{n+1} при $n \geq 4$ это доказал Ито [14], а для бесконечной диэдральной группы легко проверить непосредственно).

Вопрос 2. Какие группы Кокстера имеют ширину коммутанта (относительно коммутатора) равную 1?

Для бесконечной группы диэдра справедливо утверждение: всякая её вербальная подгруппа имеет конечную ширину [11].

Вопрос 3. Всякая ли вербальная подгруппа произвольной, конечно порождённой группы Кокстера имеет конечную ширину?

Известно, что если группа Артина конечного типа имеет ≥ 4 порождающих, то в ней неразрешима проблема вхождения. С другой стороны, в 2-порождённых группах $B_2, G_2, I_2(p)$ ($p = 5$ или $p \geq 7$) проблема вхождения разрешима [6]. В следующем параграфе мы покажем, что во всех конечно порождённых группах Артина разрешима проблема вхождения в коммутант, а также в некоторые другие вербальные подгруппы.

Вопрос 4. Разрешима ли проблема вхождения в вербальные подгруппы конечно порождённых групп Артина?

§ 2. **Вербальные подгруппы конечно порождённых групп Артина**

Изучение групп Артина сводится к изучению неприводимых групп Артина ввиду следующего очевидного утверждения

Лемма 1. *Пусть $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_k$ — прямое произведение конечного числа подгрупп G_i. Тогда ширина $wid(G, V)$ равна максимальной ширине сомножителей $wid(G_i, V)$ по всем $i = 1, 2, \ldots, k$.*

Очевидно, если конечно порождённая группа Артина A абелева, то она является свободной абелевой группой, и если A неприводима, то она изоморфна бесконечной циклической группе. Для абелевой группы A, а также для несобственных вербальных подгрупп произвольной группы A легко устанавливается

Лемма 2. *Пусть A — конечно порождённая группа Артина, V — множество слов. Если A абелева или $V(A)$ — несобственная подгруппа группы A, то $wid(A, V) < \infty$, а если V конечно, то $wid(A, V) < |V|$.*

В дальнейшем мы будем рассматривать неприводимые неабелевы группы Артина.

В работе В. Г. Дурнева [15] доказано, что если G имеет своим эпиморфным образом группу $B * C$, где $|B| \geq 2$, $|C| \geq 3$, то G не имеет собственных вербальных подгрупп конечной ширины. Так же просто доказывается и более общая

Лемма 3. *Если существует эпиморфизм группы G на группу, не имеющую собственных вербальных подгрупп конечной ширины и богатую вербальными подгруппами, то и сама G не имеет собственных вербальных подгрупп конечной ширины.*

Докажем, что всякая неабелева конечно порождённая группа A богата вербальными подгруппами. Для этого рассмотрим произвольное множество слов V в алфавите $x_1, x_2, \ldots$ Можно показать [16, с. 140], что V эквивалентно множеству слов вида $W = \{x_1^d, u_j \mid j \in J\}$, где $d \geq 0$, u_j — слова из коммутанта группы $F(x_1, x_2, \ldots)$ (эквивалентность означает, что для любой группы G вербальные подгруппы $V(G)$ и $W(G)$ совпадают). В частности, если $d = 0$, то $W(A) \subseteq A'$, где A' — коммутант группы A. Рассмотрим множество слов $W_1 = \{x_1^d, [x_1, x_2]\}$ и покажем, что при $d \neq 1$ $W_1(A)$ — собственная вербальная подгруппа группы A, а так как $W(A) \subseteq W_1(A)$, то отсюда последует, что $V(A) \neq A$.

Будем рассматривать элементы группы A как слова в алфавите a_i, $i \in I$. Пусть u — слово в этом алфавите. *Логарифмом u по основанию a_i* называется целое число $\log_i u$, равное сумме показателей при букве a_i в слове u (см. [16, с. 137]). *Логарифмом u по совокупности оснований $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_s}$* назовём целое число $\log_{i_1, i_2, \ldots i_s} u$ равное сумме $\sum_{j=i_1}^{i_s} \log_j u$. Ясно, что в свободной группе для эквивалентных слов значения логарифмов одинаковы. В произвольной группе Артина это уже неверно.

