УДК 517. 946

В. Г. Бардаков

О связи тождества Аниконова–Амирова с тождеством Пестова [1]

При исследовании обратных задач для кинетических уравнений и задач интегральной геометрии важную роль играют дифференциальные тождества. В частности, они широко используются для доказательства единственности и устойчивости решения обратных задач. Обзоры по кинетическим уравнениям можно найти в работах [1, 2].

В работе [3] рассматривалось кинетическое уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \{H, F\} = \lambda, \tag{1}$$

где

$$\{H, F\} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial F}{\partial x_j} - \frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial p_j} \right),$$

— скобки Пуассона, а функции $H = H(x, p, t)$, $F = F(x, p, t)$, $\lambda = \lambda(x, p)$ переменных $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, достаточно гладкие и определены в некоторой области евклидова пространства $\mathbb{R}^{2n+1}$ и $\mathbb{R}^{2n}$ соответственно. При исследовании обратной задачи одновременного определения функций F и λ по известному следу функции F на некотором многообразии использовалось тождество

$$2\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial p_j}\{H, F\} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial p_j} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\{H, F\} \right) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial p_j}\{H, F\} \right) +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial p_j} \right) - \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial p_j} \right) \right] +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial p_j} \right). \tag{2}$$

При исследовании задач интегральной геометрии часто используется тождество Пестова [4, § 11]

$$L^*F \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}(LF) - LF \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}(L^*F) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \mu_x \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2 \right] -$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02–01–00255), Интеграционного проекта СО РАН (2000–43) и программы "Университеты России"(код проекта УР.1.24.00Ф).

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial \theta}+\mu_y\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2\right]+\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\mu_y\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial \theta}+\mu_x\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right]+$$

$$+\left[\frac{\partial F}{\partial x}+\mu_y\frac{\partial F}{\partial \theta}\right]^2+\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\mu_x\frac{\partial F}{\partial \theta}\right]^2-\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2 e^{2\mu}K, \tag{3}$$

справедливое для дважды непрерывно дифференцируемой функции $F=F(x,y,\theta)$, $(x,y)\in D\subseteq\mathbb{R}^2$, $0\le\theta\le 2\pi$, где операторы L и L^* определяются равенствами

$$L=\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial y}+(\mu_y\cos\theta-\mu_x\sin\theta)\frac{\partial}{\partial\theta},$$

$$L^*=-\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}-(\mu_y\sin\theta+\mu_x\cos\theta)\frac{\partial}{\partial\theta},$$

а $K=-e^{-2\mu}\Delta\mu$ — гауссова кривизна метрики

$$\mathrm{d}s^2=e^{2\mu}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2),\quad \mu=\mu(x,y),\quad \mu_x=\frac{\partial\mu}{\partial x},\quad \mu_y=\frac{\partial\mu}{\partial y}.$$

Непосредственно проверяется следующее тождество

$$a\frac{\partial F}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(LF)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(a\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)\cdot LF=\frac{\partial}{\partial x}\left[a\cos\theta\left(\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)^2\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[a\sin\theta\left(\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)^2\right]-$$

$$-\frac{\partial}{\partial\theta}\left[a\cos\theta\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial\theta}+a\sin\theta\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial\theta}\right]+2a\frac{\partial F}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial F}{\partial y}-\sin\theta\frac{\partial F}{\partial x}\right)-$$

$$-\left(\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)^2\left[La+a(\mu_x\cos\theta+\mu_y\sin\theta\right], \tag{4}$$

справедливое для достаточно гладких функций $F=F(x,y,\theta)$ и $a=a(x,y,\theta)$.

Складывая тождества (3) и (4) и обозначая $L^{\perp}=L^*+a\frac{\partial}{\partial\theta}$, получим тождество

$$L^{\perp}F\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(LF)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(L^{\perp}F\right)\cdot LF=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial\theta}+(-\mu_x+a\cos\theta)\left(\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)^2\right]-$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial\theta}+(\mu_y-a\sin\theta)\left(\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)^2\right]+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(\mu_x-a\cos\theta)\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial\theta}+(\mu_y-a\sin\theta)\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial\theta}\right]+$$

$$+\left[\frac{\partial F}{\partial x}+(\mu_y-a\sin\theta)\frac{\partial F}{\partial\theta}\right]^2+\left[\frac{\partial F}{\partial y}+(-\mu_x+a\cos\theta)\frac{\partial F}{\partial\theta}\right]^2-\left[e^{\mu}L(e^{-\mu}a)+a^2+e^{2\mu}K\right]\left(\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)^2.$$

Это тождество использовалось в работах [5, 6] при исследовании кинетических уравнений такого вида:

$$\cos\theta\frac{\partial F}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial F}{\partial y}+(\mu_y\cos\theta-\mu_x\sin\theta)\frac{\partial F}{\partial\theta}=f(x,y,\theta), \tag{5}$$

где $F = F(x, y, \theta)$, $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

В предлагаемой работе будет показано, что уравнение (5) получается из уравнения (1) при специальном выборе функции Гамильтона H, в предположении, что функции, рассматриваемые в (1) не зависят от переменной t. Возникает естественный вопрос: существует ли связь между тождеством Аниконова–Амирова (2) и тождеством Пестова (3)? Мы получим из тождества (2) некоторое более общее тождество из которого будет следовать тождество (3).

