УДК 517. 95

В. Г. Бардаков

О классификации по старшей части дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными [1]

Математическая физика традиционно изучает дифференциальные уравнения второго порядка. В классе квазилинейных (т. е. линейных относительно всех старших производных) уравнений второго порядка решается проблема классификации, т. е. в каждой точке, в которой определено данное уравнение, определяется его тип, а также указывается невырожденная замена переменных, приводящая в этой точке уравнение к некоторому каноническому виду. Более того, если уравнение содержит только две независимые переменные, то можно так выбрать замену переменных, что уравнение приведётся к каноническому виду в некоторой окрестности.

Совершенно естественно изучать далее дифференциальные уравнения более высокого порядка. Первая проблема возникающая здесь — проблема классификации. Двигаясь в этом направлении, Т. Д. Джураев и Я. Попёлек [2] нашли классификацию квазилинейных дифференциальных уравнений третьего порядка с двумя независимыми переменными, а также указали замены, приводящие эти уравнения к каноническому виду. Их подход базировался на свойствах алгебраических уравнений третьего порядка.

В предлагаемой работе исследуются квазилинейные дифференциальные уравнения порядка n ($n \geq 1$) с двумя независимыми переменными и даётся их классификация по старшей части в каждой точке, где определены все коэффициенты уравнения. Кроме того, указываются замены, позволяющие привести исходное уравнение к более простому виду в окрестности этой точки.

Автор благодарит М. В. Нещадима, прочитавшего рукопись и внёсшего ряд полезных предложений.

§ 1. Замена независимых переменных в дифференциальном уравнении

Рассмотрим дифференциальное уравнение n–го порядка с двумя независимыми переменными линейное относительно старших производных

$$a_0\frac{\partial^n u}{\partial x^n} + a_1\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\partial y} + \ldots + a_n\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = F, \tag{1}$$

где $a_i = a_i(x, y)$, $i = 0, 1, \ldots n$, — непрерывные вещественные функции, F — функция, зависящая от x, y, u, а также от производных искомой функции u, порядки которых меньше n.

Применяя невырожденное преобразование $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ независимых переменных, получим новое уравнение, эквивалентное исходному

$$\overline{a}_0\frac{\partial^n u}{\partial \xi^n} + \overline{a}_1\frac{\partial^n u}{\partial \xi^{n-1}\partial \eta} + \ldots + \overline{a}_n\frac{\partial^n u}{\partial \eta^n} = \overline{F}, \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №96–01–01558).

где $\overline{a}_i = \overline{a}_i(\xi, \eta)$, $i = 0, 1, \dots n$, — коэффициенты, зависящие от новых переменных ξ и η, а $\overline{F}$ — новое выражение правой части, зависящее от ξ и η.

Чтобы выписать выражения коэффициентов $\overline{a}_i$ через старые коэффициенты a_j, введём следующие обозначения

$$u_{\xi}^{(i)} = \frac{\partial^i u}{\partial \xi^i}, \quad u_{\eta}^{(i)} = \frac{\partial^i u}{\partial \eta^i}, \quad u_{\xi\eta}^{(i,j)} = \frac{\partial^{i+j} u}{\partial \xi^i \partial \eta^j}, \qquad i, j = 0, 1, \dots$$

Тогда n–е производные функции u по переменным x, y будут выражаться через n–е производные по переменным ξ, η следующим образом

$$u_x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u_{\xi\eta}^{(n-i,i)} \xi_x^{n-i} \eta_x^i + \dots,$$

$$u_{xy}^{(n-j,j)} = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{j} C_j^k C_{n-j}^{i+k-j} \xi_x^{n-i-k} \xi_y^k \eta_x^{i+k-j} \eta_y^{j-k} \right) u_{\xi\eta}^{(n-i,i)} + \dots, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

$$u_y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u_{\xi\eta}^{(n-i,i)} \eta_y^{n-i} \xi_y^i + \dots,$$

где $\xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\xi_y = \frac{\partial \xi}{\partial y}$, $\eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial x}$, $\eta_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}$, многоточием обозначены слагаемые, содержащие производные порядков меньших n, а коэффициенты C_l^m определяются формулой

$$C_l^m = \begin{cases} \frac{l!}{(m-l)!m!} & \text{при целых} \quad l \geq m \geq 0, \\ \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Подставив полученные выражения в уравнение (1), найдём выражения для новых коэффициентов:

$$\overline{a}_0(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^{n} a_j \xi_x^{n-j} \xi_y^j,$$

$$\overline{a}_i(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{k=0}^{j} C_j^k C_{n-j}^{i+k-j} \xi_x^{n-i-k} \xi_y^k \eta_x^{i+k-j} \eta_y^{j-k} \right), \qquad i = 1, \dots, n-1, \tag{3}$$

$$\overline{a}_n(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^{n} a_j \eta_x^{n-j} \eta_y^j.$$

В дальнейшем нам потребуются формулы, выражающие коэффициент $\overline{a}_i$ через $\overline{a}_{i-1}$, а также формулы, выражающие $\overline{a}_i$ через $\overline{a}_{i+1}$. Справедлива следующая лемма, доказательство которой сводится к непосредственной проверке.

Лемма 1. *Пусть $\overline{a}_i = \overline{a}_i(\xi, \eta)$ — коэффициенты уравнения* (2), *заданные формулами* (3). *Тогда справедливы следующие равенства*:

$$\overline{a}_{i+1} = \frac{1}{i+1} \left[\frac{\partial \overline{a}_i}{\partial \xi_x} \eta_x + \frac{\partial \overline{a}_i}{\partial \xi_y} \eta_y \right], \quad \overline{a}_{n-i-1} = \frac{1}{i+1} \left[\frac{\partial \overline{a}_{n-i}}{\partial \eta_x} \xi_x + \frac{\partial \overline{a}_{n-i}}{\partial \eta_y} \xi_y \right], \quad i = 0, \dots, n-1.$$

В дальнейшем, без ограничения общности, будем считать, что $a_0 \not\equiv 0$. Действительно, если $a_0 \equiv 0$, но $a_n \not\equiv 0$, то перестановка независимых переменных приводит к желаемому случаю. Если одновременно $a_0 \equiv 0$ и $a_n \equiv 0$, то выполним замену $\xi = Cx + y$, $\eta = Dx + y$, где константы C и D выберем следующим образом. Ввиду формул (3), коэффициент $\overline{a}_0$ имеет вид

$$\overline{a}_0 = a_1 C^{n-1} + a_2 C^{n-2} + \ldots + a_{n-1} C.$$

Так как все коэффициенты $a_i,\ i = 1, \ldots, n-1$ не равны одновременно нулю, то легко подобрать такое значение C, при котором $\overline{a}_0 \not\equiv 0$. Далее, якобиан этой замены равен

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = C - D.$$

В качестве D возьмём такое значение, при котором $J \neq 0$.

Следующая лемма доказывается также, как аналогичное утверждение для уравнений второго порядка (см., например, [1, с. 13]).

Лемма 2. *Функция $z = \phi(x, y)$ является решением уравнения*

$$a_0 z_x^n + a_1 z_x^{n-1} z_y + \ldots + a_{n-1} z_x z_y^{n-1} + a_n z_y^n = 0 \tag{4}$$

тогда и только тогда, когда соотношение $\phi(x, y) = \mathrm{const}$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_0 (\mathrm{d}y)^n - a_1 (\mathrm{d}y)^{n-1} \mathrm{d}x + \ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1} (\mathrm{d}y)(\mathrm{d}x)^{n-1} + (-1)^n a_n (\mathrm{d}x)^n = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) называется *характеристическим* для уравнения (1).

Сопоставим исходному уравнению (1) многочлен

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1} \lambda + (-1)^n a_n, \quad \lambda = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}. \tag{6}$$

В каждой фиксированной точке $P = (x, y)$, в которой определены все коэффициенты $a_i,\ \ i = 0, \ldots, n$, он превращается в многочлен от одной переменной с постоянными коэффициентами. По основной теореме алгебры, $f(\lambda)$ имеет n корней в поле комплексных чисел. Пусть среди этих корней имеется r различных вещественных корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ кратностей $n_1, \ldots, n_r$, соответственно, и s различных пар комплексно–сопряжённых корней $(\beta_1, \beta_1^*), \ldots, (\beta_s, \beta_s^*)$ кратностей $m_1, \ldots, m_s$, соответственно, где $*$ означает взятие комплексно–сопряжённого. Очевидно, что сумма $n_1 + \ldots + n_r + 2(m_1 + \ldots + m_s)$ равна n. *Сигнатурой* уравнения (1) в точке P назовём последовательность натуральных чисел

$$\sigma(P) = (n_1, \ldots, n_r | m_1, \ldots, m_s), \tag{7}$$

где $n_1 \geq \ldots \geq n_r \geq 0$, $m_1 \geq \ldots \geq m_s \geq 0$.

