УДК 512.542.7

# РАЗЛОЖЕНИЕ ЧЕТНЫХ ПОДСТАНОВОК НА ДВА МНОЖИТЕЛЯ ЗАДАННОГО ЦИКЛОВОГО СТРОЕНИЯ

В. Г. Бардаков

Доказывается гипотеза Бреннера–Эванса: для любых натуральных чисел $k \geqslant 4$, $m \geqslant 1$ всякая четная подстановка из группы $A_{km}$ является произведением двух подстановок, каждая из которых разлагается в произведение $m$ независимых циклов длины $k$. Известно, что при $k = 2, 3$ это утверждение неверно.

Известно (см., например [1, 2]), что в знакопеременной группе $A_n$ при $n > 2$ не всякий элемент представим в виде произведения двух инволюций из $A_n$, но всякий элемент представим в виде произведения двух элементов порядка 3 (см. [2]). В связи с этими результатами Бреннер и Эванс [3] поставили проблему описания всех четных подстановок, представимых в виде произведения двух элементов порядка $k$ ($k \geqslant 4$). В этой же работе ими была выдвинута гипотеза: при любых целых $k \geqslant 4$ и $m \geqslant 1$ всякий элемент группы $A_{km}$ представим в виде произведения двух подстановок, каждая из которых в разложении на независимые циклы состоит из $m$ циклов длины $k$. При $k = 2, 3$ это утверждение неверно.

Ранее справедливость первой гипотезы была доказана только при $k = 4$, $m \geqslant 1$ и при $k \geqslant 5$, $m = 1$ [4, с. 103], [5]. В предлагаемой работе гипотеза доказывается в полном объеме.

**Теорема.** *Для любых целых чисел $k \geq 4$, $m \geq 1$ всякая подстановка из знакопеременной группы $A_{km}$ представима в виде произведения двух подстановок, каждая из которых разлагается на $m$ независимых циклов длины $k$.*

В [3] доказано, что всякий элемент из $A_n$ при $n \geqslant 15$ представим в виде произведения двух элементов порядка 5, тем самым исправлено ошибочное утверждение из [6]. Кроме того, сам Бреннер (см. [3])анонсировал, что при $n \geqslant 28$ всякий элемент из $A_n$ представим в виде произведения двух элементов порядка 7. Исходя из этих результатов, выдвинем следующую гипотезу: если $k = 2k_1 - 1$ простое число не меньше 5, то при всех $n \geqslant kk_1$ всякий элемент из $A_n$ представим в виде произведения двух элементов порядка $k$.

Автор благодарит профессора Ю. И. Мерзлякова за постоянную помощь и поддержку в работе, а также участников семинара “Эварист Галуа”, прослушавших доказательства и внесших ряд полезных предложений.

## § 1. Определения и обозначения

Будем обозначать символом $S_n$ симметрическую группу $n$–й степени, т. е. группу подстановок $n$–элементного множества $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Пусть $P$ – некоторая подстановка из $S_n$. Тогда под действием группы $\text{гр}(P)$ множество $M$ разбивается на непересекающиеся орбиты $M_1, \dots, M_l$. Действие подстановки $P$ на всем множестве $M$ индуцирует ее действие на каждой орбите $M_i$. Будем называть ограничение $P_i = P|_{M_i}$ *циклом* подстановки $P$, а множество $M_i$ – *носителем цикла* $P_i$ и обозначать $M_i = \text{supp}(P_i)$.

Подстановку $P$ можно представить в виде произведения $P = P_1P_2\dots P_l$ независимых циклов.

С каждым разложением $P = P_1\dots P_l$ подстановки $P$ в произведение независимых циклов свяжем упорядоченную последовательность $\tau(P) = (\tau_1,\dots,\tau_l)$, где $\tau_i$ – длина цикла $P_i$, которую назовем *циклическим типом* (или просто *типом*) подстановки $P$. Числа $\tau_i$ будем называть *компонентами типа* $\tau(P)$, а $l$ – длиной типа. Понятно, что циклический тип определяется неоднозначно, а зависит от порядка следования циклов $P_i$ в разложении $P = P_1\dots P_l$. Среди всех типов подстановки $P$ будем выделять такой тип, компоненты которого упорядочены следующим образом: вначале идут нечетные компоненты в порядке убывания, а затем – четные компоненты так же в порядке убывания. Такой тип будем называть *начальным типом* подстановки $P$.

Если подстановка $P \in A_{km}$, $k \geq 4$, $m \geq 1$ обладает представлением $P = A\cdot B$ в котором каждая из подстановок $A$ и $B$ в разложении на независимые циклы состоит из $m$ циклов длины $k$, то будем говорить, что подстановка $P$ является $k$*–представимой*. Таким образом, мы должны доказать, что всякая подстановка из $A_{km}$ является $k$–представимой.

Доказательство будем вести индукцией по $m$. Случай $m = 1$, т. е. основание индукциии, установлен Бертрамом [5]. В § 2 воспроизводится его конструкция и отмечаются некоторые ее свойства. В § 3 вводится некоторая операция на $k$–представлениях, позволяющая по $k$–представлениям двух подстановок из $A_{km_1}$ и $A_{km_2}$ соответственно строить $k$–представления некоторых подстановок из $A_{k(m_1+m_2)}$. Для обоснования индукционного перехода по произвольной подстановке $P \in A_{km}$, $m > 1$, построим $k$–представления подстановок $Q \in A_k$ и $R \in A_{k(m-1)}$, из которых при помощи введенной операции построим $k$–представления подстановки $P$.

Кроме того, заметим, что для доказательства $k$–представимости подстановки $P \in A_{km}$ достаточно доказать $k$–представимость любой подстановки лежащей в том же классе сопряженных (в $S_{km}$) элементов, что и $P$.

## § 2. Случай $m = 1$

Напомним конструкцию Бертрама [5]. Пусть подстановка $P \in A_k$ разложена на независимые циклы

$$P = X_1\dots X_cY_1Z_1\dots Y_dZ_d,$$

где

$$X_i = (x_{i,1}x_{i,2}\dots x_{i,\lambda(i)}\dots x_{i,l(i)})$$

– цикл нечетной длины,

$$Y_j = (y_{j,1}y_{j,2}\dots y_{j,\mu(j)}\dots y_{j,m(j)}), \quad Z_j = (z_{j,1}z_{j,2}\dots z_{j,\nu(j)}\dots z_{j,n(j)})$$

– циклы четной длины, где $l(i) = 2\lambda(i) - 1 \geq 3$, $m(j) = 2(\mu(j) - 1)$, $n(j) = 2(\nu(j) - 1)$, $i = 1,\dots,c$, $j = 1,\dots,d$.

Определим подстановки $A, B \in S_k$ с условием $P = A\cdot B$. А именно, для каждого неединичного цикла $X = (x_1x_2\dots x_\lambda\dots x_l)$ нечетной длины $l$ из списка $X_1,\dots,X_c$ определим действие подстановок $A$ и $B$ на всех символах, входящих в $X$, за исключением действия $A$ на $x_\lambda$ и действия $B$ на $x_1$:

$$A = (x_1 x_{2\lambda-1} x_2 x_{2\lambda-2} \dots x_{\lambda-1} x_{\lambda+1} x_\lambda \dots), \quad B = (x_{\lambda+1} x_\lambda x_{\lambda+2} x_{\lambda-1} \dots x_{2\lambda-1} x_2 x_1 \dots).$$

Для большей наглядности действие подстановок $A$ и $B$ на символах из $X$ можно представить в виде графов, вершинами которых являются символы из $X$, а направленные ребра показывают, как действуют подстановки $A$ и $B$ (см. рис. 1).

Далее, для каждой пары циклов четной длины $Y = (y_1 \dots y_\mu \dots y_m)$, $Z = (z_1 \dots z_\nu \dots z_n)$, у которых $m > 2$, $n > 2$, из списка $(Y_i, Z_i)$, $i = 1, \dots, d$, определим действие подстановок $A$ и $B$ на всех символах, входящих в $X$ и $Z$, за исключением действия $A$ на символе $z_{\nu-1}$ и действия $B$ на символе $y_\mu$ следующим образом:

$$A = (y_\mu z_\nu y_1 y_m y_2 y_{m-1} \dots y_{\mu+1} y_{\mu-1} z_1 z_n z_2 z_{n-1} \dots z_{\nu+1} z_{\nu-1} \dots),$$

$$B = (z_\nu y_{\mu+1} y_{\mu-1} y_{\mu+2} y_{\mu-2} \dots y_m y_2 y_1 z_{\nu+1} z_{\nu-1} z_{\nu+2} z_{\nu-2} \dots z_n z_2 z_1 y_\mu \dots),$$

(см. рис. 2). Если же $Y = (y_1 y_2)$, $Z = (z_1 z_2)$ – транспозиции, то для них $m = \mu = 2$ и $n = \nu = 2$. Положим в этом случае

$$A = (y_2 z_2 y_1 z_1 \dots), \quad B = (z_2 y_1 z_1 y_2 \dots),$$

(см. рис. 3).

Теперь уже понятно, как действуют подстановки $A$ и $B$ на элементах пары $(Y, Z)$, если один из циклов является транспозицией, а другой – нет.

Осталось определить действия $A$ и $B$ на остальных символах. Как это сделать, графически совершенн ясно: каждое ребро выходящее из цикла $X_i$ или из пары $Y_j Z_j$ мы должны соединить с ребром, входящим в следующий цикл, а ребро выходящее из последнего цикла соединить с ребром, входящим в первый цикл; тем самым, мы получим подстановку $A$, которая, как легко заметить, является циклом длины $k$. Аналогично для $B$, но там каждое выходящее ребро мы должны соединить с ребром, входящим в предыдущий цикл. Более формально:

$$x_{i,\lambda(i)} \xrightarrow{A} x_{i+1,1} \overset{B}{\dashrightarrow} x_{i,\lambda(i)+1} \quad \text{при} \quad i = 1, \dots, c-1,$$

$$x_{c,\lambda(c)} \xrightarrow{A} \begin{cases} y_{1,\mu(1)} \overset{B}{\dashrightarrow} x_{c,\lambda(c)+1} & \text{при} \quad d > 0, \\ \\ x_{i,1} \overset{B}{\dashrightarrow} x_{c,\lambda(c)+1} & \text{при} \quad d = 0, \end{cases}$$

$$z_{i,\nu(i)-1} \xrightarrow{A} y_{i+1,\mu(i+1)} \overset{B}{\dashrightarrow} z_{i,\nu(i)},$$

$$z_{d,\nu(d)} \xrightarrow{A} \begin{cases} x_{1,1} \overset{B}{\dashrightarrow} y_{1,\mu(1)} & \text{при} \quad d \geqslant 1, \\ \\ y_{1,\mu(1)} \overset{B}{\dashrightarrow} z_{d,\nu(d)} & \text{при} \quad d = 0. \end{cases}$$

Таким образом, если $P$ не содержит циклов единичной длины, то мы построили искомое $k$–представление $P = A \cdot B$.

Для описания свойств представления Бертрама, введем следующие обозначения. Пусть $X$, $Y \in S_n$. Обозначим

$$\mathrm{supp}(X, Y) = \mathrm{supp}(X) \bigcap \mathrm{supp}(Y).$$

Тогда построенное представление $X_1 \ldots X_c Y_1 Z_1 \ldots Y_d Z_d = A \circ B$ обладает следующими свойствами:

1) если цикл $P_i$ из разложения подстановки $P = X_1 \ldots X_c Y_1 Z_1 \ldots Y_d Z_d$ имеет длину $\geq 3$, то множество $\mathrm{supp}(P_i^A, P_i)$ не пусто;

2) для любой пары соседних циклов $P_i$ и $P_{i+1}$ из разложения $P$ в произведение независимых циклов, а также для пары $(Z_d, X_1)$ множество $\mathrm{supp}(P_i^A, P_{i+1})$ не пусто.

Эти свойства $k$–представления Бертрама потребуются нам в дальнейшем.

Пусть теперь подстановка $P$ содержит цикл $(y)$ длины 1, т. е. $P = Q \cdot (y)$ , где $Q \in A_{k-1}$. Если $Q = Q_1 \ldots Q_s$ – разложение $Q$ в произведение независимых циклов и $Q = A_1 \cdot B_1$ – такое $(k - -1)$ – представление подстановки $Q$, что некоторый символ $r$ лежит в множестве $\mathrm{supp}(Q_i^A, Q_j)$ , $i = 1, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, s$, т. е. $Q_i = (x_1 x_2 \ldots)$, $Q_j = (r \ldots)$, $A_1 = (x_1 r \ldots)$, $B_1 = (r x_2 \ldots)$, то положим: $A = (x_1 y r \ldots)$, $B = (r y x_2 \ldots)$ – циклы длины $k$. Легко проверить, что $P = A \cdot B$ – $k$–представление подстановки $P = Q \cdot (y)$, причем $y \in \mathrm{supp}(Q_i^A, (y))$ и $r \in \mathrm{supp}((y)^A, Q_j)$.