§ 1. Вывод уравнения (5) из уравнения (1)

Будем рассматривать стационарное кинетическое уравнение (1) в случае $n = 2$. Обозначая $x = x_1$, $y = x_2$, $p = p_1$, $q = p_2$, запишем его в таком виде

$$\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial q} = \lambda. \tag{6}$$

Положим

$$H = e^{-\mu}\sqrt{p^2 + q^2}, \quad \mu = \mu(x, y).$$

Тогда

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\mu_x e^{-\mu}\sqrt{p^2 + q^2}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -\mu_y e^{-\mu}\sqrt{p^2 + q^2},$$
$$\frac{\partial H}{\partial p} = e^{-\mu}\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \quad \frac{\partial H}{\partial q} = e^{-\mu}\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

Подставив эти выражения в (6), получим

$$e^{-\mu}\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\frac{\partial F}{\partial x} + \mu_x e^{-\mu}\sqrt{p^2+q^2}\frac{\partial F}{\partial p} + e^{-\mu}\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\frac{\partial F}{\partial y} + \mu_y e^{-\mu}\sqrt{p^2+q^2}\frac{\partial F}{\partial q} = \lambda. \tag{7}$$

Введем новые переменные r, θ, $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, полагая $r = \sqrt{p^2 + q^2}$, $\theta = \operatorname{arctg}\frac{q}{p}$. Тогда

$$\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \cos\theta, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \sin\theta.$$

Вычислим производные:

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial p}, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial q}.$$

Считая, что функция F не зависит от r, и, учитывая, что тогда

$$\frac{\partial F}{\partial p} = -\frac{q}{p^2 + q^2}\frac{\partial F}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{p}{p^2 + q^2}\frac{\partial F}{\partial \theta},$$

перепишем уравнение (7) в в новых переменных

$$\cos\theta\frac{\partial F}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial F}{\partial y} + (-\mu_x\sin\theta + \mu_y\cos\theta)\frac{\partial F}{\partial \theta} = \lambda e^{\mu},$$

а это в точности уравнение (5).

Если в качестве гамильтониана H взять функцию $H = \sqrt{p^2+q^2}\ln\mu$, то легко проверить следующие равенства

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\mu_x}{\mu}\sqrt{p^2+q^2}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\mu_y}{\mu}\sqrt{p^2+q^2},$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\ln\mu, \quad \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\ln\mu.$$

Подставив эти выражения в уравнение (6), получим

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\ln\mu\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\mu_x}{\mu}\sqrt{p^2+q^2}\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\ln\mu\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mu_y}{\mu}\sqrt{p^2+q^2}\frac{\partial F}{\partial q} = \lambda. \quad (8)$$

Так же, как и раньше переходим к переменным r, θ и, используя формулы производных, перепишем уравнение (8) в таком виде:

$$\left(\cos\theta\frac{\partial F}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial F}{\partial y}\right)\ln\mu + \left(\frac{\mu_x}{\mu}\sin\theta - \frac{\mu_y}{\mu}\cos\theta\right)\frac{\partial F}{\partial\theta} = \lambda.$$

(Мы опять считаем, то функция F не зависит от r.) Полагая $\widetilde{\mu} = \ln\mu$, запишем последнее уравнение в таком виде

$$\left(\cos\theta\frac{\partial F}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial F}{\partial y}\right)\widetilde{\mu} + \left(\widetilde{\mu}_x\sin\theta - \widetilde{\mu}_y\cos\theta\right)\frac{\partial F}{\partial\theta} = \lambda.$$

Разделив обе части на $\widetilde{\mu}$ и полагая $\widetilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\widetilde{\mu}}$, получим уравнение

$$\cos\theta\frac{\partial F}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial F}{\partial y} + \left(\frac{\widetilde{\mu}_x}{\widetilde{\mu}}\sin\theta - \frac{\widetilde{\mu}_y}{\widetilde{\mu}}\cos\theta\right)\frac{\partial F}{\partial\theta} = \widetilde{\lambda},$$

которое рассматривается в двумерных задачах интегральной геометрии [7].