Каждое определяющее соотношение $< a_i a_j >^{m_{i,j}} = < a_j a_i >^{m_{i,j}}$ группы A можно переписать в виде

$$r_{i,j} = [a_i, a_j (a_i a_j)^{n_{i,j}-1}] = e \quad \text{при} \quad m_{i,j} = 2n_{i,j}$$

и

$$r_{i,j} = a_j^{-1} a_i [a_i, (a_j a_i)^{n_{i,j}}] = e \quad \text{при} \quad m_{i,j} = 2n_{i,j} + 1.$$

Пусть Γ_A — связный граф Кокстера, отвечающий группе A. Удалим из этого графа рёбра, имеющие чётный или бесконечный вес. Получившийся граф распадается на компоненты связности $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$. Пусть I_l — множество вершин графа, принадлежащих компоненте Γ_l. Легко заметить, что для всех порождающих, соответствующих компоненте Γ_l, справедливы соотношения $a_i \equiv a_j \pmod{A'}$ при любых $i, j \in I_l$. Фактор-группа A/A' — свободная абелева группа ранга k. Более того, легко проверить, что если слова u и v определяют один и тот же элемент группы A, то их логарифмы по совокупности переменных a_i, $i \in I_l$, совпадают для всех $l = 1, 2, \dots, k$. Из этих замечаний так же, как и для свободных групп (см. [17, с. 86, упр. 2-5]) легко выводится

Лемма 4. *Пусть $W_1 = \{x_1^d, [x_1, x_2]\}$; u — элемент конечно порождённой группы Артина A. При $d > 0$ элемент u принадлежит $W_1(A)$ тогда и только тогда, когда $\log_{I_l} u$ делится на d для всех $l = 1, 2, \dots, k$. Элемент u принадлежит коммутанту A тогда и только тогда, когда $\log_{I_l} u = 0$ для всех $l = 1, 2, \dots, k$.*

Из этой леммы немедленно следует, что если множество слов V определяет собственную вербальную подгруппу свободной группы F_∞, то подгруппа $V(A)$ отлична от A.

С другой стороны, так как группа A неабелева, то она содержит пару некоммутирующих порождающих a_i, a_j. Как заметил В. Н. Безверхний [6, с. 31], элементы a_i^2 и a_j^2 свободно порождают подгруппу в группе

$$A_{i,j} = \text{гр}(a_i,\ a_j \mid < a_i a_j >^{m_{i,j}} = < a_j a_i >^{m_{i,j}}), \quad m_{i,j} \geq 3,$$

а так как группа $A_{i,j}$ вкладывается в группу A (см. [18, с. 212]), то A содержит свободную нециклическую группу. Следовательно, подгруппа $V(A)$ отлична от единичной. Таким образом, нами доказана

Лемма 5. *Всякая конечно порождённая неабелева группа Артина богата вербальными подгруппами.*

Теперь может быть доказана основная

Теорема 1. *Группы Артина $A_l (l \geq 2)$, $B_l (l \geq 2)$, $D_l (l \geq 4)$, F_4, G_2, $I_2(p) (p \geq 5)$, $\tilde{A}_l (l \geq 1)$, $\tilde{B}_l (l \geq 2)$, $\tilde{C}_l (l \geq 3)$, $\tilde{D}_l (l \geq 4)$, $\tilde{F}_4$, $\tilde{G}_2$ не имеют собственных вербальных подгрупп конечной ширины.*

Доказательство. Для группы кос $A_l (l \geq 2)$ это доказано в [2].

Пусть в группе B_l при $l \geq 3$ порождающие a_{l-1} и a_l связаны соотношением $< a_{l-1} a_l >^4 = < a_l a_{l-1} >^4$. Рассмотрим эндоморфизм этой группы, переводящий a_l в единицу, а остальные порождающие оставляющий на месте. Полученная группа изоморфна группе кос A_{l-1}, которая при $l \geq 3$ богата вербальными подгруппами (лемма 5) и не содержит собственных вербальных подгрупп конечной ширины. Следовательно, ввиду леммы 3, B_l при $l \geq 3$ также не содержит собственных вербальных подгрупп конечной ширины.

Группа $\tilde{C}_l$ содержит в качестве подгруппы группу, изоморфную B_l и являющуюся образом группы $\tilde{C}_l$ при эндоморфизме:

$$\begin{array}{lcl} a_1 & \mapsto & e, \\ a_i & \mapsto & a_i \text{ при } i = 2, 3, \dots, l+1, \end{array}$$

(считаем, что в $\tilde{C}_l$ справедливо соотношение $< a_1a_2 >^4 = < a_2a_1 >^4$). Следовательно, ввиду лемм 5 и 3, утверждение теоремы справедливо для группы $\tilde{C}_l(l \geq 3)$.