## § 3. $\Lambda$–композиция $k$–представлений

Пусть $Q = A_1 \cdot B_1$ и $R = A_2 \cdot B_2$ — $k$–представления подстановок $Q \in A_{km_1}$ и $R \in A_{km_2}$, определенных на непересекающихся множествах символов $M_1$ и $M_2$. Кроме того, пусть $\Lambda$ — произведение независимых трансвекций, каждая из которых переводит символ из $M_1$ в некоторый символ из $M_2$. Тогда $\Lambda$–*композицией* представлений $Q = A_1 \cdot B_1$ и $R = A_2 \cdot B_2$ назовем представление $P = A_1 A_2 \cdot (B_1 B_2)^\Lambda$, которое, как легко заметить, является $k$–представлением подстановки $P$ в группе $S_{k(m_1+m(2))}$. Рассмотрим некоторые частные случаи $\Lambda$–композиции.

Если $\Lambda$ – тождественная подстановка, то $\Lambda$–композицией $k$–представлений $Q = A_1 \cdot B_1$ и $R = A_2 \cdot B_2$ является $k$–представление $P = A_1 A_2 \cdot B_1 B_2$ подстановки $P = Q \cdot R$.

**Лемма 1.** *Пусть для подстановки $P \in A_{km}$, $k \geq 4$, $m \geq 1$ задано разложение на независимые циклы $P = P_1 \ldots P_l$ и $k$–представление $P = A \cdot B$. Если $l \geq 4$ и $s \in supp(P_1^A, P_2)$, $r \in supp(P_3^A, P_4)$, то $A \cdot B^{(sr)}$ — $k$–представление подстановки $Z_1 Z_2 P_3 \ldots P_l$, где $Z_j$ — цикл состоящий из символов входящих в $P_j$ и $P_{j+2}$, где $j = 1, 2$. Если же $l \geq 3$ и $s \in supp(P_1^A, P_1)$, $r \in supp(P_2^A, P_3)$, то $A \cdot B^{(sr)}$ — $k$–представление подстановки $Z P_4 \ldots P_l$, где цикл $Z$ состоит из символов входящих в циклы $P_1$, $P_2$ и $P_3$.*

**Доказательство.** Докажем первое утверждение (второе утверждение доказывается аналогично). По условию, $P_1 = (s_1 s_2 S)$, где $S$ – некоторое, возможно пустое, множество символов, причем, если $P_1$ является единичным циклом, то $s_2$ и $S$ отсутствуют; $P_2 = (p s S_1)$, где $S_1$ — множество символов (возможно пустое) и опять, если $P_2$ — единичный цикл, то $p$ и $S_1$ отсутствуют. Аналогично определяются $P_3 = (r_1 r_2 T)$ и $P_4 = (q r T_1)$. Так как $s \in \mathrm{supp}(P_1^A, P_2)$ , а $r \in \mathrm{supp}(P_3^A, P_4)$, то $A$ переводит $s_1$ в $s$, а $r_1$ переводит в $r$. Тогда под действием $B$ символ $s$ переходит в $s_2$, а $r$ переходит в $r_2$. Предположим еще, что под действием $A$ символ $p$ переходит в некоторый символ $p_1$, а $q$ переходит в некоторый символ $q_1$. Тогда

$$B = \begin{pmatrix} \dots & p_1 & s & \dots & q_1 & r & \dots \\ \dots & s & s_2 & \dots & r & r_2 & \dots \end{pmatrix}.$$

Теперь легко проверить, что

$$A \cdot B^{(sr)} = (s_1 r_2 T r_1 s_2 S)(p r T_1 q s S_1) P_5 \dots P_l.$$

Лемма доказана.

Пусть $Q = Q_1 \dots Q_c$, $R = R_1 \dots R_d$ — разложения на независимые циклы подстановок, введенных в начале параграфа. Предположим, что в $k$–представлении $Q = A_1 \cdot B_1$ некоторый символ $s$ лежит в $\mathrm{supp}(Q_1^{A_1}, Q_2)$, а в $k$–представлении $R = A_2 \cdot B_2$ некоторый символ $r \in \mathrm{supp}(R_1^{A_2}, R_2)$. Тогда по лемме 1, $(sr)$–композиция этих представлений дает $k$–представление подстановки

$$P = Z_1 Z_2 Q_3 \dots Q_c R_3 \dots R_d,$$

где все выписанные циклы независимы и длина цикла $Z_j$ равна сумме длин циклов $Q_j$ и $R_j$, $j = 1, 2$, т. е. при такой композиции происходит как бы склеивание цикла $R_j$ с циклом $Q_j$, $j = 1, 2$.

Предположим, что в $k$–представлении $Q = A_1 \cdot B_1$ символ $s \in \mathrm{supp}(Q_1^{A_1}, Q_1)$, а в $k$–представлении $R = A_2 \cdot B_2$ символ $r \in \mathrm{supp}(R_1^{A_2}, R_2)$. Тогда по лемме 1, $(sr)$–композицей этих представлений является $k$–представление подстановки $Z \cdot Q_2 \dots Q_c R_3 \dots R_d$, где все выписанные циклы независимы и длина цикла $Z$ равна сумме длин циклов $Q_1$, $R_1$ и $R_2$, т. е. в этом случае происходит как бы склеивание цикла $Q_1$ с циклами $R_1$ и $R_2$.

В рассмотренных частных случаях $\Lambda$–композиции, как легко заметить, выполнено следующее свойство: если в $k$–представлении $Q_1 \dots Q_c = A_1 \cdot B_1$ для некоторых циклов $Q_i$ и $Q_j$, $1 \le i, j \le n$ найдется символ $q$ лежащий в $\mathrm{supp}(Q_i^{A_1}, Q_j)$, то и в полученном $k$–представлении $P_1 \dots P_l = A_1 A_2 \cdot (B_1 B_2)^{(sr)}$ символ $q \in \mathrm{supp}(P_{i'}^{A_1 A_2}, P_{j'})$, где $1 \le i', j' \le l$ и цикл $P_{i'}$ содержит символы цикла $Q_i$, а цикл $P_{j'}$ содержит символы цикла $Q_j$. Аналогично для второго $k$–представления $R_1 \dots R_d = A_2 \cdot B_2$.

Аналогично, если в $k$–представлении $P = A \cdot B$ некоторый символ $q$ лежит в $\mathrm{supp}(P_i^A, P_j)$, $1 \le i, j \le l$, то для $k$–представления $P = B \cdot A^B$ наоборот, найдется символ $q'$ лежащий в $\mathrm{supp}(P_j^B, P_i)$.

Так как в разобранных примерах $\Lambda$–композиции складываются длины соответствующих циклов, то, в некотором смысле, мы можем работать не с самими подстановками, а с их циклическими типами. Тогда $\Lambda$–композиция представлений равносильна некоторой операции сложения типов. В следующем параграфе мы формализуем это наблюдение.

## § 4. Разложение типов

Пусть $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_l)$ — некоторый циклический тип. *Подтипом* типа $\tau$ назовем всякую последовательность $\tau^0 = (\tau_1^0, \dots, \tau_l^0)$ той же длины, у которой $0 \le \tau_i^0 \le \tau_i$, $i = 1, \dots, l$. Ясно, что, удалив нулевые компоненты подтипа $\tau^0$, получим циклический тип некоторой подстановки из $S_{n^0}$, где $n^0 = \sum_{i=1}^{l} \tau_i^0$. Будем называть тип *четным,* если он является типом четной подстановки. Подтип будем называть *четным,* если удалив из него нулевые компоненты, получим четный тип.

На подтипах одинаковой длины можно ввести операцию сложения. Если $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_l)$ — подтип некоторой подстановки из $S_n$, а $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_l)$ — подтип подстановки из $S_{n_1}$, то их *суммой* назовем последовательность $\rho + \sigma = (\rho_1 + \sigma_1, \dots, \rho_l + \sigma_l)$ являющуюся, как легко заметить, подтипом некоторой подстановки из $S_{n+n_1}$.

В дальнейшем, допуская вольность речи, будем говорить: "тип (подтип) из $S_n$" , подразумевая, что данный тип (подтип) является циклическим типом (соответственно, подтипом) некоторой подстановки из $S_n$.

В типе $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_l)$ из $A_{km}$ выделим некоторую последовательность компонент: $(\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_n})$, $1 \leq n \leq l$. Будем говорить, что типу $\tau$ соответствует $k$–представление $P_\tau = A \cdot B$, если в разложении на независимые циклы $P_\tau = P_1 \dots P_l$ цикл $P_i$ имеет длину $\tau_i$ при всех $i = 1, \dots, l$ и, кроме того, выполнено следующее условие: при $n = 1$ множество $\mathrm{supp}(P_{i_n}^A, P_{i_n})$ не пусто, а при $n > 1$, для вся кого $j$, $j = 1, \dots, n-1$, множество $\mathrm{supp}(P_{i_j}^A, P_{i_{j+1}}) \neq \emptyset$. Аналогично определяется $k$–представление соответствующее типу $\tau$, если в $\tau$ выделена не одна, а несколько последовательностей компонент.

Пусть $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_l)$ – тип из $A_n$ при $n > k$, представленный в виде суммы подтипов $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_l)$ и $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_l)$ из $S_k$ и $S_{n-k}$ соответственно. Число компонент $\rho_i$ для которых справедливы неравенства $0 < \rho_i < \tau_i$ назовем *степенью разложения* $\tau$ относительно $\rho$ и $\sigma$, а сами компоненты $\rho_i$ и $\sigma_i$ для которых справедливы неравенства: $0 < \rho_i < \tau_i$ и $0 < \sigma_i < \tau_i$ назовем *склеиваемыми компонентами.* Тип $\tau$ будем называть *$k$–разложимым относительно* $\rho$ и $\sigma$, если для них выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) оба подтипа $\rho$ и $\sigma$ четны и степень разложения равна 0;

2) оба подтипа $\rho$ и $\sigma$ четны, степень разложения равна 2, либо $k$ нечетно и степень разложения равна 4;

3) $\rho$ – четный, а $\sigma$ – нечетный подтипы, степень разложения равна 1 и если $\rho_i$ и $\sigma_i$ — склеиваемые компоненты подтипов $\rho$ и $\sigma$ соответственно, то $\rho_i \geq 3$, $\sigma_i \geq 2$; либо, наоборот, — $\rho$ – нечетный, а $\sigma$ — четный подтипы, степень разложения равна 1 и склеиваемые компоненты удовлетворяют неравенствам $\rho_i \geq 2$, $\sigma_i \geq 3$.

В оставшихся пунктах предполагаются выполненными дополнительно условия: $k$ — нечетно и тип $\tau$ имеет четную длину.

4) оба подтипа $\rho$ и $\sigma$ нечетны, степень разложения равна 2 и если $\sigma_i$ и $\rho_j$ — склеиваемые компоненты, то $\sigma_i$ и $\rho_j \geq 2$;

5) $\rho$ — четный, а $\sigma$ – нечетный подтипы, степень разложения равна 1 и если $\rho_i$ — склеиваемая компонента, то $\tau_i$ четна, $\tau_i \geq 6$, $\tau_{i+1} = 2$, а $\rho_i = \tau_i - 1$, $\rho_{i+1} = 0$;

6) $\rho$ — четный, а $\sigma$ — нечетный подтипы, степень разложения равна 1 и если $\rho_i$ — склеиваемая компонента, то $\rho_i = 3$, $\tau_i = 4$ и, кроме того, подтип $\sigma$ содержит не менее двух компонент равных 2. Очевидно, что если некоторый тип подстановки $P \in A_n$ является $k$–разложимым, то и любой другой ее тип также является $k$– разложимым.

Теперь мы можем перейти непосредственно к доказательству теоремы.

**Доказательство**. Пусть $P$ – некоторая подстановка из $A_{km}$. Если $m = 1$, то из работы Бертрама [5] (см. § 2) следует, что $P$ является $k$–представимой. Поэтому мы можем считать, что $m > 1$. Предположим, что некоторый тип $\tau = \tau(P) = (\tau_1, \ldots, \tau_l)$ подстановки $P$ является $k$–разложимым. Покажем, что тогда, при некоторых дополнительных предположениях, подстановка $P$ является $k$–представимой. Так как $\tau$, по предположению, удовлетворяет одному из пунктов 1) – 6) определения $k$–разложимого типа, то разберем по порядку все эти случаи.