Заметим, что для производных функции F справедливо равенство

$$p\frac{\partial F}{\partial p} = -q\frac{\partial F}{\partial q}. \quad (9)$$

Далее нам потребуются вторые производные от функции $H = e^{-\mu}\sqrt{p^2+q^2}$. Вычислим их:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = e^{-\mu}\sqrt{p^2+q^2}(-\mu_{xx}+\mu_x^2), \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = e^{-\mu}\sqrt{p^2+q^2}(-\mu_{yy}+\mu_y^2),$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y} = e^{-\mu}\sqrt{p^2+q^2}(-\mu_{xy}+\mu_x\mu_y), \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} = e^{-\mu}\frac{q^2}{(p^2+q^2)\sqrt{p^2+q^2}},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} = e^{-\mu}\frac{p^2}{(p^2+q^2)\sqrt{p^2+q^2}}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q} = -e^{-\mu}\frac{pq}{(p^2+q^2)\sqrt{p^2+q^2}},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial y} = -\mu_y e^{-\mu} \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial q} = -\mu_x e^{-\mu} \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}},$$
$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} = -\mu_x e^{-\mu} \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial q} = -\mu_y e^{-\mu} \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

Кроме того, нам потребуется связь между операторами, участвующими в тождествах Аниконова–Амирова и Пестова. Справедлива

Лемма 1. *Пусть*

$$L = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y} + (\mu_y \cos\theta - \mu_x \sin\theta) \frac{\partial}{\partial \theta},$$

$$L^* = -\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial y} - (\mu_y \sin\theta + \mu_x \cos\theta) \frac{\partial}{\partial \theta}$$

— два оператора;

$$\{H, F\} = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial q},$$

$$\{H, F\}^{\perp} = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial q},$$

— операторы, действующие на функцию F при фиксированной функции H. Тогда
а) $\frac{\partial}{\partial\theta}(LF) = L^* F + L\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)$
б) *если $H = e^{-\mu}\sqrt{p^2+q^2}$, то справедливы равенства*

$$\{H, F\} = e^{-\mu} LF, \quad \{H, F\}^{\perp} = e^{-\mu}(L^* F)$$

Доказательство. Равенство а) проверяется непосредственно. Первое равенство из б) фактически установлено при выводе уравнения (5) из уравнения (1) в начале параграфа. Второе равенство из б) получается аналогично первому.

§ 2. Вывод тождества Пестова из тождества Аниконова–Амирова

Рассмотрим тождество (2) в случае $n = 2$ и обозначая $x = x_1$, $y = x_2$, $p = p_1, q = p_2$, запишем его в таком виде

$$2\left[\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}\{H,F\} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial}{\partial q}\{H,F\}\right] = \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{\partial F}{\partial x}\{H,F\} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial q}\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\{H,F\} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial q}\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\partial F}{\partial p}\{H,F\} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial q}\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{\partial F}{\partial q}\{H,F\}+\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p}+\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial q}\right]+$$
$$+\left[\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^2+\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2+\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}-2\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q}\right].$$

Лемма 2. *Справедливы следующие тождества*
а)

$$\{H,F\}^{\perp}\frac{\partial}{\partial q}\{H,F\}-\{H,F\}\frac{\partial}{\partial q}\{H,F\}^{\perp}=\frac{\partial}{\partial x}\left[F_q(H_q\{H,F\}+H_p\{H,F\}^{\perp})\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[F_q(H_q\{H,F\}^{\perp}-H_p\{H,F\})\right]+\frac{\partial}{\partial p}\left[F_q(H_y\{H,F\}-H_x\{H,F\}^{\perp})\right]-$$
$$-\frac{\partial}{\partial q}\left[F_q(H_x\{H,F\}+H_y\{H,F\}^{\perp})\right]+(F_x^2+F_y^2)(H_{qq}H_p-H_{pq}H_q)+$$
$$+F_xF_p(-H_{qq}H_x-H_{pq}H_y+H_{xq}H_q+H_{yq}H_p)+F_yF_p(-H_{qq}H_y-H_{xq}H_p+H_{pq}H_x+H_{yq}H_q)+$$
$$+F_p^2(H_{xq}H_y-H_{yq}H_x)+F_q^2(\{H_x,H\}+\{H_y,H\}^{\perp}+H_{xq}H_y-H_{yq}H_x)+F_pF_q(\{H_x,H\}^{\perp}-\{H_y,H\}^{\perp})+$$
$$+F_xF_q(-\{H_p,H\}^{\perp}+2(H_{yq}H_q-H_{qq}H_y))+F_yF_q(\{H_p,H\}+2(H_{qq}H_x-H_{xq}H_q)),$$

б)

$$\{H,F\}^{\perp}\frac{\partial}{\partial p}\{H,F\}-\{H,F\}\frac{\partial}{\partial p}\{H,F\}^{\perp}=\frac{\partial}{\partial x}\left[F_p(H_q\{H,F\}+H_p\{H,F\}^{\perp})\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[F_p(H_q\{H,F\}^{\perp}-H_p\{H,F\})\right]+\frac{\partial}{\partial p}\left[F_p(H_y\{H,F\}-H_x\{H,F\}^{\perp})\right]-$$
$$-\frac{\partial}{\partial q}\left[F_p(H_x\{H,F\}+H_y\{H,F\}^{\perp})\right]+(F_x^2+F_y^2)(H_{pq}H_p-H_{pp}H_q)+F_xF_p(-\{H_q,H\}+$$
$$+2(H_{py}H_p-H_{pp}H_y))+F_yF_p(-\{H_q,H\}^{\perp}+2(H_{pp}H_x-H_{xp}H_p))+$$
$$+F_p^2(\{H_x,H\}^{\perp}-\{H_y,H\}+H_{xp}H_y-H_{yp}H_x)+F_q^2(H_{xp}H_y-H_{yp}H_x)+F_pF_q(\{H_x,H\}+\{H_y,H\}^{\perp})+$$
$$+F_xF_q(H_{pp}H_x-H_{xp}H_p+H_{yp}H_q-H_{pq}H_y)+F_yF_q(H_{pq}H_x-H_{xp}H_q+H_{pp}H_y-H_{yp}H_p).$$