В работе [7] установлено, что отображение

$$\begin{array}{rcl} a_1 & \mapsto & (a_2a_3...a_l)a_{l+1}(a_2a_3\dots a_l)^{-1}, \\ a_i & \mapsto & a_i \text{ при } i = 2, 3, \dots, l+1 \end{array}$$

задаёт эндоморфизм круговой группы кос $\tilde{A}_l(l \geq 2)$ на подгруппу изоморфную группе кос A_l. Следовательно, при $l \geq 2$ круговая группа кос $\tilde{A}_l$ не содержит собственных вербальных подгрупп конечной ширины. Группа $\tilde{A}_1$ — свободная двупорождённая группа. Для неё утверждение теоремы установлено в работе Ремтуллы [11].

Пусть в группе $D_l(l \geq 4)$ порождающий a_{l-1} связан с порождающим a_{l-2} соотношением $a_{l-1}a_{l-2}a_{l-1} = a_{l-2}a_{l-1}a_{l-2}$ и перестановочен с остальными порождающими, а a_l перестановочен со всеми порождающими, кроме a_{l-2}, с которым он связан соотношением $a_la_{l-2}a_l = a_{l-2}a_la_{l-2}$. Ясно, что подгруппа гр$(a_1, a_2, ..., a_{l-1})$ изоморфна группе кос A_{l-1} и является эндоморфным образом группы D_l при отображении

$$\begin{array}{rcl} a_i & \mapsto & a_i \text{ при } i = 1, 2, \dots, l-1, \\ a_l & \mapsto & e. \end{array}$$

Следовательно, $D_l(l \geq 4)$ не содержит собственных вербальных подгрупп конечной ширины.

Далее, отображение

$$\begin{array}{rcl} a_1 & \mapsto & e, \\ a_i & \mapsto & a_i \text{ при } i = 2, 3, \dots, l+1 \end{array}$$

задаёт эндоморфизм группы $\tilde{D}_l(l \geq 4)$ на подгруппу, изоморфную группе D_l, если a_1 связан с a_2 соотношением $a_1a_2a_1 = a_2a_1a_2$ и перестановочен с остальными порождающими. Поэтому $\tilde{D}_l(l \geq 4)$ также не содержит собственных вербальных подгрупп конечной ширины.

Рассмотрим теперь группу $G_m = \text{гр}(a_1, a_2 \,|< a_1a_2 >^m = < a_2a_1 >^m)$, которая при $m = 4, 5, 6, \dots$ совпадает с одной из групп $B_2, G_2, I_2(p)$ ($p = 5$ или $p \geq 7$). Как заметил В. Н. Безверхний [6, с. 42], при $m = 2n$ группа G_m имеет представление

$$G_m = \text{гр}(a_1, x \mid x^n = a_1x^na_1^{-1}),$$

а при $m = 2n+1$ — представление

$$G_m = \text{гр}(x, y \mid x^{2n+1} = y^2), \quad \text{где } x = a_1a_2, y = a_1^{-1}(a_1^{-1}a_2)^{n+1}.$$

В обоих случаях G_m — группа с одним определяющим соотношением. По теореме Магнуса о свободе (см., например, [17, с. 262]), порождающие a_1, x, y имеют бесконечные порядки. Поэтому при гомоморфизме

$$\begin{array}{rcl} a_1 & \mapsto & a_1, \\ x^n & \mapsto & e \end{array}$$

группа G_{2n} отображается на свободное произведение $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$, а $\mathbb{Z}_{2n+1} * \mathbb{Z}_2$ является эпиморфным образом группы G_{2n+1} при отображении

$$\begin{array}{lcl} x^{2n+1} & \mapsto & e, \\ y^2 & \mapsto & e. \end{array}$$

Ввиду упоминавшейся леммы В. Г. Дурнева [15], группа G_m при $m \geq 4$, а, следовательно, и группы $B_2, G_2, I_2(p)$ не содержат собственных вербальных подгрупп конечной ширины.