Пусть $\rho$ и $\sigma$ удовлетворяют условию 1), т. е. для некоторого номера $i$ (возможно после перестановки компонент имеем

$$\rho = (\tau_1, \ldots, \tau_i, \underbrace{0, \ldots, 0}_{l-i}), \quad \sigma = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i}, \tau_{i+1}, \ldots, \tau_l).$$

Удаляя нулевые компоненты, получим типы $\rho' = (\tau_1, \ldots, \tau_i)$, и $\sigma' = (\tau_{i+1}, \ldots, \tau_l)$. Им соответствуют подстановки $P_{\rho'}$ и $P_{\sigma'}$ из $A_k$ и $A_{k(m-1)}$ соответственно. По индуктивному предположению, эти подстановки $k$–представимы и мы будем считать, что они определены на непересекающихся множествах символов (в дальнейшем, говоря о $k$–представлениях подстановок $P_{\rho'}$ и $P_{\sigma'}$ будем иметь в виду именно такие представления). Из свойств $\Lambda$–композиции следует, что $e$–композиция $k$–представлений подстановок $P_{\rho'}$ и $P_{\sigma'}$ дает $k$–представление некоторой подстановки $P_\tau \in A_{km}$ у которой циклический тип тот же, что и у $P$. Следовательно, $P$ — $k$–представима.

Предположим, что выполнено условие 2) из определения $k$–разложимого типа, т. е.

$$\rho = (\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \rho_i, \rho_{i+1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{l-i-1}, \quad \sigma = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1} \sigma_i, \sigma_{i+1}, \tau_{i+2}, \ldots, \tau_l),$$

где $\rho_j + \sigma_j = \tau_j$, $\rho_j \neq 0$, $\sigma_j \neq 0$, $j = i, i+1$. Обозначим $\rho' = (\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \rho_i, \rho_{i+1})$, $\sigma' = (\sigma_i, \sigma_{i+1}, \tau_{i+2}, \ldots, \tau_l)$ — четные типы из $A_k$ и $A_{k(m-1)}$ соответственно. Выделим в первом из них пару $(\rho_i, \rho_{i+1})$, а во втором — пару $(\sigma_i, \sigma_{i+1})$. По индуктивному предположению, существуют $k$–представления $P_{\rho'} = A_1 \cdot B_1$ и $P_{\sigma'} = A_2 \cdot B_2$ подстановок $P_{\rho'}$ и $P_{\sigma'}$ циклические типы которых равны $\rho'$ и $\sigma'$ соответственно. Более того, ввиду свойства 2) конструкции Бертрама (см. § 1), можно считать, что $k$–представление $P_{\rho'} = A_1 \cdot B_1$ соответствует типу $\rho'$, т. е. некоторый символ $s \in \mathrm{supp}(X_i^{A_1}, X_{i+1})$, где $X_j$ — цикл длины $\rho_j$, $j = i, i+1$. Предположим, что и представление $P_{\sigma'} = A_2 \cdot B_2$ соответствует типу $\sigma'$, т. е. некоторый символ $r \in \mathrm{supp}(Y_i^{A_2}, Y_{i+1})$, где цикл $Y_j$ имеет длину $\sigma_j$, $j = i, i+1$. В результате $(sr)$–композиции этих $k$–представлений произойдет склеивание цикла $X_j$ с циклом $Y_j$ при $j = i, i+1$ и мы получим $k$–представление некоторой подстановки $P_\tau$, имеющей циклический тип $\tau$. Следовательно, и сама подстановка $P$ также является $k$–представимой.

Пусть теперь $\tau$ — $k$–разложима степени 4 относительно четных подтипов

$$\rho = (\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \rho_i, \ldots, \rho_{i+3}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{l-i-3}) \ \text{ и } \ \sigma = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, \sigma_i, \ldots, \sigma_{i+3}, \tau_{i+4}, \ldots, \tau_l),$$

из $A_k$ и $A_{k(m-1)}$ соответственно, у которых все компоненты $\rho_j$ и $\sigma_j$ отличны от нуля и $\rho_j + \sigma_j = \tau_j$ при $j = i, \ldots, i+3$. Тогда в типе $\rho' = (\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \rho_i, \ldots, \rho_{i+3})$ выделим пары $(\rho_i, \rho_{i+1})$,

$(\rho_{i+2}, \rho_{i+3})$. Опять ввиду свойства 2) конструкции Бертрама, существует соответствующее $k$–представление подстановки $P_{\rho'}$, т. е. такое $k$–представление $P_{\rho'} = A_1 \cdot B_1$ в котором

$$s_1 \in \operatorname{supp}(X_i^{A_1}, X_{i+1}), \quad \text{и} \quad s_2 \in \operatorname{supp}(X_{i+2}^{A_1}, X_{i+3}),$$

где $X_j$ — цикл длины $\rho_j$ при $j = i, \ldots, i+3$. Аналогично, в типе $\sigma' = (\sigma_i, \ldots, \sigma_{i+3}, \tau_{i+4}, \ldots, \tau_l)$, выделим пары $(\sigma_i, \sigma_{i+1})$, $(\sigma_{i+2}, \sigma_{i+3})$ и предположим, что для него существует соответствующее $k$–представление $P_{\sigma'} = A_2 \cdot B_2$ в котором $r_1 \in \operatorname{supp}(Y_i^{A_2}, Y_{i+1})$, $r_2 \in \operatorname{supp}(Y_{i+2}^{A_2}, Y_{i+3})$, где $Y_j$ — цикл длины $\sigma_j$ при $j = i, \ldots, i+3$. Вычислим $(s_1 r_1)(s_2 r_2)$–композицию этих представлений. Ввиду леммы 1, полученное $k$–представление является $k$–представлением подставновки $P_\tau$.

Предположим, что $\tau$ удовлетворяет условию 3), т. е.

$$\rho = (\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \rho_i, \underbrace{0, \ldots, 0}_{l-i})$$

— подтип из $A_k$ у которого $\rho_i \geq 3$;

$$\sigma = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, \sigma_i, \tau_{i+1}, \ldots, \tau_l)$$

— нечетный подтип из $S_{k(m-1)}$ у которого $\sigma_i \geq 2$ и сумма $\rho + \sigma$ равна $\tau$ (двойственный случай из пункта 3) разбирается аналогично). По этим подтипам построим четные типы $\rho' = (\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \rho_i)$ и $\sigma' = (1, \sigma_i - 1, \tau_{i+1}, \ldots, \tau_l)$. В типе $\rho'$ выделим компоненту $\rho_i$, а в типе $\sigma'$ — пару $(1, \sigma_i - 1)$. По свойству 1) представления Бертрама, существует $k$–представление $P_{\rho'} = A_1 \cdot B_1$ для которого найдется символ $s$ из $\operatorname{supp}(X_i^{A_1}, X_i)$, где $X_i$ — цикл длины $\rho_i$. Предположим, что для типа $\sigma'$ существует соответствующее $k$–представление, т. е. такое $k$–представление $P_{\sigma'} = A_2 \cdot B_2$ что некоторый символ $r$ лежит в $\operatorname{supp}(Y_{i-1}^{A_2}, Y_i)$, где $Y_{i-1}$ — цикл длины 1, а $Y_i 4$ — цикл длины $\sigma_i - 1$. Найдем $(sr)$–композицию этих $k$–представлений. В результате склеивания цикла $X_i$ длины $\rho_i$ с циклами $Y_{i-1}$ и $Y_i$ длины 1 и $\sigma_i - 1$ соответственно, получим $k$–представление подстановки $P_\tau$.

Допустим, что подтипы $\rho$ и $\sigma$ удовлетворяют условию 4) , т. е.

$$\rho = (\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \rho_i, \rho_{i+1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{l-i-1}), \quad \sigma = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, \sigma_i, \sigma_{i+1}, \tau_{i+2}, \ldots, \tau_l)$$

— нечетные подтипы из $S_k$ и $S_{k(m-1)}$ соответственно, у которых $\rho_{i+1}$ и $\sigma_i$ не менее 2, а $\rho_j + \sigma_j = \tau_j$, при $j = i, i+1$. Построим по ним четные типы $\rho' = (\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \rho_i, \rho_{i+1} - 1, 1)$, $\sigma' = (1, \sigma_i - 1, \sigma_{i+1}, \tau_{i+2}, \ldots, \tau_l)$ и выделим в первом тройку компонент $(\rho_i, \rho_{i+1} - 1, 1)$, а во втором — тройку $(1, \sigma_i - 1, \sigma_{i+1})$. Предположим, что для них существуют соответствующие $k$–представления $P_{\rho'} = A_1 \cdot B_1$, $P_{\sigma'} = A_2 \cdot B_2$. Иными словами, в первом представлении $s_1 \in \operatorname{supp}(X_i^{A_1}, X_{i+1})$, $s_2 \in \operatorname{supp}(X_{i+1}^{A_1}, X_{i+2})$, где цикл $X_i$ имеет длину $\rho_i$, цикл $X_{i+1}$ — $\rho_{i+1} - 1$, а $X_{i+2}$ — длину 1; во втором представлении: $r_1 \in \operatorname{supp}(Y_i^{A_2}, Y_{i+1})$, $r_2 \in \operatorname{supp}(Y_{i-1}^{A_2}, Y_i)$, где $Y_{i-1}$ имеет длину 1, $Y_i$ — длину $\sigma_{i-1}$ и $Y_{i+1}$ — длину $\sigma_{i+1}$. Покажем, что $(s_1 r_1)(s_2 r_2)$–композиция этих $k$–представлений дает $k$–представление некоторой подстановки $P_\tau$. Действительно, если к указанным представоениям применить $(s_1 r_1)$–композицию, то по лемме 1,

$$A_1 A_2 \cdot (B_1 B_2)^{(s_1 r_1)} = X_1 \ldots X_{i-1} X_{i+2} \cdot Z_1 Z_2 \cdot Y_{i-1} \cdot Y_{i+2} \ldots Y_l,$$

где цикл с индексом $j$ имеет длину $\tau_j$ при $j = 1, \ldots, i-1, i+2, \ldots, l$; $X_{i+1}$ и $Y_{i-1}$ имеют длину 1, а цикл $Z_j$ — длину $\rho_j + \sigma_j - 1$, при $j = i, i+1$. Причем, ввиду свойства $\Lambda$–композиции, справедливы включения:

$$s_2 \in \mathrm{supp}(Z_1^{A_1}, X_{i+2}), \quad r_2 \in \mathrm{supp}(Y_{i-1}^{A_1}, Z_2).$$

Далее, опять по лемме 1, в $k$–представлении $A_1A_2 \cdot (B_1B_2)^{(s_1r_1)(s_2r_2)}$ произойдет склеивание цикла $Z_1$ с циклом $Y_{i-1}$ и склеивание цикла $X_{i+2}$ с циклом $Z_2$. В результате получим циклы длины $\rho_i + \sigma_i = \tau_i$ и $\rho_{i+1} + \sigma_{i+1} = \tau_{i+1}$ соответственно. Так как остальные циклы не меняются, то полученное представление будет являться $k$–представлением некоторой подстановки $P_\tau$.

Пусть теперь $\rho$ и $\sigma$ удовлетворяют условию 5), т. е.

$$\rho = (\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \tau_i - 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{l-i}), \quad \sigma = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, \tau_{i+1}, \tau_{i+2}, \ldots, \tau_l)$$

— подтипы из $A_k$ и $S_{k(m-1)}$ соответственно, у которых компонента $\tau_i$ четна и не меньше 5, а $\tau_{i+2} = 2$. Построим по ним четные типы $\rho' = (\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \tau_i - 3, 1, 1)$, $\sigma' = (1, 1, 1, \tau_{i+2}, \ldots, \tau_l)$. Ввиду конструкции Бертрама, для $\rho'$ можно построить такое $k$–представление $P_{\rho'} = A_1 \cdot B_1$, в котором $r_j \in \mathrm{supp}(X_i^{A_1}, X_{i-j})$ при $j = 1, 2$, и цикл $X_i$ имеет длину $\tau_i - 3$, а цикл $X_{i+j}$ — длину 1, $j = 1, 2$. В типе $\sigma'$ выделим тройку $(1, 1, 1)$ и предположим, что для него существует соответствующее $k$–представление $P_{\sigma'} = A_2 \cdot B_2$, в котором $r_1 \in \mathrm{supp}(X_{i-1}^{A_2}, X_i)$, $r_2 \in \mathrm{supp}(X_i^{A_2}, X_{i-1})$, где циклы $X_j$, $j = i-1, i, i+1$ имеют длину 1. Вычислим $(s_1r_1)(s_2r_2)$–композицию этих представлений. Так же, как и в предыдущем случае, нетрудно проверить, что получим $k$–представление некоторой подстановки $P_\tau$ сопряженной с подстановкой $P$.