где нижние индексы обозначают частные производные по соответствующим переменным.

Доказательство. Проверим тождество а) (тождество б) проверяется аналогично). Перенесем дивергентные слагаемые в левую часть. Тогда левая часть примет такой вид

$$\{H,F\}^{\perp}\frac{\partial}{\partial q}\{H,F\}-\{H,F\}\frac{\partial}{\partial q}\{H,F\}^{\perp}-\frac{\partial}{\partial x}\left[F_q(H_q\{H,F\}+H_p\{H,F\}^{\perp})\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\Big[F_q(H_p\{H,F\}-H_q\{H,F\}^{\perp})\Big]+\frac{\partial}{\partial p}\Big[F_q(H_x\{H,F\}^{\perp}-H_y\{H,F\})\Big]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial q}\Big[F_q(H_x\{H,F\}+H_y\{H,F\}^{\perp})\Big]$$

Вычисляя производные и приводя подобные слагаемые, получим

$$(H_pF_y-H_yF_p-H_qF_x+H_xF_q)(H_{pq}F_x-H_{xq}F_p+H_{qq}F_y-H_{yq}F_q)-$$
$$-(H_pF_x-H_xF_p+H_qF_y-H_yF_q)(H_{pq}F_y-H_{yq}F_p-H_{qq}F_x+H_{xq}F_q)-$$
$$-F_qH_q(H_{xp}F_x+H_pF_{xx}-H_{xx}F_p-H_xF_{xp}+H_{xq}F_y+H_qF_{xy}-H_{xy}F_q-H_yF_{xq})-$$
$$-F_qH_p(H_{xp}F_y+H_pF_{xy}-H_{xy}F_p-H_yF_{xp}-H_{xq}F_x-H_qF_{xx}+H_{xx}F_q+H_xF_{xq})+$$
$$+F_qH_p(H_{yp}F_x+H_pF_{xy}-H_{xy}F_p-H_xF_{yp}+H_{yq}F_y+H_qF_{yy}-H_{yy}F_q-H_yF_{yq})-$$
$$-F_qH_q(H_{yp}F_y+H_pF_{yy}-H_{yy}F_p-H_yF_{yp}-H_{yq}F_x-H_qF_{xy}+H_{xy}F_q+H_xF_{yq})+$$
$$+F_qH_x(H_{pp}F_y+H_pF_{yp}-H_{yp}F_p-H_yF_{pp}-H_{pq}F_x-H_qF_{xp}+H_{xp}F_q+H_xF_{pq})-$$
$$-F_qH_y(H_{pp}F_x+H_pF_{xp}-H_{xp}F_p-H_xF_{pp}+H_{pq}F_y+H_qF_{yp}-H_{yp}F_q-H_yF_{pq})+$$
$$+F_qH_x(H_{pq}F_x+H_pF_{xq}-H_{xq}F_p-H_xF_{pq}+H_{qq}F_y+H_qF_{yq}-H_{yq}F_q-H_yF_{qq})+$$
$$+F_qH_y(H_{pq}F_y+H_pF_{yq}-H_{yq}F_p-H_yF_{pq}-H_{qq}F_x-H_qF_{xq}+H_{xq}F_q+H_xF_{qq}).$$

Открывая скобки и, приводя подобные, получим следующее выражение

$$(F_x^2+F_y^2)(H_{qq}H_p-H_{pq}H_q)+F_xF_p(-H_{pq}H_y+H_{xq}H_q+H_{yq}H_p-H_{qq}H_x)+$$
$$+F_yF_p(-H_{xq}H_p-H_{qq}H_y+H_{pq}H_x+H_{yq}H_q)+F_p^2(H_{xq}H_y-H_{yq}H_x)+$$
$$+F_q^2(H_{xp}H_x+H_{yp}H_y-H_{xx}H_p-H_{yy}H_p+2H_{xq}H_y-2H_{yq}H_x)+$$
$$+F_pF_q(H_{xx}H_q+H_{yy}H_q-H_{yp}H_x+H_{xp}H_y-H_{xq}H_x-H_{yq}H_y)+$$
$$+F_xF_q(2H_{yq}H_q-2H_{qq}H_y-H_{xp}H_q+H_{yp}H_p-H_{pp}H_y+H_{pq}H_x)+$$
$$+F_yF_q(2H_{qq}H_x-2H_{xq}H_q-H_{xp}H_p-H_{yp}H_q+H_{pp}H_x+H_{pq}H_y),$$