Далее, группа $F_4 = \text{гр}(a_1, a_2, a_3, a_4 \mid a_1a_2a_1 = a_2a_1a_2,\ a_1a_3 = a_3a_1,\ a_1a_4 = a_4a_1,\ a_2a_3a_2a_3 = a_3a_2a_3a_2,\ a_2a_4 = a_4a_2,\ a_3a_4a_3 = a_4a_3a_4)$ содержит подгруппу $\text{гр}(a_1, a_2)$, которая изоморфна группе кос A_2 и является образом группы F_4 при отображении, переводящем a_3 и a_4 в единицу и оставляющем a_1 и a_2 на месте. Опять, ввиду лемм 3 и 5, F_4 не содержит собственных вербальных подгрупп конечной ширины.

Аналогично, в группе $\tilde{F}_4$ отправим порождающие, соответствующие двум правым крайним вершинам в графе $\tilde{F}_4$, в единицу, а остальные порождающие оставим на месте. Получим эндоморфизм группы $\tilde{F}_4$ на группу, изоморфную A_3. Следовательно, $\tilde{F}_4$ также не содержит собственных вербальных подгрупп конечной ширины.

В группах $\tilde{B}_2$ и $\tilde{G}_2$ отправим порождающий, соответствующий крайней левой вершине в графах этих групп, в единицу, а остальные оставим неподвижными. Легко заметить, что это отображение продолжается до эндоморфизма этих групп на подгруппы, изоморфные группам B_2 и A_2 соответственно. Снова, ввиду лемм 3, 5 и уже установленных утверждений, получаем требуемое. Теорема доказана.

Пусть теперь G — неприводимая неабелева граф-группа. Тогда она содержит порождающие a и b, которые свободно порождают свободную группу F_2. Посылая все другие порождающие группы G в единицу, получим эндоморфизм G на F_2. Так как свободная группа F_2 богата вербальными подгруппами и не содержит собственных вербальных подгрупп конечной ширины, то, ввиду леммы 3, получаем следующее утверждение

Теорема 2. *Никакая неабелева граф-группа не содержит собственных вербальных подгрупп конечной ширины.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Мерзляков, Рациональные группы, 2-е изд., М., Наука, 1987.

2. В. Г. Бардаков, К теории групп кос, Матем. сб., 183, № 6 (1992), 3–42.

3. В. А. Гринблат, О коммутаторных уравнениях в группах Артина конечного типа, Международн. конф. по алгебре: Тез. докл. по теории групп, Новосибирск, 1989, С. 37.

4. Э. Брискорн, К. Сайтоб, Группы Артина и группы Кокстера, Математика. Сб. переводов, 18, № 6 (1974), 56-79.

5. Н. Бурбаки, Группы и алгебры Ли, М.:Мир, гл. IV–VI, 1972.

6. В. Н. Безверхний, Неразрешимость проблемы вхождения в группах Артина конечного типа, Сиб. матем. ж., 26, № 5 (1985), 27–42.

7. D. L. Johnson, M. A. Albar, The centre of the circula braid group, Math. Japonica, 30, № 4 (1985), 641–645.

8. C. C. Squier, On certain 3-generator Artin groups, Trans. Amer. Nath. Soc., 302, № 1 (1987), 117–124.

9. H. Servatius, Automorphisms of graph groups, J. Algebra, 126, № 1 (1989), 34–60.

10. H. Servatius, C. Droms, B. Servatius, Surface subgroups of graph groups, Proc. Amer. Math. Soc., 106, № 3 (1989), 573–578.

11. A. H. Rhemtulla, A problem of bounded expressibility in free products, Proc. Cambrigde Phil. Soc., 64, № 3 (1968), 574–584.

12. Ю. И. Мерзляков, Позитивные формулы на свободных группах, Алгебра и логика, 5, № 4 (1966), 25-42.

13. J. S. Sacerdote, Almost all free products of groups have the same positive theory, J. Algebra, 27, № 3 (1973), 475–485.

14. N. A. Ito, A theorem of alternating group $A_n (n \geq 5)$, Math. Japon., 2, № 2 (1951), 59–60.

15. В. Г. Дурнев, О ширине коммутанта групп кос B_3 и B_4, Деп. в ВИНИТИ, 1987, № 4040-В87.

16. М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, Основы теории групп, 3-е изд., М., Наука, 1982.

17. В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр, Комбинаторная теория групп, М., Наука, 1974.

18. K. I. Appel, P. E. Schupp, Artin groups and infinite Coxeter groups, Invent. Math., 72 (1983), 201-220.