При замене переменных в уравнении (1), мы получим новое уравнение (2), характеристическое уравнение которого отлично от исходного. Покажем, что сигнатура уравнения при этом не изменится. Действительно, многочлен $f(\lambda)$ в точке P можно представить в виде

$$f(\lambda) = a_0 (\lambda - \alpha_1)^{n_1} \ldots (\lambda - \alpha_r)^{n_r} \left[(\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_1^*)\right]^{m_1} \ldots \left[(\lambda - \beta_s)(\lambda - \beta_s^*)\right]^{m_s}.$$

После выполнения невырожденной замены $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, получим уравнение (2), по которому, так же как и выше, найдём соответствующий ему многочлен $\overline{f}(\mu)$,

$$\overline{f}(\mu) = \overline{a}_0 \mu^n - \overline{a}_1 \mu^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} \overline{a}_{n-1} \mu + (-1)^n \overline{a}_n, \quad \mu = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}, \tag{8}$$

где $\overline{a}_i = \overline{a}_i(\xi, \eta)$, $i = 0, \ldots, n$. Покажем, что в точке $\overline{P}$, соответствующей P при указанной замене, сигнатура $\sigma(\overline{P})$ нового уравнения совпадает с сигнатурой $\sigma(P)$ исходного уравнения. Не уменьшая общности, будем считать, что $\overline{a}_0 \not\equiv 0$. Тогда, при выполнении замены, каждый корень λ_0 многочлена $f(\lambda)$ переходит в некоторый корень μ_0 многочлена $\overline{f}(\mu)$ кратность которого не ниже кратности корня λ_0, т. е. многочлен (8) не имеет никаких других корней, кроме корней, полученных при выполнении замены, из корней многочлена $f(\lambda)$. Следовательно, нам остаётся показать, что разные корни переходят в разные. Допустим противное, разные вещественные корни α_1 и α_2 уравнения (6) переходят в один корень $\overline{\alpha}$ уравнения (8). Рассмотрим тогда алгебраическое уравнение

$$f_0(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)$$

и сопоставим ему дифференциальное уравнение 2–го порядка

$$u_{xx} + (\alpha_1 + \alpha_2)u_{xy} + \alpha_1\alpha_2 u_{yy} = 0.$$

Очевидно, что это уравнение гиперболического типа в точке (x, y). Однако, при выполнении невырожденной замены $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, как было замечено выше, оно перейдёт в уравнение параболического типа, что невозможно [1, с. 15].

Предположим теперь, что разные комплексные корни β_1 и β_2 уравнения (6) переходят в один и тот же комплексный корень $\overline{\beta}$ уравнения (8). Опять рассмотрим алгебраическое уравнение

$$f_0(\lambda) = (\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2)$$

и сопоставим ему дифференциальное уравнение 2–го порядка

$$u_{xx} + (\beta_1 + \beta_2)u_{xy} + \beta_1\beta_2 u_{yy} = 0.$$

В отличие от предыдущего случая, коэффициенты этого уравнения — комплекснозначные функции. Тем не менее, проводя рассуждения аналогичные случаю вещественных коэффициентов, можно показать, что никакая невырожденная замена $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, не изменит сигнатуру этого уравнения, вопреки нашему предположению. Следовательно, и в случае уравнения n–го порядка сигнатура уравнения не меняется при выполнении невырожденной замены независимых переменных.

§ 2. Приведение уравнения к более простому виду

В предыдущем параграфе мы ввели понятие сигнатуры и показали, что при выполнении невырожденной замены переменных сигнатура не меняется. Рассмотрим точку P, в которой определено уравнение (1). Далее, до конца работы, будем предполагать, что найдётся некоторая окрестность точки P такая, что сигнатура в любой точке этой окрестности совпадает с сигнатурой $\sigma(P)$ в самой точке P. В этих предположениях, мы укажем невырожденную замену переменных при которой исходное уравнение перейдёт в уравнение более простого вида в этой окрестности точки P.

Начнём с доказательства следующего утверждения

Лемма 3. а) *Пусть многочлен $f(\lambda)$, соответствующий уравнению (1), имеет в точке P вещественный корень α кратности k, $k=1,\ldots,n$. Тогда существует такая невырожденная замена переменных $\xi=\xi(x,y)$, $\eta=\eta(x,y)$, что в некоторой окрестности точки P коэффициенты $\overline{a}_0,\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_{k-1}$ нового уравнения* (2) *обращаются в нуль.*

б) *Пусть многочлен $f(\lambda)$ имеет в точке P два вещественных корня α и β кратностей k и m, соответственно. Тогда существует такая невырожденная замена переменных $\xi=\xi(x,y)$, $\eta=\eta(x,y)$, что в некоторой окрестности точки P коэффициенты нового уравнения $\overline{a}_0,\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_{k-1}$ и $\overline{a}_n,\overline{a}_{n-1},\ldots,\overline{a}_{n-m+1}$ обращаются в нуль.*

в) *Пусть многочлен $f(\lambda)$ имеет в точке P два комплексно–сопряжённых корня кратности m. Тогда существует такая невырожденная замена переменных $\xi=\xi(x,y)$, $\eta=\eta(x,y)$, что в некоторой окрестности точки P новые коэффициенты удовлетворяют следующей системе алгебраических соотношений.*

$$\left\{\begin{aligned} \overline{a}_0+i\overline{a}_1+i^2\overline{a}_2+\ldots+i^n\overline{a}_n=0,\\ \overline{a}_1+2i\overline{a}_2+\ldots+ni^{n-1}\overline{a}_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (m-1)!\overline{a}_{m-1}+m!i\overline{a}_m+\tfrac{(m+1)!}{2!}i^2\overline{a}_{m+1}+\ldots+\tfrac{n!}{(n-m+1)!}i^{n-m+1}\overline{a}_n=0, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

где i — мнимая единица, т. е. $i^2=-1$.

Доказательство. а) Пусть $\varphi(x,y)=\mathrm{const}$ — вещественный общий интеграл кратности k характеристического уравнения (5), определённый в некоторой окрестности точки P. В дальнейшем мы будем работать в этой окрестности, не оговаривая это каждый раз. Положим $\xi=\varphi(x,y)$ и $\eta=\eta(x,y)$, где функция $\eta(x,y)$ выбрана так, что указанная замена невырождена. Тогда, ввиду леммы 2, справедливо равенство

$$a_0\xi_x^n+a_1\xi_x^{n-1}\xi_y+\ldots a_{n-1}\xi_x\xi_y^{n-1}+a_n\xi_y^n=0.$$

Учитывая формулы (3), отсюда заключаем, что $\overline{a_0}\equiv 0$. Если при этом $k=1$, то требуемое утверждение доказано. Если $k>1$, то по известной теореме из курса алгебры (см., например, [3, с. 146]), α является корнем кратности $k-1$ производной

$$f'(\lambda)=na_0\lambda-(n-1)a_1\lambda^{n-2}+\ldots+(-1)^{n-1}a_{n-1}.$$

Следовательно, функция $\varphi(x,y)=\mathrm{const}$ является общим интегралом кратности $k-1$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$na_0(\mathrm{d}y)^{n-1}-(n-1)a_1(\mathrm{d}y)^{n-2}\mathrm{d}x+\ldots+(-1)^{n-1}a_{n-1}(\mathrm{d}x)^{n-1}=0.$$

Опять, ввиду леммы 2, заключаем, что функция $\xi=\varphi(x,y)$ удовлетворяет соотношению

$$na_0\xi_x^{n-1}+(n-1)a_1\xi_x^{n-2}\xi_y+\ldots+a_{n-1}\xi_y^{n-1}=0.$$

которое можно представить в виде

$$\frac{\partial\overline{a}_0}{\partial\xi_x}=0.$$

Не уменьшая общности, можно считать, что α отлично от нуля. Тогда $1/\alpha$ является корнем кратности k многочлена

$$g(\mu)=a_0-a_1\mu+\ldots+(-1)^{n-1}a_{n-1}\mu^{n-1}+(-1)^na_n\mu^n,\quad \mu=\frac{1}{\mu},$$