которое, как легко заметить равно

$$(F_x^2+F_y^2)(H_{qq}H_p-H_{pq}H_q)+F_xF_p(-H_{qq}H_x-H_{pq}H_y+H_{xq}H_q+H_{yq}H_p)+$$
$$+F_yF_p(-H_{qq}H_y-H_{xq}H_p+H_{pq}H_x+H_{yq}H_q)+F_p^2(H_{xq}H_y-H_{yq}H_x)+$$
$$+F_q^2(\{H_x,H\}+\{H_y,H\}^{\perp}+H_{xq}H_y-H_{yq}H_x)+F_pF_q(\{H_x,H\}^{\perp}-\{H_y,H\})+$$
$$+F_xF_q(-\{H_p,H\}^{\perp}+2(H_{yq}H_q-H_{qq}H_y))+F_yF_q(\{H_p,H\}+2(H_{qq}H_x-H_{xq}H_q),$$

а это и есть квадратичная форма, стоящая в правой части нашего тождества. Лемма доказана.

Складывая почленно тождесто а) с тождеством б), получаем такое

Следствие. *Справедливо тождество*

$$\{H,F\}^{\perp}\left(\frac{\partial}{\partial p}\{H,F\}+\frac{\partial}{\partial q}\{H,F\}\right)-\{H,F\}\left(\frac{\partial}{\partial p}\{H,F\}^{\perp}+\frac{\partial}{\partial q}\{H,F\}^{\perp}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\Big[(F_p+F_q)(H_q\{H,F\}+H_p\{H,F\}^{\perp})\Big]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\Big[(F_p+F_q)(H_q\{H,F\}^{\perp}-H_p\{H,F\})\Big]+\frac{\partial}{\partial p}\Big[(F_p+F_q)(H_y\{H,F\}-H_x\{H,F\}^{\perp})\Big]-$$

$$-\frac{\partial}{\partial q}\Big[(F_p+F_q)(H_x\{H,F\}+H_y\{H,F\}^{\perp})\Big]+$$

$$+(F_x^2+F_y^2)\left[H_p(H_{qq}+H_{pq})-H_q(H_{pp}+H_{pq})\right]+$$

$$+F_xF_p\Big[-\{H_q,H\}+\{H_q,H\}^{\perp}-2H_y(H_{pp}+H_{pq})+2H_p(H_{yq}+H_{yp})\Big]+$$

$$+F_yF_p\Big[-\{H_q,H\}^{\perp}-\{H_q,H\}+2H_x(H_{pp}+H_{pq})-2H_p(H_{xp}+H_{xq})\Big]+$$

$$+F_p^2\Big[\{H_x,H\}^{\perp}-\{H_y,H\}+H_y(H_{xq}+H_{xp})-H_x(H_{yq}+H_{yp})\Big]$$

$$+F_q^2\Big[\{H_x,H\}+\{H_y,H\}^{\perp}+H_y(H_{xp}+H_{xq})-H_x(H_{yq}+H_{yp})\Big]+$$

$$+F_pF_q\Big[\{H_x,H\}+\{H_y,H\}^{\perp}+\{H_x,H\}^{\perp}-\{H_y,H\}\Big]+$$

$$+F_xF_q\Big[\{H_p,H\}-\{H_p,H\}^{\perp}+2H_q(H_{yq}+H_{yp})-2H_y(H_{qq}+H_{pq})\Big]+$$

$$+F_yF_q\Big[\{H_p,H\}+\{H_p,H\}^{\perp}+2H_x(H_{qq}+H_{pq})-2H_q(H_{xq}+H_{xp})\Big].$$

Теперь мы готовы доказать основное утверждение настоящей работы.

Теорема. *Если в тождестве из следствия положить*

$$H=e^{-\mu}\sqrt{p^2+q^2}$$

и считать, что функция F не зависит от переменной $r=\sqrt{p^2+q^2}$ то из него выводится тождество Пестова.

Доказательство. Вспоминая формулы:

$$\{H,F\}=e^{-\mu}LF,\quad \{H,F\}^{\perp}=e^{-\mu}(L^*F)$$

из леммы 1 б) и подставляя эти выражения в левую часть тождества из леммы 2 б), получим

$$\{H,F\}^{\perp}\frac{\partial}{\partial p}\{H,F\}-\{H,F\}\frac{\partial}{\partial p}\{H,F\}^{\perp}=-e^{-2\mu}\frac{q}{p^2+q^2}\left[L^*F\frac{\partial}{\partial\theta}(LF)-LF\frac{\partial}{\partial\theta}(L^*F)\right].$$