Если

$$\rho = (\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, 3, \underbrace{0, \ldots, 0}_{l-i}), \quad \sigma = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 2, 2, \tau_{i+3}, \ldots, \tau_l)$$

— подтипы из $A_k$ и $S_{k(m-1)}$ соответственно, для которых выполнено условие 6) определеня $k$–разложимого типа, то построим четные типы $\rho' = (\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, 1, 1, 1)$, и $\sigma' = (1, 1, 1, 2, \tau_{i+3}, \ldots, \tau_l)$. В типе $\rho'$ выделим тройку $(1, 1, 1)$. Из конструкции Бертрама, для $\rho'$ следует существование соответствующего $k$–представления $P_{\rho'} = A_1 \cdot B_1$, в котором $s_1 \in \mathrm{supp}(X_i^{A_1}, X_{i+1})$, $s_2 \in \mathrm{supp}(X_{i+1}^{A_1}, X_{i-2})$, где $X_j$, $j = i, i+1, i+2$, цикл длины 1. В типе $\sigma'$ выделим пары $(1, 1)$, $(2, 1)$ и предположим, что для него существует соответствующее $k$–представление $P_{\sigma'} = A_2 \cdot B_2$, в котором $r_1 \in \mathrm{supp}(Y_{i-1}^{A_2}, Y_i)$, $r_2 \in \mathrm{supp}(Y_{i+2}^{A_2}, Y_{i+1})$, где $X_j$, $j = i-1, i, i+1$, — цикл длины 1, а $Y_{i+2}$ — цикл длины 2. Вычислив $(s_1r_1)(s_2r_2)$ — композицию этих представлений, получим $k$–представление подстановки $P_\tau$.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы осталось доказать, что тип $\tau = \tau(P)$ подстановки $P \in A_{km}$, $m > 1$, является $k$–разложимым типом относительно некоторых $\rho$ и $\sigma$. Кроме того, для построенных типов $\rho'$ и $\sigma'$ надо доказать существование соответствующих $k$–представлений $P_{\rho'} = A_1 \cdot B_1$ и $P_{\sigma'} = A_2 \cdot B_2$. Так как $\rho'$ является типом из $A_k$, то существование соответствующего $k$–представления следует из параграфа 1 и нам остается доказать существование соответствующего $k$–представления для типа $\sigma$ из $A_{k(m--1)}$ при $m - 1 > 1$. Доказательству этих двух фактов посвящена остальная часть работы.

## § 5. Доказательство $k$–разложимости типов и существования соответствующих $k$–представлений

Рассмотрим тип $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_s)$ из $A_{km}$, $m > 1$. Пару компонент $(\xi_{2j-1}, \xi_{2j})$ назовем *граничной парой* типа $\xi$, если сумма компонент, предшествующих этой паре $\leq k$, а сумма $\sum_{i=1}^{2j} \xi_i$ больше $k$. Обозначим $\Delta_1 = \sum_{i=1}^{2j} \xi_i - k$, $\Delta_2 = \sum_{i=1}^{2j-2} \xi_i$. Очевидно, что $\Delta_1 + \Delta_2 = \xi_{2j-1} + \xi_{2j}$. Доказательство требуемых утверждений проведем в два этапа. Вначале разберем случай, когда $k$ четно, а затем – случай, когда $k$ нечетно.

**5.1. Случай четного** $k$. В этом случае очевидно, что $\xi$ имеет четную длину, а так как $\xi$ содержит четное число нечетных компонент, мы можем считать, что каждая пара $(\xi_{2i-1}, \xi_{2i})$, $i = 1, \ldots, s/2$ состоит из компонент одинаковой четности. Следовательно, оба значения $\Delta_1$ и $\Delta_2$ в этом случае являются четными. Справедливо следующее утверждение

**Лемма 2.** *Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_s)$ – некоторый тип из $A_{km}$, $k$ — четно и $\geq 4$, $m > 1$. Тогда $\xi$ — $k$–разложим. Кроме того, если в $\xi$ выделена некоторая нечетная компонента $\geq 3$ и при этом $\xi$ содержит единичную компоненту, либо в $\xi$ выделена пара компонент одинаковой четности, то для $\xi$ существует соответствующее $k$– представление.*

**Доказательство.** Не уменьшая общности можно считать, что компоненты типа $\xi$ упорядочены следующим образом: если $\xi$ содержит единственную выделенную компоненту, то ей является $\xi_1$, а $\xi_2 = 1$; если $\xi$ содержит пару выделенных компонент, то этой парой является $(\xi_1, \xi_2)$. Остальные компоненты упорядочены так, что последовательность $(\xi_3, \xi_4, \ldots, \xi_s)$ является начальным типом.

Пусть $(\xi_{2i-1}, \xi_{2i})$ — граничная пара типа $\xi$. Будем считать, что $\xi_{2i-1} \geq \xi_{2i}$. Если для $\xi$ значение $\Delta_2 = 0$, то относительно подтипов

$$\mu = (\xi_1, \ldots, \xi_{2i-2}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s-2i+2}) \quad \text{и} \quad \nu = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{2i-2}, \xi_{2i-1}, \xi_{2i}, \ldots, \xi_s)$$

тип $\xi$ является $k$–разложимым степени 0. Чтобы построить $k$–представление соответствующее типу $\xi$, выделим в $\mu$ те же компоненты, что были выделены в $\xi$. По индуктивному предположению, для типов $\mu' = (\xi_1, \ldots, \xi_{2i-2})$, $\nu' = (\xi_{2i-1}, \ldots, \xi_s)$ существуют соответствующие $k$–представления. Используя для них $e$–композицию (см. доказательство теоремы), получим $k$–представление соответствующее типу $\xi$. Если же $\Delta_2 \geq 2$ и при этом обе компоненты граничной пары $> 1$, то пару $(\xi_{2i-1}, \xi_{2i})$ представим в виде суммы $(\xi_{2i-1}, \xi_{2i}) = (\mu_{2i-1}, \mu_{2i}) + (\nu_{2i-1}, \nu_{2i})$, где

$$\mu_{2i-1} = \begin{cases} \xi_{2i-1} - \Delta_1/2 & \text{при } \ \xi_{2i-1} - \xi 2i < \Delta_2, \\ \Delta_2 - 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\mu_{2i} = \begin{cases} \xi_{2i} - \Delta_1/2 & \text{при } \ \xi_{2i-1} - \xi 2i < \Delta_2, \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$\nu_j = \xi_j - \mu_j$, $j = 2i-1, 2i$. Очевидно, что все построенные компоненты $\mu_j$ и $\nu_j$, $j = 2i - 1, 2i$ положительны, и каждая пара $(\mu_{2i-1}, \mu_{2i})$ и $(\nu_{2i-1}, \nu_{2i})$ состоит из компонент одинаковой четности, причем, $\mu_{2i-1} + \mu_{2i} = \Delta_2$, $\nu_{2i-1} + \nu_{2i} = \Delta_1$. Следовательно, относительно подтипов

$$\mu = (\xi_1, \ldots, \xi_{2i-2}, \mu_{2i-1}, \mu_{2i}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s-2}) \quad \text{и} \quad \nu = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{2i-2}, \nu_{2i-1}, \nu_{2i}, \xi_{2i+1}, \ldots, \xi_s)$$

тип $\xi$ является $k$–разложимым степени 2 (выполнено условие 2) из определения $k$–разложимого типа). Чтобы построить $k$–представление соответствующее типу $\xi$, выделим в $\mu' = (\xi_1, \ldots, \xi_{2i-2}, \mu_{2i-1}, \mu_{2i})$ пару $(\mu_{2i-1}, \mu_{2i})$ и компоненты выделенные в $\xi$, а в типе $\nu' = (\nu_{2i-1}, \nu_{2i}, \xi_{2i+1}, \ldots, \xi_s)$ — пару $(\nu_{2i-1}, \nu_{2i})$. Испльзуя конструкцию Бертрама (см. § 2), построим $k$–представление соответствующее типу $\mu'$. Для $\nu'$ соответствующее $k$–представление существует по предположению индукции. Применяя подходящую $\Lambda$–композицию к этим представлениям (см. доказательство теоремы), найдем $k$–представление соответствующее типу $\xi$.

Допустим теперь, что компонента $\xi_{2i}$ равна 1. Если при этом $\Delta_2 \geq 4$, то $\xi$ — $k$–разложим степени 1 относительно подтипов

$$\mu = (\xi_1, \ldots, \xi_{2i-2}, \Delta_2 - 1, \xi_{2i}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s-2}) \quad \text{и} \quad \nu = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{2i-2}, \xi_{2i-1} - \Delta_2 + 1, 0, \xi_{2i+1}, \ldots, \xi_s).$$

Так как $\Delta_2 - 1 \geq 3$ и $\xi_{2i-1} + \xi_{2i} - \Delta_2 = \Delta_1 \geq 2$, то $\mu$ и $\nu$ удовлетворяют условию 3) из определения $k$–разложимого типа. В типе $\mu' = (\xi_1, \ldots, \xi_{2i-2}, \Delta_2 - 1, \xi_{2i})$ выделим те же компоненты, что были выделены в $\xi$ и, кроме того, компоненту $\Delta_2 - 1 \geq 3$. Используя конструкцию Бертрама, построим $k$–представление, соответствующее типу $\mu'$. В типе $\nu' = (\Delta_1 - 1, 1, \xi_{2i+1}, \ldots, \xi_s)$ выделим пару $(\Delta_1 - 1, 1)$. Так как $\Delta_1 - 1$ нечетно то, по предположению индукции, для $\nu'$ существует соответствующее $k$–представление. Используя подходящую $\Lambda$–композицию, нетрудно построить $k$–представление соответствующее типу $\xi$. Если же $\Delta_2 = 2$, но при этом разность $\xi_{2i-1} - \Delta_2 \geq 3$, то для подтипов

$$\mu = (\xi_1, \ldots, \xi_{2i-2}, \Delta_2, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s-2i+1}) \quad \text{и} \quad \nu = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{2i-2}, \xi_{2i-1} - \Delta_2, \xi_{2i}, \ldots, \xi_s)$$

также выполнено условие 3) (учесть, что $\xi_{2i} = 1$). В типе $\mu' = (\xi_1, \ldots, \xi_{2i-2}, \Delta_2 - 1, 1)$ выделим компоненты выделенные в $\xi$ и пару $(\Delta_2 - 1, 1)$, а в типе $\nu' = (\xi_{2i-1} - \Delta_2, \xi_{2i}, \xi_{2i+1}, \ldots, \xi_s)$ выделим компоненту $\xi_{2i-1} - \Delta_2$. Так как в типе $\mu'$ пара $(\Delta_2 - 1, 1)$ не может быть первой парой, то ввиду результатов § 1 для него существует соответствующее $k$–представление. Для типа $\nu'$ соответствующее $k$–представление существует по предположению индукции (учесть, что $\xi_{2i-1} - \Delta_2$ нечетно и $\geq 3$, а $\xi_{2i} = 1$). Так же как и выше, по этим представлениям легко построить $k$–представление соответствующее типу $\xi$.

Пусть, наконец, $\xi_{2i-1} - \Delta_2 = 1$ и $\Delta_2 = 2$, т. е. граничная пара $(\xi_{2i-1}, \xi_{2i}) = (3, 1)$. Опять, легко заметить, что граничная пара не может быть первой парой типа $\xi$. Предположим, что среди компонент, стоящих правее граничной пары, либо найдется пара неединичных компонент одинаковой четности, либо найдутся две нечетные компоненты одна из которых $\geq 5$, а другая равна 1. Поменяв местами эти компоненты с компонентами граничной пары, получим некоторый тип $\tilde{\xi}$ той же подстановки, что и $\xi$, но для которого справедливость леммы уже установлена. Следовательно, для типа $\xi$ лемма также справедлива. Если же такой пары не существует, то пара $(\xi_{2i+1}, \xi_{2i+2})$, следующая за граничной парой, либо равна $(3, 1)$, либо – $(1, 1)$. Тогда тип $\xi$ является $k$–разложимым степени 0 относительно подтипов

$$\mu = (\xi_1, \ldots, \xi_{2i-2}, 0, \xi_{2i}, 0, \xi_{2i+2}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s-2i-2}) \quad \text{и} \quad \nu = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{2i-2}, \xi_{2i-1}, 0, \xi_{2i+1}, 0, \xi_{2i+3}, \xi_{2i+4}, \ldots, \xi_s).$$

По ним, так же как и выше, легко построить $k$–представление соответствующее типу $\xi$. Лемма доказана.