полученного из многочлена $f(\lambda)$ делением на λ^n. Кроме того, $1/\alpha$ является корнем кратности $k-1$ производной

$$g'(\mu) = -a_1 + \ldots + (-1)^{n-1}(n-1)a_{n-1}\mu^{n-2} + (-1)^n n a_n \mu^{n-1}.$$

Очевидно, что тогда функция $\varphi(x,y) = \mathrm{const}$ является общим интегралом кратности $k-1$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$-a_1(\mathrm{d}x)^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}(n-1)a_{n-1}\mathrm{d}x(\mathrm{d}y)^{n-2} + (-1)^n n a_n (\mathrm{d}y)^{n-1} = 0.$$

Опять, ввиду леммы 2, заключаем, что функция $\xi = \varphi(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$a_1\xi_y^{n-1} + \ldots + (n-1)a_{n-1}\xi_y\xi_x^{n-2} + n a_n \xi_x^{(n-1)} = 0,$$

т. е. справедливо равенство

$$\frac{\partial \overline{a}_0}{\partial \xi_y} = 0.$$

Следовательно, ввиду леммы 1,

$$\overline{a}_1 = \frac{\partial \overline{a}_0}{\partial \xi_x}\eta_x + \frac{\partial \overline{a}_0}{\partial \xi_y}\eta_y = 0.$$

Если $k = 2$, то доказательство закончено, если же $k > 2$, то проводя те же рассуждения, что и выше, покажем, что $\overline{a}_2 = 0$ и т. д.

б) Пусть $\varphi(x,y) = \mathrm{const}$ и $\psi(x,y) = \mathrm{const}$ — вещественные общие интегралы кратностей k и m соответственно, характеристического уравнения

$$a_0(\mathrm{d}y)^n - a_1(\mathrm{d}y)^{n-1}\mathrm{d}x + \ldots + (-1)^{n-1}a_{n-1}\mathrm{d}y(\mathrm{d}x)^{n-1} + (-1)^n a_n(\mathrm{d}x)^n = 0,$$

соответствующего исходному уравнению (1). Положим $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$. Так как общие интегралы $\varphi(x,y) = \mathrm{const}$ и $\psi(x,y) = \mathrm{const}$ независимы, то указанная подстановка будет невырожденной. По лемме 2, справедливы равенства

$$\overline{a}_0 = a_0\xi_x^n + a_1\xi_x^{n-1}\xi_y + \ldots + a_{n-1}\xi_x\xi_y^{n-1} + a_n\xi_y^n = 0,$$

$$\overline{a}_n = a_0\eta_x^n + a_1\eta_x^{n-1}\eta_y + \ldots + a_{n-1}\eta_x\eta_y^{n-1} + a_n\eta_y^n = 0.$$

Далее, проводя те же рассуждения, что и в пункте а), докажем равенство нулю коэффициентов $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_{k-1}$. Доказательство того, что коэффициенты $\overline{a}_{n-1}, \ldots, \overline{a}_{n-m+1}$ обращаются в нуль проводится аналогично, с той лишь разницей, что теперь мы должны использовать второе равенство из леммы 1.

в) По условию, характеристическое уравнение имеет два комплексно–сопряжённых общих интеграла $\varphi(x,y) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y) = \mathrm{const}$, $\varphi^*(x,y) = \alpha(x,y) - i\beta(x,y) = \mathrm{const}$ кратности k. Рассмотрим невырожденную замену $\xi = \alpha(x,y)$, $\eta = \beta(x,y)$. По лемме 2, справедливо равенство

$$a_0\varphi_x^n + a_1\varphi_x^{n-1}\varphi_y + \ldots + a_{n-1}\varphi_x\varphi_y^{n-1} + a_n\varphi_y^n = 0. \tag{10}$$

Подставим сюда выражение для φ, раскроем скобки и, учитывая равенства (3), получим

$$\overline{a}_0 + i\overline{a}_1 + i^2\overline{a}_2 + \ldots + i^n\overline{a}_n = 0,$$

Так как φ является общим интегралом кратности k исходного характеристического уравнения, то проводя те же рассуждения, что и в пункте а), можно показать, что φ является общим интегралом кратности $k-1$ следующих дифференциальных уравнений

$$na_0(\mathrm{d}y)^{n-1}-(n-1)a_1(\mathrm{d}y)^{n-2}\mathrm{d}x+\ldots+(-1)^{n-1}a_{n-1}(\mathrm{d}x)^{n-1}=0,$$

$$a_1(\mathrm{d}y)^{n-1}-2a_2(\mathrm{d}y)^{n-2}\mathrm{d}x+\ldots+(-1)^{n-1}(n-1)a_{n-1}(\mathrm{d}x)^{n-2}\mathrm{d}y+(-1)^n na_n(\mathrm{d}x)^{n-1}=0,$$

Опять по лемме 2, справедливы равенства

$$\begin{gathered} na_0\varphi_x^{n-1}+(n-1)a_1\varphi_x^{n-2}\varphi_y+\ldots+a_{n-1}\varphi_y^{n-1}=0,\\ a_1\varphi_x^{n-1}+\ldots+(n-1)a_{n-1}\varphi_y^{n-2}\varphi_x+na_n\varphi_y^{n-1}=0. \end{gathered} \tag{11}$$

Коэффициенты $\overline{a}_i=\overline{a}_i(\xi,\eta),\quad i=0,\ldots,n$ нового уравнения (2) вычисляются по формулам (3). Символом $\overline{a}_i(\varphi)$ будем обозначать функцию $\overline{a}_i(\varphi,\eta),\quad i=0,\ldots,n$. Сравнивая равенства (11) с исходным равенством (10), замечаем, что они получаются дифференцированием равенства (10) по φ_x и φ_y, соответственно. Следовательно,

$$\frac{\partial\overline{a}_0(\varphi)}{\partial\varphi_x}\eta_x+\frac{\partial\overline{a}_0(\varphi)}{\partial\varphi_y}\eta_y=0.$$

Из этого равенства, ввиду леммы 1, заключаем, что $\overline{a}_1(\varphi)=0$. Подставим в $\overline{a}_1(\varphi)$ выражение $\varphi=\alpha+i\beta$, раскроем скобки и приведём подобные слагаемые. Учитывая формулы (3), получим равенство

$$\overline{a}_1+2i\overline{a}_2+\ldots+ni^{n-1}\overline{a}_n=0.$$

Если $k=2$, то доказательство закончено. Если же $k>2$, то из равенства $\overline{a}_1(\varphi)$, так же как и выше, заключаем, что $\frac{\partial\overline{a}_1(\varphi)}{\partial\varphi_x}=0$ и $\frac{\partial\overline{a}_1(\varphi)}{\partial\varphi_y}=0$. Ввиду леммы 1, отсюда следует, что $\overline{a}_2(\varphi)=0$ и т. д. Лемма доказана.

Прежде чем сформулировать основную теорему, введём некоторые определения. Пусть уравнение (1) имеет в точке P сигнатуру

$$\sigma(P)=(n_1,\ldots,n_r|m_1,\ldots,m_s),\quad n_1\geq\ldots\geq n_r\geq 0,\quad m_1\geq\ldots\geq m_s\geq 0.$$

Не уменьшая общности, будем считать, что $r\geq 2$ и $s\geq 1$. Если это не так, то положим равными нулю недостающие компоненты. *Главной частью* сигнатуры $\sigma(P)$ назовём пару $\nu(P)=(n_1,n_2)$, если $n_1+n_2\geq 2m_1$ и пару $\nu^*(P)=(m_1,m_1)$, если $n_1+n_2<2m_1$. В первом случае будем говорить, что сигнатура $\sigma(P)$ *имеет вещественную главную часть*, а во втором, что сигнатура $\sigma(P)$ *имеет комплексную главную часть*. Разность между n и суммой компонент главной части назовём *дефектом* сигнатуры $\sigma(P)$. Будем обозначать дефект символом $d(P)$. Далее мы покажем, что чем меньше дефект $d(P)$, тем к более простому виду можно привести уравнение (1), используя невырожденную замену переменных. Более того, если дефект не превосходит 1, то можно получить уравнение с постоянными коэффициентами при старших производных.

Сформулируем основное утверждение настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть в некоторой окрестности точки P сигнатура $\sigma(P)$ уравнения* (1) *не меняется.*

а) *Если сигнатура $\sigma(P)$ имеет вещественную главную часть $\nu(P) = (k, l)$, $k \geq l \geq 0$, то существует невырожденная замена переменных $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, такая, что в некоторой окрестности точки P уравнение* (1) *приводится к виду*

$$\overline{a}_k u_{\xi\eta}^{(n-k,k)} + \overline{a}_{k+1} u_{\xi\eta}^{(n-k-1,k+1)} + \ldots + \overline{a}_{n-l} u_{\xi\eta}^{(l,n-l)} = \overline{F}, \tag{12}$$

где $\overline{a}_i = \overline{a}_i(\xi, \eta)$, $\overline{F}$ зависит от ξ, η, u и производных функции u по переменным ξ и η порядки которых меньше n.