Видим, что в квадратных скобках стоит левая часть тождества Пестова. Рассмотрим теперь правую часть тождества из леммы 2 б). Подставляя выражение для H, и переходя к новой переменной θ, запишем ее в таком виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{q}{p^2+q^2}F_\theta(\sin\theta e^{-2\mu}LF+\cos\theta e^{-2\mu}L^*F)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{q}{p^2+q^2}F_\theta(\sin\theta e^{-2\mu}L^*F-\cos\theta e^{-2\mu}LF)\right]-$$

$$-\frac{q}{p^2+q^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[-\frac{q}{p^2+q^2}F_\theta(-\mu_y e^{-2\mu}\sqrt{p^2+q^2}LF+\mu_x e^{-2\mu}\sqrt{p^2+q^2}L^*F)\right]-$$

$$-\frac{p}{p^2+q^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[-\frac{q}{p^2+q^2}F_\theta(-\mu_x e^{-2\mu}\sqrt{p^2+q^2}LF-\mu_y e^{-2\mu}\sqrt{p^2+q^2}L^*F)\right]+$$

$$+(F_x^2+F_y^2)(-e^{-2\mu}\frac{pq}{(p^2+q^2)\sqrt{p^2+q^2}}\cos\theta-e^{-2\mu}\frac{q^2}{(p^2+q^2)\sqrt{p^2+q^2}}\sin\theta)+$$

$$+\left(\frac{q}{p^2+q^2}F_\theta\right)^2\Big[2\mu_x\mu_y\cos\theta e^{-2\mu}\sqrt{p^2+q^2}-2\mu_x\mu_y\cos\theta e^{-2\mu}\sqrt{p^2+q^2}+$$

$$+e^{-2\mu}\sqrt{p^2+q^2}(-\mu_{xx}+\mu_x^2)\sin\theta-\mu_x^2\sin\theta e^{-2\mu}\sqrt{p^2+q^2}+e^{-2\mu}\sqrt{p^2+q^2}(-\mu_{yy}+\mu_y^2)\sin\theta-$$

$$-\mu_y^2\sin\theta e^{-2\mu}\sqrt{p^2+q^2}\Big]+\left(\frac{p}{p^2+q^2}F_\theta\right)^2\left[\mu_x\mu_y\cos\theta e^{-2\mu}\sqrt{p^2+q^2}-\mu_x\mu_y\cos\theta e^{-2\mu}\sqrt{p^2+q^2}\right]-$$

$$-\frac{q}{p^2+q^2}F_xF_\theta\Big[2e^{-2\mu}\mu_y\frac{q^2}{p^2+q^2}-e^{-2\mu}\mu_x\frac{pq}{p^2+q^2}-2\mu_y\cos^2\theta e^{-2\mu}-$$

$$-\mu_y\sin^2\theta e^{-2\mu}-\mu_x\cos\theta\sin\theta e^{-2\mu}+e^{-2\mu}\mu_y\frac{p^2}{p^2+q^2}\Big]-$$

$$-\frac{q}{p^2+q^2}F_yF_\theta\Big[2e^{-2\mu}\mu_x\cos^2\theta-e^{-2\mu}\mu_y\frac{pq}{p^2+q^2}-2\mu_x e^{-2\mu}\frac{q^2}{p^2+q^2}+$$

$$+\mu_x\sin^2\theta e^{-2\mu}-\mu_x e^{-2\mu}\frac{p^2}{p^2+q^2}-e^{-2\mu}\mu_y\cos\theta\sin\theta\Big]-$$

$$-\frac{pq}{p^2+q^2}F_\theta^2\Big[\mu_x\mu_y\sin\theta e^{-2\mu}\sqrt{p^2+q^2}-e^{-2\mu}(-\mu_{xx}+\mu_x^2)\sqrt{p^2+q^2}+\mu_x^2\cos\theta e^{-2\mu}\sqrt{p^2+q^2}-$$

$$-e^{-2\mu}(-\mu_{yy}+\mu_y^2)\cos\theta\sqrt{p^2+q^2}+\mu_y^2e^{-2\mu}\cos\theta\sqrt{p^2+q^2}-\mu_x\mu_y\sin\theta e^{-2\mu}\sqrt{p^2+q^2}\Big]+$$

$$+\frac{p}{p^2+q^2}F_xF_\theta\left[-e^{-2\mu}\mu_y\cos\theta\sin\theta-e^{-2\mu}\mu_x\frac{q^2}{p^2+q^2}-\mu_y e^{-2\mu}\frac{pq}{p^2+q^2}+\mu_x\cos^2\theta e^{-2\mu}\right]+$$

$$+\frac{p}{p^2+q^2}F_yF_\theta\left[e^{-2\mu}\mu_y\cos^2\theta+e^{-2\mu}\mu_x\frac{pq}{p^2+q^2}-\mu_y e^{-2\mu}\frac{q^2}{p^2+q^2}+\mu_x\sin\theta\cos\theta e^{-2\mu}\right].$$

