Тема. *О линейности HNN–расширений.*

Напомним, что всякий гомоморфизм $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(K)$ группы G в общую линейную группу $\mathrm{GL}_n(K)$ над полем K называется *линейным представлением.* Если ядро $\mathrm{Ker}(\rho)$ тривиально, то представление ρ называется *точным.* Группа, обладающая точным линейным представлением называется *линейной.*

А. И. Мальцев [1] сформулировал вопрос о том, какие группы линейны. Он же нашел критерий линейности абелевых групп. В. Л. Нисневич [2] доказал, что свободное произведение двух линейных групп является линейной группой. Верфриц [3] нашел условия при которых свободное произведение с объединением является линейной группой. Аналогичный вопрос для HNN–расширений почти не исследован.

Вопрос. При каких условиях HNN–расширение

$$G^* = \langle G, t \mid\mid t^{-1}At = B, \quad \varphi\rangle$$

конечно порожденной линейной группы G со связанными подгруппами $A, B \leq G$ является линейной?

Возможные подходы. Начать исследования можно со случая, когда G — свободная или свободная абелева ранга 2 (случай, когда G — циклическая полностью исследован Р. Т. Вольвачевым [4]). Более того, интересен случай, когда $G = A$. При доказательстве линейности можно использовать метод расщепляемых координат Ю. И. Мерзлякова [5], а также подход Верфрица [3].

Для доказательства того, что группа не линейна можно использовать результат А. И. Мальцева о том, что всякая конечно порожденная линейная группа финитно аппроксимируема. Следовательно, если мы знаем, что некоторая конечно порожденная группа не является финитно аппроксимируемой, то она не может быть линейной. Финитная аппроксимируемость HNN–расширений исследовалась многими авторами [6–8]. В частности, получены критерии финитной аппроксимируемости HNN–расширений свободной и свободной абелевой групп.

Литература. 1) Мальцев А. И. Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами, Матем. сб., 8, № 3 (1940), 405–422.

2) Нисневич В. Л. О группах изоморфно представимых матрицами над коммутативным полем, Матем. сб., 8, № 3 (1940), 405–422.

3) Wehrfritz B. A. F. Generalized free products of linear groups, Proc. London Math. Soc., 27, (1973), 402–424.

4) Вольвачев Р. Т. Линейная представимость групп $G_{n,k,l} = \langle a, t \mid\mid t^{-1}a^k t = a^l\rangle$, Фунд. и прикл. матем., 4, № 4 (1998), 1415–1418.

5) Мерзляков Ю. И. Рациональные группы, 2–е изд., М.: Наука, 1987.

6) Baumslag B. and Tretkoff M. Residually finite HNN–extensions, Commun. Algebra, 2, № 6 (1978), 179–194.

7) Молдаванский Д. И. Финитная аппроксимируемость нисходящих HNN–расширений, Укр. матем. журн., 44, № 6 (1992), 842–845.

8) Andreadakis G., Raptis E. and Varsos D. A characterisation of residually finite HNN–extensions, Arch. Math., 50, (1988), 495–501.

Научный руководитель. Валерий Георгиевич Бардаков, кандидат физико–математических наук, старший научный сотрудник Института математики СО РАН (комн. 269). Основные научные интересы: теория групп, теория узлов, обратные задачи математической физики. Тел.: 33–24–86. E-mail: bardakov@math.nsc.ru