Если при этом дефект $d(P)$ равен 0, то уравнение (12) *приводится к виду*

$$u_{\xi\eta}^{(n-k,k)} = F_1, \qquad F_1 = \overline{F}/\overline{a}_k.$$

Если дефект $d(P) = 1$, то существует невырожденная замена переменных $s = s(\xi, \eta)$, $t = t(\xi, \eta)$ такая, что уравнение (12) *приводится к уравнению*

$$\sum_{j=0}^{k} C_k^j u_{st}^{(n-j-1,j+1)} = \Phi, \qquad \Phi = \Phi(s, t, u, \ldots)$$

с постоянными коэффициентами при старших производных.

б) *Если сигнатура $\sigma(P)$ имеет комплексную главную часть $\nu^*(P) = (m, m)$, $n > m > 0$, то существует невырожденная замена переменных $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, такая, что в некоторой окрестности точки P уравнение* (1) *приводится к уравнению, у которого все коэффициенты при старших производных линейно выражаются через $n - 2m + 1$ последних коэффициентов $\overline{a}_j$, $j = 2m, 2m+1, \ldots, n$, т. е.*

$$\sum_{i=0}^{m-1} \left(f_{2i} u_{\xi\eta}^{(n-2i,2i)} + g_{2i+1} u_{\xi\eta}^{(n-2i-1,2i+1)} \right) + \sum_{j=2m}^{n} \overline{a}_j u_{\xi\eta}^{(n-j,j)} = \overline{F}, \tag{13}$$

где коэффициент f_{2i}, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, является линейной комбинацией коэффициентов $\overline{a}_j$, $j = 2m, 2m+1, \ldots, n$, с чётными индексами j, а коэффициент g_{2i+1}, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, является линейной комбинацией коэффициентов $\overline{a}_j$, $j = 2m, 2m+1, \ldots, n$, с нечётными индексами j.

Если дефект $d(P) \leq 1$, то существует невырожденная замена переменных $s = s(\xi, \eta)$, $t = t(\xi, \eta)$ такая, что уравнение (13) *приводится к уравнению*

$$\sum_{i=0}^{m} C_m^i u_{st}^{(n-2i,2i)} = \Phi, \qquad \Phi = \Phi(s, t, u, \ldots)$$

с постоянными коэффициентами при старших производных.

Доказательство. а) По условию, характеристическое уравнение (5), соответствующее уравнению (1), имеет два вещественных общих интеграла $\varphi(x, y)$=const, $\psi(x, y)$=const кратностей k и l, соответственно, Выполним замену $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, если $l > 0$ и замену $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ в противном случае, где функция $\eta(x, y)$ такова, что эта замена невырождена. Ввиду леммы 3, уравнение (1) в новых переменных будет иметь вид (12).

Докажем вторую часть теоремы. Предположим вначале, что дефект $d(P) = 0$. Тогда уравнение (12) примет вид

$$\overline{a}_k u_{\xi\eta}^{(n-k,k)} = \overline{F}.$$

Разделив обе части этого уравнения на $\overline{a}_k$, получим уравнение требуемого вида.

Пусть теперь дефект $d(P)=1$. Тогда из уравнения (12),

$$\overline{a}_k u_{\xi\eta}^{(n-k,k)} + \overline{a}_{k+1} u_{\xi\eta}^{(n-k-1,k+1)} = \overline{F}. \tag{14}$$

Выпишем соответствующее ему характеристическое уравнение

$$\overline{a}_k (\mathrm{d}\eta)^{n-k} (\mathrm{d}\xi)_k - \overline{a}_{k+1} (\mathrm{d}\eta)^{n-k-1} (\mathrm{d}\xi)^{k+1} = 0.$$

Это уравнение имеет два общих интеграла. Первый интеграл η=const кратности $n-1$, а второй — находится из уравнения $\overline{a}_k \mathrm{d}\eta - \overline{a}_{k+1}\mathrm{d}\xi = 0$. Пусть $\omega(\xi,\eta)=c$, где c — некоторая константа, — общий интеграл этого уравнения. По теореме о неявной функции, выразим $\eta = h(\xi,c)$. Введём новые переменные $s=\eta-h(\xi,c)$, $t=\eta$. Легко проверить следующие равенства $u_\xi = -u_s h_\xi, \quad u_\eta = u_s + u_t$ и для произвольных натуральных p и q

$$u_{\xi\eta}^{(p,q)} = (-1)^p h_\xi^p \sum_{i=0}^{q} C_q^i u_{st}^{(p+q-i,i)} + \ldots,$$

где точками обозначены слагаемые, содержащие производные порядков $< p+q$. Уравнение (14) можно переписать в таком виде

$$(-1)^{n-k} \overline{a}_k h_\xi^{n-k} \sum_{i=0}^{k} C_k^i u_{st}^{(n-i,i)} + (-1)^{n-k-1} \overline{a}_{k+1} h_\xi^{n-k-1} \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i u_{st}^{(n-i,i)} = \Phi_1.$$

Перегруппировав слагаемые, получим

$$(-1)^{n-k} h_\xi^{n-k-1} \sum_{i=0}^{k} \left(\overline{a}_k h_\xi C_k^i - \overline{a}_{k+1} C_{k+1}^i\right) u_{st}^{(n-i,i)} +$$
$$+ (-1)^{n-k-1} \overline{a}_{k+1} h_\xi^{n-k-1} u_{st}^{(n-k-1,k+1)} = \Phi_1.$$

Так как $\overline{a}_k h_\xi = \overline{a}_{k+1}$, то

$$(-1)^{n-k} h_\xi^{n-k-1} \sum_{i=0}^{k} \overline{a}_{k+1} \left(C_k^i - C_{k+1}^i\right) u_{st}^{(n-i,i)} +$$
$$+ (-1)^{n-k-1} \overline{a}_{k+1} h_\xi^{n-k-1} u_{st}^{(n-k-1,k+1)} = \Phi_1.$$

Ввиду известного свойства биномиальных коэффициентов: $C_k^i - C_{k+1}^i = -C_k^{i-1}$, получим

$$(-1)^{n-k-1} h_\xi^{n-k-1} \sum_{i=1}^{k} C_k^{i-1} \overline{a}_{k+1} u_{st}^{(n-i,i)} + (-1)^{n-k-1} \overline{a}_{k+1} h_\xi^{n-k-1} u_{st}^{(n-k-1,k+1)} = \Phi_1.$$

Разделим обе части этого уравнения на $(-1)^{n-k-1} h_\xi^{n-k-1} \overline{a}_{k+1}$

$$\sum_{i=1}^{k} C_k^{i-1} u_{st}^{(n-i,i)} + u_{st}^{(n-k-1,k+1)} = \Phi, \quad \Phi = \Phi_1/(-1)^{n-k-1} h_\xi^{n-k-1} \overline{a}_{k+1}.$$

Полагая $j = i - 1$ и внося последнее слагаемое под знак суммы, окончательно получаем

$$\sum_{j=0}^{k} C_k^j u_{st}^{(n-j-1,j+1)} = \Phi.$$

Таким образом, первая часть теоремы полностью доказана.

б) По условию, характеристическое уравнение (5) имеет два комплексно–сопряжённых общих интеграла $\varphi(x,y) \equiv \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$ =const, $\varphi^*(x,y) \equiv \alpha(x,y) - i\beta(x,y)$=const кратности m. Выполним замену $\xi = \alpha(x,y)$, $\eta = \beta(x,y)$. Тогда новые коэффициенты уравнения (2) удовлетворяют системе (9) из леммы 3. Приравняв в каждом из уравнений системы (9) к 0 действительную и мнимую части, получим новую систему уравнений. В зависимости от чётности и нечётности n и m, рассмотрим четыре случая.