Приводя подобные и, умножая это выражение на

$$e^{2\mu}\frac{p^2+q^2}{q},$$

получим

$$2\mu_xF_\theta(\sin\theta LF+\cos\theta L^*F)-\frac{\partial}{\partial x}\left[F_\theta(\sin\theta LF+\cos\theta L^*F)\right]+$$

$$+2\mu_yF_\theta(\sin\theta L^*F-\cos\theta LF)-\frac{\partial}{\partial y}\left[F_\theta(\sin\theta L^*F-\cos\theta LF)\right]+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[F_\theta(-\mu_y\sin\theta LF+\mu_x\sin\theta L^*F)\right]+$$

$$+\frac{p}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[F_\theta(-\mu_x\sin\theta LF-\mu_y\sin\theta L^*F)\right]-(F_x^2+F_y^2)+$$

$$+\frac{q}{p^2+q^2}F_\theta^2\left[-\mu_{xx}\sin\theta\sqrt{p^2+q^2}-\mu_{yy}\sin\theta\sqrt{p^2+q^2}-\right]$$

$$-F_xF_\theta\left[\mu_y\sin^2\theta-\mu_y\cos^2\theta-2\mu_x\cos\theta\sin\theta\right]-F_yF_\theta\left[\mu_x(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-2\mu_y\cos\theta\sin\theta\right]-$$

$$-\cos\theta F_\theta^2\left[\mu_{xx}\cos\theta+\mu_{yy}\cos\theta\right]+\frac{p}{q}F_xF_\theta\left[\mu_x(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-2\mu_y\cos\theta\sin\theta\right]+$$

$$+\frac{p}{q}F_yF_\theta\left[\mu_y(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-2\mu_x\cos\theta\sin\theta\right].$$

Перегруппировав слагаемые, получим

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[F_\theta(\sin\theta LF+\cos\theta L^*F)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[F_\theta(\sin\theta L^*F-\cos\theta LF)\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[F_\theta(-\mu_y\sin\theta LF+\mu_x\sin\theta L^*F)\right]+\frac{p}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta F_\theta(-\mu_xLF-\mu_yL^*F\right]-$$

$$-(F_x^2+F_y^2)+F_\theta^2\left[-\sin^2\theta(\mu_{xx}+\mu_{yy})\right]-F_xF_\theta\left[\mu_y(\sin^2\theta-\cos^2\theta)-2\mu_x\cos\theta\sin\theta\right]-$$

$$-F_yF_\theta\left[\mu_x(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-2\mu_y\cos\theta\sin\theta\right]-F_\theta^2\left[\cos^2\theta(\mu_{xx}+\mu_{yy})\right]+$$

$$+\frac{p}{q}F_xF_\theta\left[\mu_x(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-2\mu_y\cos\theta\sin\theta\right]+\frac{p}{q}F_yF_\theta\left[\mu_y(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2\mu_x\cos\theta\sin\theta\right]+$$

$$+2\mu_xF_\theta(\sin\theta LF+\cos\theta L^*F)+2\mu_yF_\theta(\sin\theta L^*F-\cos\theta LF).\tag{10}$$

Будем по-порядку рассматривать слагаемые в этом выражении и используя определения операторов L и L^*, получим равенства

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[F_\theta(\sin\theta LF+\cos\theta L^*F)\right]=-\frac{\partial}{\partial x}\left[F_yF_\theta-\mu_xF_\theta^2\right],\tag{11}$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left[F_\theta(\sin\theta L^*F-\cos\theta LF)\right]=-\frac{\partial}{\partial y}\left[-F_xF_\theta-\mu_yF_\theta^2\right].\tag{12}$$

Рассмотрим далее выражение

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[F_\theta(-\mu_y\sin\theta LF+\mu_x\sin\theta L^*F)\right]+\frac{p}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta F_\theta(-\mu_xLF-\mu_yL^*F)\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\theta}\left[-\mu_y\cos\theta\sin\theta F_xF_\theta-\mu_y\sin^2\theta F_yF_\theta-\mu_y^2\cos\theta\sin\theta F_\theta^2-\mu_x\sin^2\theta F_xF_\theta+\right.$$

$$\left.+\mu_x\cos\theta\sin\theta F_yF_\theta-\mu_x^2\cos\theta\sin\theta F_\theta^2\right]+\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left[-\mu_x\cos\theta\sin\theta F_xF_\theta-\mu_x\sin^2\theta F_yF_\theta+\right.$$

$$\left.+\mu_x^2\sin^2\theta F_\theta^2+\mu_y\sin^2\theta F_xF_\theta-\mu_y\cos\theta\sin\theta F_yF_\theta+\mu_y^2\sin^2\theta F_\theta^2\right],$$

и воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 3. 1) *Для всякой непрерывно–дифференцируемой функции* $A = A(\theta)$ *справедливо тождество*

$$\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial A}{\partial\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}A + \frac{\partial}{\partial\theta}(\operatorname{ctg}\theta A).$$

2) *Для определенных выше операторов справедливы тождества*

$$\sin\theta LF + \cos\theta L^*F = F_y - \mu_x F_\theta, \quad \sin\theta L^*F - \cos\theta LF = -F_x - \mu_y F_\theta.$$