**5.2. Случай нечетного $k$.** Можем считать, что $k \geq 5$. Циклический подтип будем называть *инволютивным подтипом,* если все его компоненты не превосходят 2. Очевидно, что инволютивному подтипу из $S_n$ соответствует инволюция из $S_n$. Для инволюций из $A_{km}$ справедлива

**Лемма 3.** *Всякая инволюция $Q$ из $A_{km}$, $m > 1$, является $k$– представимой. Более того, если в инволютивном типе $\tau(Q)$ выделена пара $(1,1)$ или $(1,2)$ или же обе эти пары вместе, то для него существует соответствующее $k$–представление.*

**Доказательство.** Предположим вначале, что $Q \in A_{4k}$ и не содержит циклов длины 1. Тогда циклический тип $\xi = (\underbrace{2,2,\ldots,2}_{2k})$ подстановки $Q$ можно представить в виде суммы подтипов

$$\chi = (\underbrace{2,\ldots,2}_{k-1},1,1,\underbrace{0,\ldots,0}_{k-1}) \text{ и } \lambda = (\underbrace{0,\ldots,0}_{k-1},1,1,\underbrace{2,\ldots,2}_{k-1})$$

из $A_{2k}$. Удалив из них нулевые компоненты, получим инволютивные типы $\chi'$ и $\lambda'$. Выделим в $\lambda'$ пару единичных компонент и покажем, что для него существует соответствующее $k$–представление. Для этого найдем граничную пару типа $\lambda'$. Так как $k \geq 5$, то граничной будет пара $(2,2)$. Вычислим $\Delta_2$. Очевидно, что $\Delta_2 = 1$ или $\Delta_2 = 3$, причем, если $\Delta_2 = 1$, то граничной паре предшествует пара $(2,2)$; если же $\Delta_2 = 3$, то за граничной парой следует пара $(2,2)$.

Пусть, вначале, $\Delta_2 = 3$ (это равносильно тому, что $k \equiv 1(\mathrm{mod} 4)$). Тогда $\lambda'$ представим в виде суммы двух инволютивных подтипов

$$\mu = (1,1,\underbrace{2,\ldots,2}_{(k-5)/2},2,1,\underbrace{0,\ldots,0}_{(k-1)/2}) \text{ и } \nu = (\underbrace{0,\ldots,0}_{(k+1)/2},1,\underbrace{2,\ldots,2}_{(k-1)/2})$$

из $S_k$, причем, $\mu$ — нечетный, а $\nu 4$ — четный подтипы. По ним построим четные типы:

$$\mu' = (1,1,\underbrace{2,\ldots,2}_{(k-5)/2},1,1,1) \text{ и } \nu' = (1,1,3,\underbrace{2,\ldots,2}_{(k-5)/2}).$$

Выделим в $\mu'$ пару $(1,1)$ и тройку $(1,1,1)$. Ввиду результатов § 1, для $\mu'$ существует соответствующее $k$–представление $P_{\mu'} = C_1 \cdot D_1$, где $P_{\mu'} = (i_1)(i_2)(i_3)Q_1(i_4)(i_5)$, $C_1 = (i_1i_2i_3i_0\ldots i_4i_5i_6)$, $D_1 = (i_0i_3i_2i_1\ldots i_6i_5i_4)$, при $k \geq 7$ и $C_1 = (i_1i_2i_3i_4i_5)$, $D_1 = (i_3i_2i_1i_5i_4)$ при $k = 5$, $Q_1$ — произведение $(k-5)/2$ циклов длины 2. Для типа $\nu'$ можно построить $k$–представление $P_{\nu'} = C_2 \cdot D_2$ для которого $P_{\nu'} = (j_1)(j_3j_5j_6)(j_2)Q_2$, $C_2 = (j_1j_2j_3j_4\ldots j_6j_5)$, $D_2 = (j_4j_5j_3j_2j_1j_6\ldots)$, $Q_2$ — произведение $(k-5)/2$ циклов длины 2, причем, если $k = 5$, то $j_6 = j_4$. Найдем $(i_3j_1)(i_2j_3$–композицию этих представлений. Легко проверить, что полученное $k$–представление является $k$–представлением соответствующим типу $\lambda'$.

Пусть теперь $\Delta_2 = 1$ (это равносильно тому, что $k \equiv 3(\mathrm{mod} 4)$). Учитывая, что в типе $\lambda'$ перед компонентами граничной пары находится, по крайней мере, одна пара $(2,2)$, представим $\lambda'$ в виде суммы подтипов

$$\mu = (1,1,\underbrace{2,\ldots,2}_{(k-3)/2},1,\underbrace{0,\ldots,0}_{(k-1)/2}) \text{ и } \nu = (\underbrace{0,\ldots,0}_{(k+1)/2},1,\underbrace{2,\ldots,2}_{(k-1)/2}).$$

По ним построим четные типы

$$\mu' = (1, 1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{(k-7)/2}, 3, 1, 1) \text{ и } \nu' = (1, 1, 1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{(k-1)/2}),$$

и выделим в первом пару $(1, 1)$ и тройку $(1, 3, 1)$, а во втором — тройку $(1, 1, 1)$. Так как $\mu'$ и $\nu'$ — типы некоторых подстановок из $A_k$, то для них существуют соответствующие $k$–представления. По этим представлениям, так же как и выше, строится $k$–представление $P_{\lambda'} = A_2 \cdot B_2$ соответствующее типу $\lambda'$.

Аналогично, выделим в типе $\chi'$ пару $(1, 1)$ и построим $k$–представление $P_{\chi'} = A_1 \cdot B_1$ соответствующее типу $\chi'$, т. е. такое $k$–представление в котором $s \in \mathrm{supp}(X_k^{A_1}, X_{k+1})$, где циклы $X_j$, $j = k, k+1$ имеют длину 1. Если в построенном выше $k$–представлении $P_{\lambda'} = A_2 \cdot B_2$ символ $r \in \mathrm{supp}(Y_k^{A_2}, Y_{k+1})$, где циклы $Y_j$, $j = k, k+1$ — циклы длины 1, то рассмотрим $(sr)$–композицию этих представлений (считаем, что они определены на непересекающихся множествах символов). Легко проверить, что в результате получится $k$–представление $P_\xi = A \cdot B$ из которого уже нетрудно найти $k$–представление исходной подстановки $Q$.

Перейдем теперь к общему случаю. Пусть $Q$ — инволюция из $A_{km}$, $m > 1$. Учитывая уже разобранный случай, можем считать, что $Q$ содержит не более $2k-1$ циклов длины 2. Кроме того, если $Q$ содержит не менее $k$ циклов длины 1, то $\xi$ — $k$–разложим степени 0 и построение соответствующего $k$–представления тривиально. В оставшихся случаях $m$ может принимать лишь значения из множества $\{2, 3, 4\}$. Обозначим через $n_1$ число циклов длины 1, а через $n_2$ — число циклов длины 2, входящих в разложение $Q$ в произведение независимых циклов.

Пусть, вначале, $m = 2$. Если $n_1 = 2$, а $n_2 = k-1$, то, как было замечено выше, $Q$ является $k$–представимой. Поэтому мы можем считать, что $n_1 > 2$. Определим натуральные числа $l_i$, $m_i$, $i = 1, 2$ следующим образом

$$l_1 = \begin{cases} 3 & \text{при} k \equiv 3 (\mathrm{mod} 4), \\ 1 & \text{при} k \equiv 1 (\mathrm{mod} 4), \end{cases} \qquad l_2 = \begin{cases} (k-3)/2 & \text{при} k \equiv 3 (\mathrm{mod} 4), \\ (k-1)/2 & \text{при} k \equiv 1 (\mathrm{mod} 4), \end{cases}$$

$m_i = n_i - l_i$, $i = 1, 2$, и рассмотрим инволюции $Q_1$ и $Q_2$ из $A_k$, определенные на непересекающихся множествах символов, и такие, что $Q_1$ содержит $l_1$ циклов длины 1 и $l_2$ циклов длины 2, а $Q_2$ содержит $m_1$ циклов длины 1 и $m_2$ циклов длины 2. Для подстановок $Q_1$ и $Q_2$ утверждение леммы справедливо, т. е. для них существуют соответствующие $k$–представления. Вычислив их $e$–композицию, получим требуемое $k$–представление подстановки $Q$.

Пусть теперь $m = 3$ или $m = 4$. Тогда $n_2 \geq k+1$. Действительно, если $n_2 < k$, то $Q$ лежит в группе $A_n$, где $n = n_1 + 2n_2 < n_1 + 2k$, откуда $n_1 > n - 2k \geq k$, а, по предположению, число циклов длины 1, входящих в разложение $Q$, меньше $k$. Также $n_2$ не может быть равно $k$, так как $Q$ — четная подстановка. Следовательно, циклический тип

$$\xi = (\underbrace{1, \ldots,}_{n_1} \underbrace{2, \ldots, 2}_{n_2})$$

подстановки $Q$ можно представить в виде суммы подтипов

$$\chi = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n_1}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n_2-(k+1)}, 1, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}) \text{ и } \lambda = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n_1+n_2-(k+1)}, 1, 1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{k-1}),$$

где $\chi$ — подтип из $A_{2k}$, а $\lambda$ — подтип из $A_k$ или из $A_{2k}$. В обоих случаях, $\chi$ и $\lambda$ удовлетворяют условию 2) определения $k$–разложимого типа. Применяя подходящую $\Lambda$–композицию к $k$–представлениям соответствующим этим подтипам, получим требуемое представление. Лемма доказана.

**Лемма 4.** *Пусть $k$ – нечетно, $k \geq 5$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_s)$ — неинволютивный тип из $A_{km}$, $m > 1$. Тогда $\xi$ является $k$–разложимым типом.*

*Более того, если $\xi$ имеет нечетную длину и либо*

а) *содержит выделенную нечетную компоненту $\xi_i \geq 3$; либо*

б) *содержит выделенную пару $(\xi_i, \xi_j)$ в которой $\xi_i$ нечетно, а $\xi_j = 2$ или $\xi_i = 3$, а $\xi_j$ — произвольно; либо*

в) *содержит выделенную тройку компонент из которых первая равна 1, а две другие – одинаковой четности.*

*Или же $\xi$ имеет четную длину и при этом либо*

г) *выделена пара компонент одинаковой четности; либо*

д) *выделена нечетная компонента $\xi_i \geq 3$ и $\xi$ содержит единичные компоненты.*

*Тогда для $\xi$ существует соответствующее $k$–представление.*

**Доказательство.** Пусть, вначале, $\xi$ имеет нечетную длину. Не уменьшая общности, можно считать, что компоненты $\xi$ упорядочены следующим образом: вначале идут выделенные компоненты, причем, если в $\xi$ выделена пара компонент, то $(\xi_i, \xi_j) = (\xi_1, \xi_2)$, а $\xi_3$ является компонентой той же четности, что и $\xi_2$; если в $\xi$ выделена тройка компонент, то $\xi_1 = 1$, $\xi_2 \geq \xi_3$; остальные компоненты упорядочены так, что являются начальным типом некоторой подстановки. Очевидно, что при таком упорядочении каждая пара $(\xi_{2i}, \xi_{2i+1})$, $i = 1, 2, \dots, (s-1)/2$ состоит из компонент одинаковой четности.

Пусть, вначале, $\xi_1 \geq k + 2$.

Если при этом $\xi$ удовлетворяет условию а) леммы 4, то $\xi$ — $k$–разложим относительно подтипов
$$\mu = (k, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-1}) \quad \text{и} \quad \nu = (\xi_1 - k, \xi_2, \dots, \xi_s)$$
так как для них выполнено условие 3) определения $k$–разложимого типа. Чтобы построить $k$–представление соответствующее $\xi$, рассмотрим типы $\mu' = (k)$ и $\nu' = (\xi_1 - k - 1, 1, \xi_2, \dots, \xi_s)$. Для $\mu'$ существует $k$–представление $P_{\mu'} = A_1 \cdot B_1$ в котором $s \in \mathrm{supp}(X_1^{A_1}, X_1)$, где $X_1$ — цикл длины $k$. В типе $\nu'$ выделим пару $(\xi_1 - k - 1, 1)$. Тогда, по предположению индукции, для $\nu'$ существует соответствующее $k$–представление $P_{\nu'} = A_2 \cdot B_2$ в котором $r \in \mathrm{supp}(Y_0^{A_2}, Y_1)$, где $Y_0$ — цикл длины $\xi_1 - k - 1$, а $Y_1$ — цикл длины 1. Вычислив $(sr)$–композицию этих представлений, получим $k$–представление $P_\xi = A \cdot B$ некоторой подстановки $P_\xi = Z_1 \dots Z_s$ в котором $s \in \mathrm{supp}(Z_1^A, Z_1)$, где $Z_1$ — цикл длины $\xi_1$. Следовательно, построенное $k$–представление соответствует типу $\xi$.