В случае, когда n и m чётны, полученная система будет иметь вид

$$\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{r}
\overline{a}_0 - \overline{a}_2 + \overline{a}_4 - \ldots + (-1)^{n/2}\overline{a}_n = 0, \\
-2\overline{a}_2 + 4\overline{a}_4 - \ldots + (-1)^{n/2} n\overline{a}_n = 0, \\
-2\overline{a}_2 + 3\cdot 4\overline{a}_4 - \ldots + (-1)^{n/2} n(n-1)\overline{a}_n = 0, \\
\dotfill \\
(-1)^{m/2-1}(m-2)!\overline{a}_{m-2} + (-1)^{m/2}\frac{m!}{2!}\overline{a}_m + \\
+(-1)^{m/2+1}\frac{(m+2)!}{4!}\overline{a}_{m+2} + \ldots + (-1)^{n/2}\frac{n!}{(n-m+2)!}\overline{a}_n = 0, \\
(-1)^{m/2} m!\overline{a}_m + (-1)^{m/2+1}\frac{(m+2)!}{3!}\overline{a}_{m+2} + \ldots + (-1)^{n/2}\frac{n!}{(n-m+1)!}\overline{a}_n = 0,
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{r}
\overline{a}_1 - \overline{a}_3 + \overline{a}_5 - \ldots - (-1)^{n/2}\overline{a}_{n-1} = 0, \\
\overline{a}_1 - 3\overline{a}_3 + 5\overline{a}_5 - \ldots - (-1)^{n/2}(n-1)\overline{a}_{n-1} = 0, \\
-2\cdot 3\overline{a}_3 + 4\cdot 5\overline{a}_5 - \ldots - (-1)^{n/2}(n-2)(n-1)\overline{a}_{n-1} = 0, \\
\dotfill \\
-(-1)^{m/2}(m-1)!\overline{a}_{m-1} - (-1)^{m/2+1}\frac{(m+1)!}{3!}\overline{a}_{m+1} - \ldots \\
\ldots - (-1)^{n/2}\frac{(n-1)!}{(n-m+1)!}\overline{a}_{n-1} = 0, \\
-(-1)^{m/2}(m-1)!\overline{a}_{m-1} - (-1)^{m/2+1}\frac{(m+1)!}{2!}\overline{a}_{m+1} - \ldots (-1)^{n/2}\frac{(n-1)!}{(n-m)!}\overline{a}_{n-1} = 0,
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

Видно, что она распадается на две независимые подсистемы, первая из которых содержит коэффициенты $\overline{a}_i$ с чётными индексами, а вторая — с нечётными. Причём, первая подсистема содержит $n/2+1$ коэффициентов $\overline{a}_0, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$, а вторая — $n/2$ коэффициентов $\overline{a}_1, \overline{a}_3, \ldots, \overline{a}_{n-1}$.

Рассмотрим вначале первую подсистему. Она состоит из m уравнений. В каждом из уравнений оставим слагаемые содержащие коэффициенты $\overline{a}_0, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_{2(m-1)}$ в левой части, а остальные — перенесём в правую. Полученную подсистему будем рассматривать как систему m линейных уравнений относительно m неизвестных $\overline{a}_0, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_{2(m-1)}$. Перейдём от этой системы к равносильной. Умножим второе уравнение на -1 и прибавим к третьему уравнению. В полученной системе третье уравнение умножим на -3 и прибавим к четвёртому и т. д. Наконец, $m-1$–е уравнение умножим на $-2m+5$ и прибавим к m–у уравнению. При этом мы считаем, что $m > 2$, так как при $m = 2$ мы уже имеем систему треугольного вида. В результате выполненных преобразований, получим систему треугольного вида

$$\begin{cases} \overline{a}_0 - \overline{a}_2 + \overline{a}_4 - \ldots - \overline{a}_{2(m-1)} = -\overline{a}_{2m} + \ldots - (-1)^{n/2}\overline{a}_n, \\ -2\overline{a}_2 + 4\overline{a}_4 - \ldots - 2(m-1)\overline{a}_{2(m-1)} = -2m\overline{a}_{2m} + \ldots - (-1)^{n/2}n\overline{a}_n, \\ -2\cdot 4\overline{a}_4 - \ldots - 2(m-1)2(m-2)\overline{a}_{2(m-1)} = \\ \qquad\qquad = -2m2(m-1)\overline{a}_{2m} + \ldots - (-1)^{n/2}n(n-2)\overline{a}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2\cdot 4\cdot 6\ldots(2m-4)\overline{a}_{2(m-2)} - 4\cdot 6\cdot 8\ldots(2m-2)\overline{a}_{2(m-1)} = \\ \qquad\qquad = -6\cdot 8\cdot 10\ldots 2m\overline{a}_{2m} + \ldots - (-1)^{n/2}(n-2m+6)\times \\ \qquad\qquad \times(n-2m+8)\ldots n\overline{a}_n, \\ -2\cdot 4\cdot 6\ldots(2m-2)\overline{a}_{2(m-1)} = \\ \qquad\qquad = -4\cdot 6\cdot 8\ldots 2m\overline{a}_{2m} + \ldots - (-1)^{n/2}(n-2m+4)(n-2m+6)\ldots n\overline{a}_n. \end{cases} \tag{15}$$

Так как определитель этой системы отличен от нуля, то она имеет единственное решение $\overline{a}_{2i} = \sum_{q=m}^{n/2} c_{2i,2q}\overline{a}_{2q}, \quad i = 0,\ldots,m-1$, где $c_{2i,2q}$ — некоторые рациональные числа.

Допустим теперь, что $n = 2m$, т. е. дефект уравнения (1) в точке P равен 0. Тогда в системе (15) правая часть зависит от одного коэффициента $\overline{a}_n$. Решая эту систему, получим: $\overline{a}_{2i} = C_m^i\overline{a}_n, \quad i = 0,\ldots,m-1$.

Аналогично рассматривается подсистема, содержащая коэффициенты $\overline{a}_j$ с нечётными индексами j. Оставим в каждом уравнении слагаемые, содержащие коэффициенты $\overline{a}_1, \overline{a}_3, \ldots, \overline{a}_{2m-1}$ в левой части, а остальные — перенесём в правую. Получим квадратную систему линейных уравнений относительно неизвестных $\overline{a}_1, \overline{a}_3, \ldots, \overline{a}_{2m-1}$. Вычислив определитель этой системы, заметим, что он отличен от нуля. Следовательно, данная система также имеет единственное решение: $\overline{a}_{2i+1} = \sum_{q=m}^{n/2-1} c_{2i+1,2q+1}\overline{a}_{2q+1}, \quad i = 0,\ldots,m-1$, при некоторых рациональных числах $c_{2i+1,2q+1}$. Если же $n = 2m$, т. е. дефект $d(P) = 0$, то подсистема оказывается однородной и $\overline{a}_1 = \overline{a}_3 = \ldots = \overline{a}_{n-1} = 0$. Следовательно, если дефект равен нулю, то уравнение приводится к следующему виду: $\sum_{i=0}^{m} C_m^i u_{xy}^{(n-2i,2i)} = \Phi$.

Случай, когда n — чётно, а m — нечётно разбирается аналогично.

Пусть далее n —нечётно, а m — чётно. Тогда из системы (9) получим систему

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{r}\overline{a}_0-\overline{a}_2+\overline{a}_4-\ldots+(-1)^{(n-1)/2}\overline{a}_{n-1}=0,\\ -2\overline{a}_2+4\overline{a}_4-\ldots+(-1)^{(n-1)/2}(n-1)\overline{a}_{n-1}=0,\\ -2\overline{a}_2+3\cdot 4\overline{a}_4-\ldots+(-1)^{(n-1)/2}(n-2)(n-3)\overline{a}_{n-1}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (-1)^{m/2-1}(m-2)!\overline{a}_{m-2}+(-1)^{m/2}\frac{m!}{2!}\overline{a}_m+\\ +(-1)^{m/2+1}\frac{(m+2)!}{4!}\overline{a}_{m+2}+\ldots+(-1)^{(n-1)/2}\frac{(n-1)!}{(n-m+1)!}\overline{a}_n=0,\\ (-1)^{m/2}m!\overline{a}_m+(-1)^{m/2+1}\frac{(m+2)!}{3!}\overline{a}_{m+2}+\ldots\\ \ldots+(-1)^{(n-1)/2}\frac{(n-1)!}{(n-m)!}\overline{a}_{n-1}=0,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{r}\overline{a}_1-\overline{a}_3+\overline{a}_5-\ldots-(-1)^{(n+1)/2}\overline{a}_n=0,\\ \overline{a}_1-3\overline{a}_3+5\overline{a}_5-\ldots-(-1)^{(n+1)/2}n\overline{a}_n=0,\\ -2\cdot 3\overline{a}_3+4\cdot 5\overline{a}_5-\ldots-(-1)^{(n+1)/2}n(n-1)\overline{a}_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ -(-1)^{m/2}(m-1)!\overline{a}_{m-1}-(-1)^{m/2+1}\frac{(m+1)!}{3!}\overline{a}_{m+1}-\ldots\\ \ldots-(-1)^{(n+1)/2}\frac{n!}{(n-m+2)!}\overline{a}_n=0,\\ -(-1)^{m/2}(m-1)!\overline{a}_{m-1}-(-1)^{m/2+1}\frac{(m+1)!}{2!}\overline{a}_{m+1}-\ldots\\ \ldots-(-1)^{(n+1)/2}\frac{n!}{(n-m+1)!}\overline{a}_n=0,\end{array}\right.\end{array}\right.$$