Используя первую часть этой леммы, перепишем последнее выражение перед леммой в таком виде

$$\frac{\partial}{\partial\theta}[-\mu_y F_y F_\theta - \mu_x F_x F_\theta] + \Big[(\mu_y - \mu_x\operatorname{ctg}\theta)F_xF_\theta + (-\mu_x - \mu_y\operatorname{ctg}\theta)F_yF_\theta + (\mu_x^2+\mu_y^2)F_\theta^2\Big]. \tag{13}$$

Учитывая выражения (11)–(13), перепишем (10) в таком виде

$$-\frac{\partial}{\partial x}\Big[F_yF_\theta - \mu_xF_\theta^2\Big] - \frac{\partial}{\partial y}\Big[-F_xF_\theta - \mu_yF_\theta^2\Big] +$$
$$+\frac{\partial}{\partial\theta}[-\mu_yF_yF_\theta - \mu_xF_xF_\theta] + \Big[(\mu_y - \mu_x\operatorname{ctg}\theta)F_xF_\theta + (-\mu_x - \mu_y\operatorname{ctg}\theta)F_yF_\theta + (\mu_x^2+\mu_y^2)F_\theta^2\Big] -$$
$$-(F_x^2+F_y^2) - F_\theta^2\sin^2\theta(\mu_{xx}+\mu_{yy}) - F_xF_\theta\Big[\mu_y(\sin^2\theta - \cos^2\theta) - 2\mu_x\cos\theta\sin\theta\Big] -$$
$$-F_yF_\theta\Big[\mu_x(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2\mu_y\cos\theta\sin\theta\Big] - F_\theta^2\cos^2\theta(\mu_{xx}+\mu_{yy}) +$$
$$+\operatorname{ctg}\theta F_xF_\theta\Big[\mu_x(\cos^2\theta-\sin^2\theta) - 2\mu_y\cos\theta\sin\theta\Big] + \operatorname{ctg}\theta F_yF_\theta\Big[\mu_y(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2\mu_x\cos\theta\sin\theta\Big] -$$
$$-2F_\theta^2(\mu_x^2+\mu_y^2) + 2\mu_xF_yF_\theta - 2\mu_yF_xF_\theta. \tag{14}$$

При этом мы воспользовались вторым утверждением леммы и переписали последние слагаемые из (10):

$$2\mu_xF_\theta(\sin\theta LF + \cos\theta L^*F) + 2\mu_yF_\theta(\sin\theta L^*F - \cos\theta LF) = -2F_\theta^2(\mu_x^2+\mu_y^2) + 2\mu_xF_yF_\theta - 2\mu_yF_xF_\theta.$$

Преобразуя выражение (14), получим

$$-\frac{\partial}{\partial x}\Big[F_yF_\theta - \mu_xF_\theta^2\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[F_xF_\theta + \mu_yF_\theta^2\Big] +$$
$$+\frac{\partial}{\partial\theta}[-\mu_yF_yF_\theta - \mu_xF_xF_\theta] - F_x^2 - F_y^2 - F_\theta^2\Big[\mu_{xx}+\mu_{yy}+\mu_x^2+\mu_y^2\Big] - 2\mu_yF_xF_\theta + 2\mu_xF_yF_\theta =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x}\Big[F_yF_\theta - \mu_xF_\theta^2\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[F_xF_\theta + \mu_yF_\theta^2\Big] -$$
$$-\frac{\partial}{\partial\theta}(\mu_yF_yF_\theta + \mu_xF_xF_\theta) - (F_x + \mu_yF_\theta)^2 - (F_y - \mu_xF_\theta)^2 - F_\theta^2(\mu_{xx}+\mu_{yy}).$$

Как легко заметить, это выражение отличается от правой части тождества Пестова только умножением на -1. Теорема доказана.

Автор благодарит Ю. Е. Аниконова за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Anikonov Yu. E., Bardakov V. G., Direct and inverse problems for kinetic equations. — J. Inverse Ill–Posed Prob., 2000, 8, № 6, 591–634.

2. Аниконов Ю. Е., Представление решений кинетических уравнений и обратные задачи. Препринт, Ин–т математики СО РАН, №94, Новосибирск, 2002, 42 с.

3. Аниконов Ю. Е., Амиров А. К., Теорема единственности решения обратной задачи для кинетического уравнения. ДАН СССР 1983, 272, №6, 1292–1293.

4. Аниконов Ю. Е., Пестов Л. Н., Формулы в линейных и нелинейных задачах томографии. Новосибирск, изд-во НГУ, 1990.

5. Бардаков В. Г., О восстановлении правой части кинетического уравнения. Сдана в печать.

6. Sharafutdinov V. A. Ray transform on Riemannian manifolds, University of Oulu, 1999. — Доступно по http://koivu.oulu.fi/ morispaa/lectures.htm

7. Аниконов Ю. Е., Лаврентьев М. М., Об одном классе задач интегральной геометрии. ДАН СССР 1967, 176, №5, 1240–1241.