Если $\xi$ удовлетворяет условию б) т. е. в $\xi$ выделена пара $(\xi_1, \xi_2)$, то $\xi_1$ нечетна, а $\xi_2 = 2$ (учесть, что, по предположению, $\xi_1 \geq k+2$. Так как $\xi_3$ четно, то $\xi$ можно представить в виде суммы подтипов

$$\mu=(k-3,2,1,\underbrace{0,\ldots,0}_{s-3}) \;\text{ и }\; \nu=(\xi_1-k+3,0,\xi_3-1,\xi_4,\ldots,\xi_s).$$

Для $\mu$ и $\nu$ выполнено условие 2) определения $k$–разложимого типа. Следовательно, $\xi$ — $k$–разложим степени 2. Выделим в $\mu'=(k-3,2,1)$ тройку $(1,k-3,2)$, а в $\nu'=(\xi_1-k+3,\xi_3-1,\xi_4,\ldots,\xi_s)$ пару $(\xi_3-1,\xi_1-k+3)$. Из результатов § 2 вытекает существование $k$–представления соответствующего типу $\mu'$, а из предположения индукции следует существование $k$–представления соответствующего типу $\nu'$. По этим представлениям, при помощи подходящей $\Lambda$–композиции, найдем $k$–представление соответствующее типу $\xi$.

Пусть теперь $\xi_1=k$. Если в $\xi$ выделена только компонента $\xi_1$, то $\xi$ — $k$–разложим степени 0 относительно подтипов

$$\mu=(k,\underbrace{0,\ldots,0}_{s-1}) \;\text{ и }\; \nu=(0,\xi_2,\ldots,\xi_s),$$

и построение требуемого $k$–представления тривиально. Если в $\xi$ выделена пара $(\xi_1,\xi_2)=(k,2)$, то $\xi$ — $k$–разложим степени 2 относительно подтипов

$$\mu=(k-3,2,1,\underbrace{0,\ldots,0}_{s-3}) \;\text{ и }\; \nu=(3,0,\xi_3-1,\xi_4,\ldots,\xi_s),$$

так как для них выполнено условие 2) определения $k$–разложимого типа. Построим по ним типы $\mu'=(k-3,2,1)$ и $\nu'=(3,\xi_3-1,\xi_4,\ldots,\xi_s)$ и выделим тройку $(1,k-3,2)$ и пару $(\xi_3-1,3)$ соответственно. Ввиду результатов § 2 и индуктивного предположения, для подстановок $P_{\mu'}=X_1X_2X_3$, где цикл $X_1$ имеет длину $k-3$, цикл $X_2$ — длину 2, цикл $X_3$ — длину 1; $P_{\nu'}=Y_2Y_3Y_4\ldots Y_s$, где цикл $Y_2$ имеет длину 3, цикл $Y_3$ — длину $\xi_3-1$, цикл $Y_j$ — длину $\xi_j$ при $j=4,\ldots,s$, существуют соответствующие $k$–представления $P_{\mu'}=A_1\cdot B_1$, $P_{\nu'}=A_2\cdot B_2$ для которых справедливы включения: $s_1\in\operatorname{supp}(X_3^{A_1},X_1)$, $s_2\in\operatorname{supp}(X_1^{A_1},X_2)$, $r_1\in\operatorname{supp}(Y_3^{A_2},Y_2)$. В результате $(s_1r_1)$–композиции этих представлений произойдет склеивание цикла $X_3$ с циклом $Y_3$ и склеивание $X_1$ с циклом $Y_2$. В результате получим $k$–представление подстановки $Z_1X_2Z_2Y_4\ldots Y_s=A\cdot B$, где $Z_1$ имеет длину $k$, а $Z_2$ — длину $\xi_3$. Так как в этом представлении $s_2\in\operatorname{supp}(Z_1^A,X_2)$, то это представление соответствует типу $\xi$ с выделенной парой $(k,2)$. Если же в $\xi$ была выделена пара $(2,k)$, то соответствующим $k$–представлением будет $P_\xi=B\cdot A^B$.

Допустим, что $\xi_1\le k-2$. Положим $k_1=k-\xi_1$. Ясно, что $k_1$ четно и отлично от нуля. Рассмотрим тип $\tilde\xi=(\xi_2,\xi_3,\ldots\xi_s)$, полученный из $\xi$ удалением первой компоненты. Тогда $\tilde\xi$ имеет четную длину и является типом из $A_n$, где $n=km-\xi_1>2k_1$. Если $k_1\ge 4$, то по лемме 2 тип $\tilde\xi$ — $k_1$–разложим относительно некоторых подтипов $\tilde\mu$ и $\tilde\nu$. Следовательно, тип $\xi$ — $k$–разложим относительно подтипов $\mu=(\xi_1,\tilde\mu)$ и $\nu=(0,\tilde\nu)$, причем, $\mu$ и $\nu$ удовлетворяют тому же условию из определения $k$–разложимого типа, что $\tilde\mu$ и $\tilde\nu$. Если $\xi$ — $k$–разложим степени 0 относительно $\mu$ и $\nu$, то построение $k$–представления соответствующего $\xi$ очевидно. Предположим поэтому, что степень разложения $\ge 1$. Так же как в доказательстве леммы 2, по подтипам $\mu$ и $\nu$ построим типы $\mu'$ и $\nu'$. Тогда имеет место один из следующих трех случаев:

1) $\mu'=(\xi_1,\ldots,\xi_{2i-1},\mu_{2i},\mu_{2i+1})$, $\nu'=(\nu_{2i},\nu_{2i+1},\xi_{2i+2},\ldots,\xi_s)$, $\mu_j+\nu_j=\xi_j$, $j=2i,2i+1$;

2) $\mu' = (\xi_1, \ldots, \xi_{2i-1}, \Delta_2 - 1, 1)$, $\nu' = (\Delta_1 - 1, 1, \xi_{2i+2}, \ldots, \xi_s)$, где $\Delta_1$ и $\Delta_2$ четны, $\Delta_2 \geq 4$, $\Delta_1 = \xi_{2i} + 1 - \Delta_2 \geq 2$;

3) $\mu' = (\xi_1, \ldots, \xi_{2i-1}, \Delta_2 - 1, 1)$, $\nu' = (\xi_{2i} - \Delta_2, 1, \xi_{2i+2}, \ldots, \xi_s)$, где $\Delta_2 = 2$, $\xi_{2i} - \Delta_2 \geq 3$.

Предположим, что реализуется случай 1) и выделим в типе $\mu'$ пару $(\mu_{2i}, \mu_{2i+1})$, состоящую из компонент одинаковой четности, а также компоненты выделенные в $\xi$, если $i > 1$. Если же $i = 1$, то в $\mu'$ выделим тройку $(\xi_1, \mu_{2i}, \mu_{2i+1})$. В обоих случаях, ввиду результатов § 2, для $\mu'$ существует соответствующее $k$–представление $P_{\mu'} = A_1 \cdot B_1$. В $\nu'$ выделим пару $(\nu_{2i}, \nu_{2i+1})$. Учитывая, что $\nu'$ имеет четную длину и компоненты выделенной пары одинаковой четности, по предположению индукции, заключаем, что для $\nu'$ существует соответствующее $k$–представление $P_{\nu'} = A_2 \cdot B_2$. При помощи подходящей $\Lambda$ –композиции, склеивая циклы длины $\mu_j$ с циклами длины $\nu_j$, получим $k$–представление соответствующее типу $\xi$.

Аналогично, для случая 2), выделим в $\mu'$ компоненты выделенные в $\xi$, если $i > 1$, и выделим тройку $(\xi_1, \Delta_2 - 1, 1)$ в противном случае. В $\nu'$ выделим пару $(\Delta_1 - 1, 1)$. Из тех же соображений, что и в случае 1), заключаем, что для $\mu'$ и $\nu'$ существуют соответствующие $k$–представления. Вычислим такую их $\Lambda$–композицию при которой происходит склеивание цикла длины $\Delta_2 - 1$ из первого представления с циклами длин $\Delta_1 - 1$ и 1 из второго представления. Получим искомое $k$–представление соответствующее типу $\xi$.

В случае 3) при $i > 1$, выделим в $\mu'$ компоненты выделенные в $\xi$ и пару компонент $(\Delta_2 - 1, 1)$, а при $i = 1$ заметим, что $\xi$ содержит либо единственную выделенную компоненту, либо выделенную пару $(\xi_1, \xi_2)$. Действительно, если бы $\xi$ содержала выделенную тройку, то $\xi_1 = 1$ и так как $i = 1$, то для типа $\xi$ граничной является первая пара и тогда $\Delta_2 = k - 1 \geq 4$, а в случае 3) $\Delta_2 = 1$. Поэтому при $i = 1$ выделим в $\mu'$ тройку $(\xi_1, \Delta_2 - 1, 1)$, а в типе $\nu'$ компоненту $\xi_{2i} - \Delta_2$. Так же, как и выше, существование соответствующего $k$–представления для $\mu'$ следует из результатов § 2, а для $\nu'$ — из индуктивного предположения (учесть, что $\nu'$ имеет четную длину, содержит единичную компоненту, а выделенная компонента нечетна и $\geq$ 3). Вычислив такую $\Lambda$–композицию этих представлений при которой происходит склеивание цикла длины $\xi_{2i} - \Delta_2$ из второго представления с циклами длины $\Delta_2 - 1$ и 1 из первого представления, получим $k$– представление соответствующее типу $\xi$.

До сих пор мы считали, что $k_1 = k - \xi_1 \geq 4$. Пусть теперь $k_1 = 2$. Тогда $\xi_1 = k - 2 \geq 3$, и, следовательно, тип $\xi$ содержит не более двух выделенных компонент. Предположим, что $\xi_2$ и $\xi_3 \geq 2$. Тогда тип $\xi$ — $k$–разложим относительно подтипов

$$\mu = (\xi_1, 1, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s-3}) \quad \text{и} \quad \nu = (0, \xi_2 - 1, \xi_3 - 1, \xi_4, \ldots, \xi_s),$$

так как для них выполнено условие 2) определения $k$–разложимого типа. В $\mu' = (\xi_1, 1, 1)$ выделим тройку $(\xi_1, 1, 1)$, а в $\nu' = (\xi_2 - 1, \xi_3 - 1, \xi_4, \ldots, \xi_s)$ — пару $(\xi_2 - 1, \xi_3 - 1)$ и найдем соответствующие $k$–представления, по которым, при помощи подходящей $\Lambda$–композиции, строится $k$–представление соответствующее типу $\xi$. Если же $\xi_2 = 1$, то рассмотрим тип $\tilde{\xi} = (\xi_2, \xi_1, \xi_3, \ldots, \xi_s)$, полученный из $\xi$ перестановкой первых двух компонент. Выделим в $\tilde{\xi}$ тройку $(\xi_2, \xi_1, \xi_3)$. Как было показано выше, тип $\tilde{\xi}$ — $k$–разложим и для него существует соответствующее $k$–представление $P_{\tilde{\xi}} = A \cdot B$. Следовательно, тип $\xi$ также $k$–разложим и либо представление $A \cdot B$, либо представление $B \cdot (B^{-1}AB)$ является $k$–представлением соответствующим типу $\xi$. Если же $\xi_2 \neq 1$, но $\xi_3 = 1$, то, переставив компоненты $\xi_1$ и $\xi_3$, получим тип $(\xi_3, \xi_2, \xi_1, \xi_4, \xi_5, \ldots, \xi_s)$ по которому требуемое $k$–представление строится так же, как и в предыдущем случае.

Таким образом, мы полностью разобрали случай когда $\xi$ имеет нечетную длину.

Предположим теперь, что $\xi$ имеет четную длину. Не уменьшая общности, можно считать, что выделенные компоненты (если они существуют) являются первыми компонентами типа $\xi$, т. е., если в $\xi$ выделена единственная нечетная компонента, то ей является $\xi_1$, а $\xi_2 = 1$; если в $\xi$ выделена пара компонент, то ей является пара $(\xi_1, \xi_2)$. Остальные компоненты упорядочены так, что образуют начальный тип некоторой подстановки. Очевидно, что при таком упорядочении, каждая пара $(\xi_{2j-1}, \xi_{2j})$, $j = 1, 2, \ldots, s/2$, состоит из компонент одинаковой четности. Для $\xi$ найдем граничную пару $(\xi_{2i-1}, \xi_{2i})$ и вычислим для нее $\Delta_1$ и $\Delta_2$. Число $\Delta_2 = k - \sum_{j=1}^{2i-2} \xi_j$ нечетно, а так как $\Delta_1 + \Delta_2 = \xi_{2i-1} + \xi_{2i}$ — четно, то и $\Delta_1$ — нечетно. В зависимости от значений $\Delta_1$ и $\Delta_2$ рассмотрим несколько случаев.