которая, как легко заметить, распадается на две независимые подсистемы, первая из которых содержит коэффициенты $\overline{a}_i$ с чётными индексами i, а вторая — с нечётными. Причём, каждая из подсистем содержит по $(n+1)/2$ коэффициентов. В первой подсистеме оставим m коэффициентов $\overline{a}_0, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_{2(m-1)}$ в левой части, а остальные — перенесём в правую часть. Аналогично для второй подсистемы, коэффициенты $\overline{a}_1, \overline{a}_3, \ldots, \overline{a}_{2m-1}$ оставим в левой части, а остальные перенесём в правую. Получим систему

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\left\{
\begin{array}{l}
\overline{a}_0 - \overline{a}_2 + \overline{a}_4 - \ldots - \overline{a}_{2(m-1)} = \\
\qquad = -\overline{a}_{2m} + \ldots - (-1)^{(n-1)/2}\overline{a}_{n-1}, \\[2ex]
-2\overline{a}_2 + 4\overline{a}_4 - \ldots - 2(m-1)\overline{a}_{2(m-1)} = \\
\qquad = -2m\overline{a}_{2m} + \ldots - (-1)^{(n-1)/2}(n-1)\overline{a}_{n-1}, \\[2ex]
-2\overline{a}_2 + 3\cdot 4\overline{a}_4 - \ldots - (2m-2)(2m-3)\overline{a}_{2(m-1)} = \\
\qquad = -2m(2m-1)\overline{a}_{2m} + \ldots - (-1)^{(n-1)/2}(n-2)(n-1)\overline{a}_{n-1}, \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
(-1)^{m/2-1}(m-2)!\overline{a}_{m-2} + (-1)^{m/2}\frac{m!}{2!}\overline{a}_m + \\[1ex]
+(-1)^{m/2+1}\frac{(m+2)!}{4!}\overline{a}_{m+2} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{(2m-2)!}{m!}\overline{a}_{2(m-1)} = \\
\qquad = -\frac{(2m)!}{(m+2)!}\overline{a}_{2m} + \ldots - (-1)^{(n-1)/2}\frac{(n-1)!}{(n-m+1)!}\overline{a}_{n-1}, \\[2ex]
(-1)^{m/2}m!\overline{a}_m + (-1)^{m/2+1}\frac{(m+2)!}{3!}\overline{a}_{m+2} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{(2m-2)!}{(m-1)!}\overline{a}_{2(m-1)} = \\
\qquad = -\frac{(2m)!}{(m+1)!}\overline{a}_{2m} - \ldots - (-1)^{(n-1)/2}\frac{(n-1)!}{(n-m)!}\overline{a}_{n-1},
\end{array}
\right. \\
\left\{
\begin{array}{l}
\overline{a}_1 - \overline{a}_3 + \overline{a}_5 - \ldots - \overline{a}_{2m-1} = \\
\qquad = -\overline{a}_{2m+1} + \ldots + (-1)^{(n+1)/2}\overline{a}_n, \\[2ex]
\overline{a}_1 - 3\overline{a}_3 + 5\overline{a}_5 - \ldots - (2m-1)\overline{a}_{2m-1} = \\
\qquad = -(2m+1)\overline{a}_{2m+1} + \ldots + (-1)^{(n+1)/2}n\overline{a}_n, \\[2ex]
-2\cdot 3\overline{a}_3 + 4\cdot 5\overline{a}_5 - \ldots - (2m-2)(2m-1)\overline{a}_{2m-1} = \\
\qquad = -2m(2m+1)\overline{a}_{2m+1} + \ldots + (-1)^{(n+1)/2}n(n-1)\overline{a}_n, \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
-(-1)^{m/2}(m-1)!\overline{a}_{m-1} - (-1)^{m/2+1}\frac{(m+1)!}{3!}\overline{a}_{m+1} - \ldots - \frac{(2m-1)!}{(m+1)!}\overline{a}_{2m-1} = \\
\qquad = -\frac{(2m+1)!}{(m+3)!}\overline{a}_{2m+1} + \ldots + (-1)^{(n+1)/2}\frac{n!}{(n-m+2)!}\overline{a}_n, \\[2ex]
-(-1)^{m/2}(m-1)!\overline{a}_{m-1} - (-1)^{m/2+1}\frac{(m+1)!}{2!}\overline{a}_{m+1} - \ldots - \frac{(2m-1)!}{m!}\overline{a}_{2m-1} = \\
\qquad = -\frac{(2m+1)!}{(m+2)!}\overline{a}_{2m+1} + \ldots + (-1)^{(n+1)/2}\frac{n!}{(n-m+1)!}\overline{a}_n.
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

Рассмотрим вторую подсистему. Умножим первое уравнение на -1 и прибавим ко второму уравнению. Полученное уравнение умножим на -2 и прибавим к третьему уравнению и т. д. Наконец, $m-1$–е уравнение полученной системы умножим на $-m+1$ и прибавим к m–у уравнению. Получим систему, эквивалентную исходной. Более того, если в этой системе коэффициенты $\overline{a}_1, \overline{a}_3, , \ldots, \overline{a}_n$ заменить на коэффициенты $\overline{a}_0, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_{n-1}$, соответственно, то получится первая подсистема. Таким образом, достаточно рассмотреть первую подсистему.

Второе уравнение первой подсистемы умножим на -1 и прибавим к третьему уравнению. В полученной системе умножим третье уравнение на -2 и прибавим к четвёртому, и т. д., и наконец $m-1$–е уравнение умножим на $-m+2$ и прибавим к m–му уравнению. Получим систему линейных уравнений относительно неизвестных $\overline{a}_0, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_{2(m-1)}$. Матрица этой системы имеет треугольный вид, причём, на главной диагонали все элементы отличны от нуля. Следовательно, данная система имеет единственное решение: $\overline{a}_{2i} = \sum_{q=m}^{(n-1)/2} e_{2i,2q}\overline{a}_{2q}, \quad i = 0, \ldots, m-1$, и, аналогично, для второй системы: $\overline{a}_{2i+1} = \sum_{q=m}^{(n-1)/2} e_{2i+1,2q+1}\overline{a}_{2q+1}, \quad i = 0, \ldots, m-1$, где $e_{\alpha,\beta}$ — рациональные числа. Если $n = 2m+1$, то нетрудно показать, что все коэффициенты уравнения (2) выражаются через два последних коэффициента по формулам

$$\overline{a}_{2i} = C_m^i \overline{a}_{n-1}, \qquad \overline{a}_{2i+1} = C_m^i \overline{a}_n, \quad i = 0, \ldots, m-1, \tag{16}$$

Последний случай, когда n и m нечётны разбирается аналогично.

Для завершения доказательства теоремы, нам осталось рассмотреть случай, когда дефект уравнения равен 1. Это возможно лишь в случае, когда n — нечётно, характеристическое уравнение имеет пару комплексно–сопряжённых общих интегралов кратности $(n-1)/2$ и один вещественный общий интеграл кратности 1. Ввиду разобранного выше случая и формулы (16), можно так выбрать новые переменные ξ и η, что уравнение (2) запишется в таком виде

$$\overline{a}_{n-1}\sum_{i=0}^{m} C_m^i u_{\xi\eta}^{(n-2i,2i)} + \overline{a}_n \sum_{i=0}^{m} C_m^i u_{\xi\eta}^{(n-2i-1,2i+1)} = \overline{F}. \tag{17}$$

Соответствующее ему характеристическое уравнение имеет общие интегралы: $\eta + i\xi = \mathrm{const}, \quad \eta - i\xi = \mathrm{const}, \quad f(\xi,\eta) = \mathrm{const}$, причём, первые два имеют кратности m, а последний — кратность 1. Представим характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (17) в таком виде

$$(\overline{a}_{n-1}\lambda - \overline{a}_n)\sum_{i=0}^{m} C_m^i \lambda^{n-2i-1} = 0, \quad \lambda = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}.$$

Тогда общим интегралом уравнения

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\overline{a}_n}{\overline{a}_{n-1}}$$

является функция $f(\xi,\eta) =$const. Пусть $g(\xi,\eta) =$const — общий интеграл уравнения

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = -\frac{\overline{a}_n}{\overline{a}_{n-1}}.$$

По теореме о неявной функции, перепишем соотношения $f(\xi,\eta) = c$, $g(\xi,\eta) = c$, c=const, в таком виде: $\eta = h(\xi, c)$ и $\xi = k(\eta, c)$. Тогда справедливы соотношения

$$\overline{a}_{n-1}(\xi,\eta)\frac{\mathrm{d}h(\xi,c)}{\mathrm{d}\xi} = \overline{a}_n(\xi,\eta), \quad -\overline{a}_{n-1}(\xi,\eta)\frac{\mathrm{d}k(\eta,c)}{\mathrm{d}\eta} = \overline{a}_n(\xi,\eta).$$

Положим $s = \xi - k(\eta, c)$, $t = \eta - h(\xi, c)$. В этих переменных уравнение (17) будет иметь новые коэффициенты

$$\hat{a}_0 = \sum_{j=0}^{m} C_m^j \left(\overline{a}_{n-1}k_\eta^{2j} - \overline{a}_n k_\eta^{2j+1}\right),$$

$$\hat{a}_i = \sum_{j=0}^{m} C_m^j \left[\overline{a}_{n-1} \sum_{q=0}^{2j} C_{2j}^q C_{n-2j}^{i+q-2j} \left(-k_\eta\right)^q \left(-h_\xi\right)^{i+q-2j} + \right.$$

$$\left. + \overline{a}_n \sum_{q=0}^{2j+1} C_{2j+1}^q C_{n-2j-1}^{i+q-2j-1} \left(-k_\eta\right)^q \left(-h_\xi\right)^{i+q-2j-1} \right], \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

$$\hat{a}_n = \sum_{j=0}^{m} C_m^j \left(\overline{a}_{n-1} \left(-h_\xi\right)^{n-2j} + \overline{a}_n \left(-h_\xi\right)^{n-2j-1} \right).$$

Так как $k_\eta = -h_\xi$, то эти коэффициенты можно переписать в таком виде

$$\hat{a}_0 = \sum_{j=0}^{m} C_m^j \left(\overline{a}_{n-1} h_\xi^{2j} + \overline{a}_n h_\xi^{2j+1} \right),$$

$$\hat{a}_i = \sum_{j=0}^{m} C_m^j \left[\overline{a}_{n-1} \sum_{q=0}^{2j} C_{2j}^q C_{n-2j}^{i+q-2j} h_\xi^q \left(-h_\xi\right)^{i+q-2j} + \right.$$

$$\left. + \overline{a}_n \sum_{q=0}^{2j+1} C_{2j+1}^q C_{n-2j-1}^{i+q-2j-1} h_\xi^q \left(-h_\xi\right)^{i+q-2j-1} \right], \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

$$\hat{a}_n = \sum_{j=0}^{m} C_m^j \left(\overline{a}_{n-1} \left(-h_\xi\right)^{n-2j} + \overline{a}_n \left(-h_\xi\right)^{n-2j-1} \right).$$

Ввиду равенства $-\overline{a}_{n-1} h_\xi + \overline{a}_n = 0$, коэффициент $\hat{a}_n$ равен 0. Перепишем коэффициент $\hat{a}_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, как многочлен от одной переменной h_ξ, получим

$$\hat{a}_i = \sum_{p=0}^{n} h_\xi^p \left[\sum_{j=(i-p)/2}^{(i+p)/2} C_m^j \overline{a}_{n-1} C_{2j}^{j+(p-i)/2} C_{n-2j}^{-j+(i+p)/2} \left(-1\right)^{j+(p+i)/2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=(i-p-1)/2}^{(i+p-1)/2} C_m^j \overline{a}_n C_{2j+1}^{j+(p-i+1)/2} C_{n-2j-1}^{-j+(i+p-1)/2} \left(-1\right)^{j+(p+i-1)/2} \right]. \tag{18}$$

Заметим, что при фиксированных i и p только одна сумма, стоящая в квадратных скобках, будет отлична от нуля, так как выражения $(i+p)/2$ и $(i+p-1)/2$ не могут быть одновременно целыми числами. Поэтому формулу (18) удобно расписать отдельно для чётных значений i и отдельно — для нечётных. При $i = 2q$, имеем

$$\hat{a}_{2q} = \sum_{p=0}^{m} \left(h_\xi^{2p} \sum_{j=q-p}^{q+p} \left(-1\right)^{j+p+q} C_m^j \overline{a}_{n-1} C_{2j}^{j+p-q} C_{n-2j}^{-j+p+q} + \right.$$

$$\left. + h_\xi^{2p+1} \sum_{j=q-p-1}^{q+p} \left(-1\right)^{j+p+q} C_m^j \overline{a}_n C_{2j+1}^{j+p-q+1} C_{n-2j-1}^{-j+p+q} \right), \quad q = 1, 2, \ldots, m.$$

При $i = 2q-1$, имеем аналогичное равенство

$$\hat{a}_{2q-1} = \sum_{p=0}^{m} \Bigg(h_\xi^{2p} \sum_{j=q-p-1}^{q+p-1} (-1)^{j+p+q-1} C_m^j \overline{a}_n C_{2j+1}^{j+p-q+1} C_{n-2j-1}^{-j+p+q-1} +$$

$$+ h_\xi^{2p+1} \sum_{j=q-p-1}^{q+p} (-1)^{j+p+q} C_m^j \overline{a}_{n-1} C_{2j}^{j+p-q+1} C_{n-2j}^{-j+p+q} \Bigg), \quad q = 1, 2, \ldots, m.$$

Используя двойную индукцию (по q и по p), можно проверить формулы:

$$\hat{a}_{2q} = \sum_{p=0}^{m} \left(\overline{a}_{n-1} C_m^q C_m^p h_\xi^{2p} + \overline{a}_n C_m^q C_m^p h_\xi^{2p+1} \right) = C_m^q \hat{a}_0,$$

$$\hat{a}_{2q-1} = \sum_{p=0}^{m} \left(\overline{a}_n C_m^{q-1} C_m^p h_\xi^{2p} - \overline{a}_{n-1} C_m^{q-1} C_m^p h_\xi^{2p+1} \right) = C_m^{q-1} \hat{a}_n, \quad q = 1, 2, \ldots, m.$$

Следовательно, в новых переменных s и t уравнение (17) перепишется в таком виде

$$\hat{a}_0 \sum_{j=0}^{m} C_m^j u_{st}^{(n-2j,2j)} = \hat{F}.$$

Разделив обе части этого уравнения на $\hat{a}_0$, получим требуемое уравнение. Теорема доказана.

В качестве иллюстрации этой теоремы, рассмотрим дифференциальные уравнения четвёртого порядка.

§ 3. Дифференциальные уравнения 4–го порядка

Важность этого случая объясняется тем, что, с одной стороны, при $n < 4$ известна классификация дифференциальных уравнений n–го порядка с двумя независимыми переменными, а с другой, значение $n = 4$ является последним для которого существуют явные формулы, выражающие корни алгебраического уравнения через его коэффициенты и для которого можно явно указать области, в которых тип уравнения не меняется. Как хорошо известно из общего курса алгебры, при $n > 4$ таких формул уже не существует т. е. общее уравнение n–го порядка при $n > 4$ не разрешимо в радикалах.

Рассмотрим квазилинейное уравнение 4–го порядка

$$a_0 u_x^{(4)} + a_1 u_{xy}^{(3,1)} + a_2 u_{xy}^{(2,2)} + a_3 u_{xy}^{(1,3)} + a_4 u_y^{(4)} = F, \tag{19}$$

с непрерывными вещественными коэффициентами $a_i = a_i(x, y)$, $i = 0, \ldots, 4$, и правой частью F, зависящей от x, y, u, а также от производных функции u порядков не превосходящих 3.