**Случай 1.** Оба значения $\Delta_1$ и $\Delta_2$ больше 1. Тогда их сумма $\Delta_1 + \Delta_2 = \xi_{2i-1} + \xi_{2i} \geq 6$. Мы можем считать, что $\xi_{2i-1} \geq \xi_{2i}$. Предположим, что граничная пара $(\xi_{2i-1}, \xi_{2i}) \neq (4, 2)$ и представим граничную пару в виде суммы $(\xi_{2i-1}, \xi_{2i}) = (\mu_{2i-1}, \mu_{2i}) + (\nu_{2i-1}, \nu_{2i})$, где

$$\nu_{2i-1} = \begin{cases} (\Delta_1 + x)/2 & \text{при} \quad \xi_{2i} \geqslant 3, \\ \Delta_1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\nu_{2i} = \begin{cases} (\Delta_1 - x)/2 & \text{при} \quad \xi_{2i} \geqslant 3, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$\mu_j = \xi_j - \nu_j$, $j = 2i-1, 2i$, а $x$ — минимальное нечетное число $\geq 1$, для которого справедливы неравенства: $\mu_{2i} \geq 2$, $\nu_{2i} \geq 1$. Положим

$$\mu = (\xi_1, \ldots, \xi_{2i-2}, \mu_{2i-1}, \mu_{2i}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s-2i}), \quad \nu = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{2i-2}, \nu_{2i-1}, \nu_{2i}, \xi_{2i+1}, \ldots, \xi_s).$$

Заметим, что при $\xi_{2i} \geq 3$ все компоненты $\mu_j$ и $\nu_j$ отличны от нуля и подтипы $\mu$ и $\nu$ удовлетворяют условию 4) определения $k$–разложимого типа. Следовательно, тип $\xi$ является $k$–разложимым. Чтобы построить $k$–представление соответствующее типу $\xi$, выделим в типе $\mu' = (\xi_1, \ldots, \xi_{2i-2}, \mu_{2i-1}, \mu_{2i}-1, 1)$ тройку компонент $(\mu_{2i-1}, \mu_{2i}-1, 1)$, а при $i > 1$, выделим компоненты выделенные в $\xi$. Для $\mu'$ существует соответствующее $k$–представление $P_{\mu'} = A_1 \cdot B_1$. В типе $\nu' = (1, \nu_{2i-1} - 1, \nu_{2i}, \xi_{2i+1}, \ldots, \xi_s)$ выделим тройку $(1, \nu_{2i-1} - 1, \nu_{2i})$. Так как $\nu'$ имеет нечетную длину и компоненты $\nu_{2i-1} - 1, \nu_{2i}$ одинаковой четности, то, по предположению индукции, для него существует соответствующее $k$–представление $P_{\nu'} = A_2 \cdot B_2$. При помощи $\Lambda$–композиции, построенной при доказательстве теоремы, легко построить $k$–представление соответствующее типу $\xi$.

Пусть теперь $\xi_{2i} \leq 2$, т. е. $(\nu_{2i-1}, \nu_{2i}) = (\Delta_1, 0)$. Если при этом $\mu_{2i-1} \geq 2$, то подтипы $\mu$ и $\nu$ удовлетворяют условию 3) определения $k$–разложимого типа. Следовательно, тип $\xi$ — $k$–разложим. В типе $\mu' = (\xi_1, \ldots, \xi_{2i-2}, 1, \xi_{2i-1} - \Delta_1 - 1, \xi_{2i})$ при $i > 1$ выделим компоненты выделенные в $\xi$ и, кроме того, пару $(1, \xi_{2i-1} - \Delta_1 - 1)$, а при $i = 1$ выделим тройку $(1, \xi_{2i-1} - \Delta_1 - 1, \xi_{2i})$. Так как $\mu'$ является типом из $A_k$, то в обоих случаях для него существует соответствующее $k$–представление. В типе $\nu' = (\Delta_1, \xi_{2i+1}, \ldots, \xi_s)$ выделим компоненту $\Delta_1$, которая нечетна и $\geq 3$. Так как длина $\nu'$ нечетна, то, по индуктивному предположению, для $\nu'$ существует соответствующее $k$–представление. Вычислим такую $\Lambda$–композицию этих представлений, чтобы цикл длины $\Delta_1$ из второго представления склеивался с циклами длины $\xi_{2i-1}-\Delta_1-1$ и 1 из первого представления. В результате получится $k$–представление соответствующее типу $\xi$. Если же $\mu_{2i-1}=1$, то компонента $\xi_{2i-1}=\mu_{2i-1}+\nu_{2i-1}=\Delta_1+1$ четна и, следовательно, $\xi_{2i}$ также четна и, как легко заметить, равна 2. Ясно, что в этом случае подтипы $\mu$ и $\nu$ удовлетворяют условию 5) (по предположению $(\xi_{2i-1},\xi_{2i})\neq(4,2)$). В типах $\mu'=(\xi_1,\ldots,\xi_{2i-2},\xi_{2i-1}-3,1,1)$ и $\nu'=(1,1,1,\xi_{2i+1},\ldots,\xi_s)$ выделим соответственно тройку $(1,\xi_{2i-1}-3,1)$ и $(1,1,1)$ соответственно. Если же $i>1$, то в $\mu'$ выделим еще и компоненты выделенные в $\xi$. Ясно, что для $\mu'$ и $\nu'$ существуют соответствующие $k$–представления, а значит — соответствующее $k$–представление существует и для $\xi$.

Разберем теперь случай, когда граничная пара равна $(4,2)$. Так как мы считаем, что $\Delta_1\geq3$ и $\Delta_2\geq3$, то в этом случае $\Delta_1=\Delta_2=3$. Следовательно, граничная пара не является ни первой, ни последней парой типа $\xi$ и поэтому ни одна из ее компонент не может быть выделенной в $\xi$. Рассмотрим компоненты следующие за граничной парой. Допустим, что среди них найдется пара компонент одинаковой четности, отличная от пары $(4,2)$, сумма компонент которой $\geq 6$. Поменяв местами эту пару с граничной парой, получим уже разобранный случай. Если же среди компонент, следующих за граничной парой, такой пары не существует, но существует компонента $\xi_j=4$, то поменяв ее с компонентой $\xi_{2i}=2$ граничной пары, опять получим разобранный случай. Таким образом, мы можем считать, что если среди компонент типа $\xi$, следующих за граничной парой, имеются нечетные, то только одна из них отлична от 1. Следовательно, некоторая $\xi_j$ при $j>2i$ равна 1 (учесть, что нечетных компонент, следующих за граничной парой, четное число). Поместим $\xi_j$ перед компонентами граничной пары. Полученный тип $k$–разложим степени 2 относительно подтипов

$$(\xi_1,\ldots,\xi_{2i-2},\xi_j,1,1,\underbrace{0,\ldots,0}_{s-(2i-1)}) \quad \text{и} \quad (\underbrace{0,\ldots,0}_{2i-1},\xi_{2i-1}-1,\xi_{2i}-1,\xi_{2i+1},\ldots,\xi_s),$$

которые, как легко заметить, удовлетворяют условию 2) определения $k$–разложимого типа. По этим подтипам построим типы $\mu'=(\xi_1,\ldots,\xi_{2i-2},\xi_j,1,1)$ и $\nu'=(\xi_{2i-1}-1,\xi_{2i}-1,\xi_{2i+1},\ldots,\xi_s)$, и выделим в $\mu'$ компоненты выделенные в $\xi$ и, кроме того, пару $(1,1)$, а в $\nu'$ — пару $(\xi_{2i-1}-1,\xi_{2i}-1)$. Очевидно, что для этих типов существуют соответствующие $k$–представления. Следовательно, соответствующее $k$–представление существует и для $\xi$. Пусть, наконец, все компоненты, следующие за граничной парой, равны 2. Тогда для подтипов

$$\mu=(\xi_1,\ldots,\xi_{2i-2},3,\underbrace{0,\ldots,0}_{s-2i+1}) \quad \text{и} \quad \nu=(\underbrace{0,\ldots,0}_{2i-2},1,\underbrace{2,\ldots,2}_{s-2i+1})$$

выполнено условие 6). Следовательно, относительно этих подтипов $\xi$ — $k$–разложим. Построим по ним типы

$$\mu'=(\xi_1,\ldots,\xi_{2i-2},1,1,1) \quad \text{и} \quad \nu'=(1,1,1,\underbrace{2,\ldots,2}_{s-2i})$$

и выделим в $\mu'$ пару $(\xi_1,\xi_2)$ или компоненту $\xi_1$ (в зависимости от того, какие компоненты были выделены в $\xi$) и, кроме того, тройку $(1,1,1)$, а во втором типе — пары $(1,1)$ и $(2,1)$. Тогда для $\mu'$ существование соответствующего $k$–представления следует из § 2, а для $\nu'$ — из леммы 3. Найдем $\Lambda$–композицию этих представлений, построенную в доказательстве теоремы, — получим $k$–представление соответствующее типу $\xi$. Таким образом, случай 1 полностью разобран.

**Случай 2.** Значение $\Delta_2$ равно 1. Ясно, что в этом случае граничная пара $(\xi_{2i-1}, \xi_{2i})$ не может быть первой парой типа $\xi$. Если среди компонент $\xi_{2i-1}$, $\xi_{2i}, \ldots, \xi_s$ найдется единичная, то переставив ее с компонентой $\xi_{2i-1}$, получим тип, являющийся $k$–разложимым степени 0. Следовательно тип $\xi$ также $k$–разложим и построение $k$–представления соответствующего типу $\xi$ очевидно. Поэтому, далее мы можем считать, что все компоненты граничной пары и следующие за ней отличны от 1.

Предположим, что среди компонент $\xi_{2i-1}$, $\xi_{2i}, \ldots, \xi_s$ найдется компонента $\geq 3$. Переставив ее с $\xi_{2i-1}$, будем считать, что $\xi_{2i-1} \geq 3$. Кроме того, предположим, что среди компонент предшествующих граничной паре, найдется пара $(\xi_{2j-1}, \xi_{2j})$ ближайшая к граничной паре и такая, что либо обе ее компоненты выделены, либо обе не выделены и одна из компонент $\geq 2$ (используя, если надо, перестановку компонент, будем считать, что $\xi_{2j} \geq 2$; либо в этой паре одна из компонент выделена и $\geq 4$, а вторая равна 1 (будем считать, что $\xi_{2j-1} = 1$, $\xi_{2j} \geq 4$). Используя, если надо, перестановку пар в типе $\xi$, будем считать, что $(\xi_{2j-1}, \xi_{2j}) = (\xi_{2i-3}, \xi_{2i-2})$, т. е. является парой предшествующей граничной. Тогда тип $\xi$ — $k$–разложим степени 2 относительно подтипов

$$\mu = (\xi_1, \ldots, \xi_{2i-3}, \xi_{2i-2} - 1, 2, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s-2i+1}) \quad \text{и} \quad \nu(\underbrace{0, \ldots, 0}_{2i-3}, 1, \xi_{2i-1} - 2, \xi_{2i}, \ldots, \xi_s)$$

для которых выполнено условие 2) определения $k$–разложимого типа. В типах $\mu' = (\xi_1, \ldots, \xi_{2i-3}, \xi_{2i-2} - 1, 2)$, $\nu' = (1, \xi_{2i-1} - 2, \xi_{2i}, \ldots, \xi_s)$ выделим соответственно пары компонент $(\xi_{2i-2} - 1, 2)$ и $(1, \xi_{2i-1} - 2)$, а в $\mu'$ еще и компоненты выделенные в $\xi$, если пара $(\xi_{2j-1}, \xi_{2j})$ не была выделенной. Если же пара $(\xi_{2j-1}, \xi_{2j})$ была выделена в $\xi$, то в $\mu'$ выделим тройку $(\xi_{2i-3}, \xi_{2i-2} - 1, 2)$. Для типа $\mu'$ существование соответствующего $k$–представления следует из § 2. Для типа $\nu'$ из индуктивного предположения следует существование соответствующего $k$–представления даже в том случае, если в $\nu'$ выделена тройка $(1, \xi_{2i-1} - 2, \xi_{2i})$, тем более соответствующее $k$–представление существует в нашем случае. По построенным $k$–представлениям для $\mu'$ и $\nu'$ уже легко построить $k$–представление соответствующее типу $\xi$.