Выполняя невырожденную замену независимых переменных $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, получим новое уравнение

$$\overline{a}_0 u_\xi^{(4)} + \overline{a}_1 u_{\xi\eta}^{(3,1)} + \overline{a}_2 u_{\xi\eta}^{(2,2)} + \overline{a}_3 u_{\xi\eta}^{(1,3)} + \overline{a}_4 u_\eta^{(4)} = \overline{F}, \tag{20}$$

коэффициенты которого имеют следующий вид

$$\overline{a}_0 = a_0\xi_x^4 + a_1\xi_x^3\xi_y + a_2\xi_x^2\xi_y^2 + a_3\xi_x\xi_y^3 + a_4\xi_y^4,$$

$$\overline{a}_1 = 4a_0\xi_x^3\eta_x + a_1\left(\xi_x^3\eta_y + 3\xi_x^2\xi_y\eta_x\right) + 2a_2\left(\xi_x^2\xi_y\eta_y + \xi_x\xi_y^2\eta_x\right) + a_3\left(\xi_y^3\eta_x + 3\xi_x\xi_y^2\eta_y\right) + 4a_4\xi_y^3\eta_y,$$

$$\overline{a}_2 = 6a_0\xi_x^2\eta_x^2 + 3a_1\left(\xi_x^2\eta_x\eta_y + \xi_x\xi_y\eta_x^2\right) + a_2\left(\xi_x^2\eta_y^2 + 4\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + \xi_y^2\eta_x^2\right) +$$
$$+3a_3\left(\xi_y^2\eta_x\eta_y + \xi_x\xi_y\eta_y^2\right) + 6a_4\xi_y^2\eta_y^2,$$

$$\overline{a}_3 = 4a_0\xi_x\eta_x^3 + a_1\left(3\xi_x^2\eta_y + \xi_y\eta_x^3\right) + 2a_2\left(\xi_y\eta_x^2\eta_y + \xi_x\eta_x\eta_y^2\right) + a_3\left(\xi_x\eta_y^3 + 3\xi_y\eta_x\eta_y^2\right) + 4a_4\xi_y\eta_y^3,$$

$$\overline{a}_4 = a_0\eta_x^4 + a_1\eta_x^3\eta_y + a_2\eta_x^2\eta_y^2 + a_3\eta_x\eta_y^3 + a_4\eta_y^4.$$

Выберем переменные ξ и η так, чтобы уравнение (20) имело наиболее простой вид.

Сопоставим уравнению (19) характеристическое уравнение

$$a_0(\mathrm{d}y)^4 - a_1(\mathrm{d}y)^3\mathrm{d}x + a_2(\mathrm{d}y)^2(\mathrm{d}x)^2 - a_3\mathrm{d}y(\mathrm{d}x)^3 + a_4(\mathrm{d}x)^4 = 0, \tag{21}$$

по которому построим алгебраическое уравнение

$$a_0\lambda^4 - a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 - a_3\lambda + a_4 = 0. \tag{22}$$

Рассмотрим некоторую точку $P = (x, y)$, в которой определено исходное уравнение (19). В этой точке уравнение (22) имеет 4 корня (с учётом кратности). Будем считать, что в каждой точке некоторой окрестности точки P сигнатура совпадает с сигнатурой в самой точке P. В этой окрестности можно так определить функции ξ и η, что новое уравнение (20) будет иметь более простой вид.

Предположим вначале, что в точке P уравнение (22) имеет один вещественный корень кратности 4. Тогда из основной теоремы предыдущего параграфа следует, что в некоторой окрестности точки P уравнение (19) можно привести к виду

$$u_\eta^{(4)} = \Phi.$$

Пусть далее в точке P уравнение (22) имеет пару различных корней. Если эти корни вещественные и имеют кратности 3 и 1, то уравнение приводится к виду

$$u_{\xi\eta}^{(1,3)} = \Phi,$$

если же они оба кратности 2, то уравнение приводится к виду

$$u_{\xi\eta}^{(2,2)} = \Phi.$$

Если в точке P алгебраическое уравнение имеет пару комплексно–сопряжённых корней кратности 2, то уравнение приводится к виду

$$u_\xi^{(4)} + 2u_{\xi\eta}^{(2,2)} + u_\eta^{(4)} = \Phi.$$

Пусть далее в точке P уравнение имеет три различных вещественных корня. Тогда один из них имеет кратность 2 и уравнение приводится к виду

$$u_{st}^{(3,1)} + 2u_{st}^{(2,2)} + u_{st}^{(1,3)} = \hat{\Phi}.$$

Если в точке P имеется пара комплексно–сопряжённых корней и один вещественный корень кратности 2, то уравнение приводится к виду

$$\overline{a}_2 u^{(2,2)}_{\xi\eta} + \overline{a}_3 u^{(1,3)}_{\xi\eta} + \overline{a}_4 u^{(4)}_{\eta} = \Phi.$$

Пусть наконец в точке P имеется 4 различных корня. Если среди них есть два вещественных, то уравнение приводится к виду

$$\overline{a}_1 u^{(3,1)}_{\xi\eta} + \overline{a}_2 u^{(2,2)}_{\xi\eta} + \overline{a}_3 u^{(1,3)}_{\xi\eta} = \Phi.$$

Предположим, что в точке P имеется 4 различных комплексных корня. Как было установлено в основной теореме, можно так подобрать замену переменных, что новые коэффициенты будут связаны соотношением

$$\begin{cases} \overline{a}_0 - \overline{a}_2 + \overline{a}_4 = 0, \\ \overline{a}_1 - \overline{a}_3 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\overline{a}_0 = \overline{a}_2 - \overline{a}_4$, $\overline{a}_1 = \overline{a}_3$, и уравнение примет вид

$$(\overline{a}_2 - \overline{a}_4) u^{(4)}_{\xi} + \overline{a}_3 u^{(3,1)}_{\xi\eta} + \overline{a}_2 u^{(2,2)}_{\xi\eta} + \overline{a}_3 u^{(1,3)}_{\xi\eta} + \overline{a}_4 u^{(4)}_{\eta} = \Phi.$$

Таким образом, нами установлена

Теорема 2. *Пусть в точке P определено уравнение* (19) *и соответствующее ему алгебраическое уравнение* (22). *Тогда*

а) *если в точке P и некоторой её окрестности уравнение* (22) *имеет один вещественный корень кратности* 4, *то в этой окрестности уравнение* (19) *приводится к виду*

$$u^{(4)}_{\eta} = \Phi.$$

б) *если в точке P и некоторой её окрестности уравнение* (22) *имеет два различных корня, то в этой окрестности уравнение* (19) *приводится к виду*

$$u^{(1,3)}_{\xi\eta} = \Phi,$$

в случае, если корни вещественные и имеют кратности 3 *и* 1*; и к виду*

$$u^{(2,2)}_{\xi\eta} = \Phi,$$

в случае, если оба корня вещественные и имеют кратности 2*; к виду*

$$u^{(4)}_{\xi} + 2u^{(2,2)}_{\xi\eta} + u^{(4)}_{\eta} = \Phi,$$

в случае, если корни комплексно–сопряжённые и имеют кратности 2.

в) *если в точке P и некоторой её окрестности уравнение* (22) *имеет три различных корня, то в этой окрестности уравнение* (19) *приводится к виду*

$$u^{(3,1)}_{\xi\eta} + 2u^{(2,2)}_{\xi\eta} + u^{(1,3)}_{\xi\eta} = \Phi,$$

в случае, если все корни вещественные; уравнение приводится к виду

$$\overline{a}_2 u^{(2,2)}_{\xi\eta} + \overline{a}_3 u^{(1,3)}_{\xi\eta} + \overline{a}_4 u^{(4)}_{\eta} = \Phi,$$

в случае, если два корня комплексно–сопряжённые и один — вещественный кратности 2.

г) *если в точке* P *и некоторой её окрестности уравнение* (22) *имеет четыре различных корня, то в этой окрестности уравнение* (19) *приводится к виду*

$$\overline{a}_1 u^{(3,1)}_{\xi\eta} + \overline{a}_2 u^{(2,2)}_{\xi\eta} + \overline{a}_3 u^{(1,3)}_{\xi\eta} = \Phi,$$

в случае, если среди корней содержатся два вещественных корня; уравнение приводится к виду

$$(\overline{a}_2 - \overline{a}_4) u^{(4)}_{\xi} + \overline{a}_3 u^{(3,1)}_{\xi\eta} + \overline{a}_2 u^{(2,2)}_{\xi\eta} + \overline{a}_3 u^{(1,3)}_{\xi\eta} + \overline{a}_4 u^{(4)}_{\eta} = \Phi.$$

в случае, если все корни комплексные.

Во всех пунктах Φ *— некоторая функция, зависящая от* ξ, η, *u и производных функции u по* ξ *и* η *порядков не превосходящих* 3.

Я не знаю, можно ли уравнения полученные в пунктах г), д) привести к более простому виду (исключая, разумеется тривиальное упрощение — разделить обе части уравнения на ненулевой коэффициент).

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

2. Джураев Т. Д., Попёлек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, №10. С. 1734–1745.

3. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1968.