Допустим теперь, что среди компонент, предшествующих граничной паре, лишь пара $(\xi_1, \xi_2) = (3, 1)$ содержит неединичную компоненту и при этом $\xi_1$ — единственная выделенная компонента типа $\xi$. Поместим компоненту $\xi_2 = 1$ на последнее место в $\xi$. Получим тип $\tilde{\xi} = (3, \xi_3, \ldots, \xi_s, \xi_2)$, который $k$–разложим степени 2 относительно подтипов

$$(3, \xi_3, \xi_4, \ldots, \xi_{2i-2}, 1, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s-2i+1}) \quad \text{и} \quad (\underbrace{0, \ldots, 0}_{2i-3}, \xi_{2i-1} - 1, \xi_{2i} - 1, \xi_{2i+1}, \ldots, \xi_s, \xi_2),$$

для которых выполнено условие 2) определения $k$–разложимого типа. Следовательно, тип $\xi$ также $k$–разложим. В типах $\mu' = (3, \xi_3, \xi_4, \ldots, \xi_{2i-2}, 1, 1)$, $\nu' = (\xi_{2i-1} - 1, \xi_{2i} - 1, \xi_{2i+1}, \ldots, \xi_s, \xi_2)$ выделим соответственно пару $(1, 1)$ и тройку $(\xi_2, \xi_{2i-1} - 1, \xi_{2i} - 1)$. Так как для них существуют соответствующие $k$–представления, то соответствующее $k$–представление существует и для $\xi$.

Пусть теперь все компоненты $\xi_{2i-1}, \xi_{2i}, \ldots, \xi_s$ равны 2. Очевидно, что тогда за граничной парой следует пара $(2, 2)$. Учитывая, что $\xi$ — неинволютивный тип, найдем пару $(\xi_{2j-1}, \xi_{2j})$, предшествующую граничной, у которой хотя бы одна из компонент $\geq 3$. Не уменьшая общности, будем считать, что этой парой является $(\xi_{2i-3}, \xi_{2i-2})$, т. е. пара предшествующая граничной, и у нее $\xi_{2i-2} \geq 3$. Если компонента $\xi_{2i-2}$ не является единственной выделенной компонентой типа $\xi$, или же $\xi_{2i-2} \geq 5$, то $\xi$ — $k$–разложим степени 4 относительно подтипов

$$\mu = (\xi_1, \ldots, \xi_{2i-3}, \xi_{2i-2} - 2, 1, 1, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s-2i-1}) \quad \text{и} \quad \nu = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{2i-3}, 2, 1, 1, 1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{s-2i-1}).$$

Если в $\xi$ пара $(\xi_{2i-3}, \xi_{2i-2})$ не была выделенной, то в $\mu'$ выделим те же компоненты, что были выделены в $\xi$ и, кроме того, выделим пару $(\xi_{2i-2} - 2, 1)$ и пару $(1, 1)$. Если же в $\xi$ пара $(\xi_{2i-3}, \xi_{2i-2})$ была выделена, то в $\mu'$ выделим тройку $(\xi_{2i-3}, \xi_{2i-2} - 2, 1)$ и пару $(1, 1)$. Из результатов § 2 следует существование $k$–представления соответствующего типу $\mu'$. В типе $\nu' = (2, 1, 1, 1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{s-2i-1}$ выделим пары $(2, 1)$, $(1, 1)$. Ввиду леммы 3 для него существует соответствующее $k$–представление. Используя подходящую $\Lambda$–композицию, по этим представлениям построим $k$–представление соответствующее типу $\xi$. Если же в паре $(\xi_{2i-3}, \xi_{2i-2})$ компонента $\xi_{2i-2}$ равна 3 и является единственной выделенной компонентой типа $\xi$, то $\xi_{2i-3} = 1$ и перенося $\xi_{2i-3}$ на последнее место в типе $\xi$, получим уже разобранный случай.

Нам осталось разобрать

**Случай 3.** Значение $\Delta_1 = 1$. Если при этом и $\Delta_2 = 1$, то обе компоненты граничной пары равны 1 и, следовательно, $\xi$ — $k$–разложим степени 0 относительно подтипов

$$\mu = (\xi_1, \ldots, \xi_{2i-2}, \xi_{2i-1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s-2i+1}) \quad \text{и} \quad \nu = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{2i-1}, \xi_{2i}, \xi_{2i+1}, \ldots, \xi_s).$$

Учитывая, что граничная пара, в нашем случае, не может быть первой парой типа $\xi$ и поэтому не содержит выделенных компонент, легко построить $k$–представление соответствующее типу $\xi$.

Поэтому, ввиду того, что $\Delta_2$ нечетно, мы можем считать, что $\Delta_2 \geq 3$ и сумма компонент граничной пары $\geq 4$.

Допустим, что компонента $\xi_{2i} = 1$ и, при этом, граничная пара не является выделенной парой типа $\xi$. Тогда, как и в предыдущем случае, $\xi$ — $k$–разложим степени 0 относительно

$$\mu = (\xi_1, \ldots, \xi_{2i-1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s-2i+1}) \quad \text{и} \quad \nu = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{2i-1}, \xi_{2i}, \xi_{2i+1}, \ldots, \xi_s)$$

и построение $k$–представления соответствующего типу $\xi$ очевидно. Если же граничная пара типа $\xi$ выделена, то она является первой парой и равна $(k, 1)$. Предположим, что $\xi_3$ четна. Тогда для подтипов

$$\mu = (k-2, 1, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s-3}) \quad \text{и} \quad \nu = (2, 0, \xi_3 - 1, \xi_4, \ldots, \xi_s)$$

выполнено условие 2) определения $k$–разложимого типа. Следовательно, $\xi$ — $k$–разложим. Выделим в типе $\mu' = (k-2, 1, 1)$ тройку $(1, k-2, 1)$, а в типе $\nu' = (\xi_3 - 1, 2, \xi_4, \ldots, \xi_s)$ пару $(\xi_3 - 1, 2)$. Для $\mu'$ существование соответствующего $k$–представления следует из § 1, а для $\nu'$ из предположения индукции (учесть, что $\nu'$ имеет нечетную длину и $\xi_3 - 1$ нечетно). Подходящая $\Lambda$–композиция дает требуемое $k$– представление. Предположим теперь, что $\xi_3$ нечетно и $\geq 3$. Тогда тип $\xi$ — $k$–разложим степени 2 относительно

$$\mu = (k-3, 1, 2, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s-3}) \quad \text{и} \quad \nu = (3, 0, \xi_3 - 2, \xi_4, \ldots, \xi_s),$$

так как для них опять выполнено условие 2). В типе $\mu' = (k-3,1,2)$ выделим тройку $(2,k-3,1)$ и найдем соответствующее $k$–представление. В типе $\nu' = (3,\xi_3-2,\xi_4,\dots,\xi_s)$ выделим пару $(3,\xi_3-2)$. Из тех же соображений, что и выше, заключаем, что для $\nu'$ существует соответствующее $k$–представление $P_{\nu'} = A_2 \cdot B_2$. Рассмотрим $k$–представление $P_{\nu'} = B_2 \cdot (B_2^{-1}A_2B_2)$ являющееся $k$–представлением соответствующим типу $\nu'$ в котором выделена пара $(\xi_3-2,3)$. Подходящая $\Lambda$– композиция этого представления с $k$–представлением соответствующим типу $\mu'$ дает $k$–представление соответствующее типу $\xi$. Пусть, наконец, $\xi_3 = 1$ и пара $(\xi_1,\xi_2) = (k,1)$ по–прежнему является выделенной парой типа $\xi$. Тогда для

$$\mu = (k-2,1,1,\underbrace{0,\dots,0}_{s-3}) \quad \text{и} \quad \nu = (2,0,0,\xi_4,\xi_5,\dots,\xi_s)$$

выполнено условие 3) определения $k$–разложимого типа. Построим по ним типы $\mu' = (k-2,1,1)$ и $\nu' = (1,1,\xi_4,\dots,\xi_s)$ и выделим пару $(k-2,1)$ и пару $(1,1)$ соответственно. Для этих типов существуют соответствующие $k$–представления. Для типа $\mu'$ это следует из § 2, а для типа $\nu'$ — из предположения индукции (учесть, что если в $\nu'$ выделена тройка $(1,1,\xi_j)$, где $\xi_j$ нечетно и для $\nu'$ существует соответствующее $k$–представление, то тем более, для $\nu'$ существует соответствующее $k$–представление если в нем выделена пара $(1,1)$. Следовательно, соответствующее $k$–представление существует и для $\xi$.

Таким образом, мы можем считать, что обе компоненты граничной пары отличны от 1. Предположим, что некоторая компонента $\xi_j$, следующая за граничной парой, равна 1. Тогда для подтипов

$$\mu = (\xi_1,\dots,\xi_{2i-2},\xi_{2i-1}-1,\xi_{2i}-1,\underbrace{0,\dots,0,\xi_j,0,\dots,0}_{s-2i})$$

и

$$\nu = (\underbrace{0,\dots,0}_{s-2i},1,1,\xi_{2i+1},\dots,\xi_{j-1},0,\xi_{j+1},\dots,\xi_s)$$

выполнено условие 2) определения $k$–разложимого типа. В типах $\mu'$ и $\nu'$, полученных из $\mu$ и $\nu$ удалением нулевых компонент, выделим соответственно пары $(\xi_{2i-1}-1,\xi_{2i}-1)$ и $(1,1)$, а в $\mu'$ еще и компоненты выделенные в $\xi$. Так как для них существуют соответствующие $k$–представления, то требуемое представление существует и для $\xi$.

Предположим теперь, что все компоненты $\xi_{2i-1},\dots,\xi_s$ отличны от 1, а $\xi_{2i-1} \geq 3$. Тогда граничная пара не может содержать одну выделенную компоненту типа $\xi$. Так как для подтипов

$$\mu = (\xi_1,\dots,\xi_{2i-1}-2,\xi_{2i},1,\underbrace{0,\dots,0}_{s-2i-1}) \quad \text{и} \quad \nu = (\underbrace{0,\dots,0}_{2i-2},2,0,\xi_{2i+1}-1,\xi_{2i+2},\dots,\xi_s)$$

выполнено условие 2) определения $k$–разложимого типа, то относительно этих подтипов тип $\xi$ — $k$–разложим. Выделим в $\mu' = (\xi_1,\dots,\xi_{2i-2},\xi_{2i-1}-2,\xi_{2i},1)$ при $i > 1$ компоненты выделенные в $\xi$ и пару компонент $(1,\xi_{2i-1}-2)$, а при $i = 1$, – тройку $(1,\xi_{2i-1}-2,\xi_{2i})$. Так как тип $\nu' = (2,\xi_{2i+1}-1,\xi_{2i+2},\dots,\xi_s)$ является четным и имеет нечетную длину, то он содержит нечетные компоненты. Будем считать, что компонента $\xi_{2i+1}-1$ нечетна. Выделим в $\nu'$ пару $(\xi_{2i+1}-1,2)$. Так как для $\mu'$ и $\nu'$ существуют соответствующие $k$–представления, то соответствующее $k$–представление существует и для $\xi$. Пусть теперь обе компоненты граничной пары равны 2. Если среди компонент предшествующих граничной паре, найдется некоторая пара $(\xi_{2j-1}, \xi_{2j})$ у которой $\xi_{2j-1} \geq 3$, то поменяв ее с граничной парой, получим уже разобранный случай. Поэтому мы можем считать, что все компоненты, предшествующие граничной паре, не превосходят 2. Если при этом среди компонент, следующих за граничной парой, найдется пара $(\xi_{2j-1}, \xi_{2j})$, сумма компонент которой $\geq 6$, то переставив эту пару с граничной парой, получим некоторый тип $\tilde{\xi}$ для которого значение $\Delta_1 \geq 3$, а этот случай уже был разобран ранее. Если же все компоненты $\xi_{2i-1}$, $\xi_{2i}$, $\ldots$, $\xi_s$ равна 2, то $\xi$ является инволютивным типом, что противоречит предположению леммы 4, а потому этот случай невозможен. Таким образом, доказательство леммы 4, а вместе с ним и доказательство теоремы закончено.

# Список литературы


[1] Moran G. Reflection classes whose cubes cover the alternating group, J. Comb. Theory, A21, № 1 (1976), 1–19.

[2] Baginski C. On sets of elements of the same order in the alternating group $A_n$, Publ. Math., 34, № 3–4 (1987), 313–315.

[3] Brenner J. L. and Evans R. J. Even permutations as a product of two elements of order five, J. Comb. Theory, A45, № 2 (1987), 196–206.

[4] Brenner J. L. and Riddell J. Covering theorems for finite nonabelian simple groups VII, Asymptotics in the alternating groups, Ars. Combin., 1 (1976), 77–108.

[5] Bertram E. Even permutations as a product of two conjugate cycles, J. Comb. Theory, A12, (1972), 368–380.

[6] Brenner J. L. and Riddell J. Noncanonical factorization of a permutation, Amer. Math. Monthly, 84 (1977), 39–40.

[7] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп, 3–е изд., М., Наука, 1982.