УДК 512.54

# ГРУППА КОС ГЕНЕТИЧЕСКОГО КОДА [1]

**В. Г. Бардаков**

**Аннотация**

Для каждого генетического кода с конечным числом порождающих и не более чем одним соотношением вводится группу кос этого генетического кода. Предложенная конструкция включает группу кос плоскости, группы кос замкнутых ориентируемых поверхностей, группы кос Артина-Брискорна серии $B$ и позволяет изучать все эти группы с единых позиций. Далее выясняется строение группы кос генетического кода, строится нормальная форма слов, исследуется кручение, вычисляется ширина вербальных подгрупп и устанавливаются некоторые другие свойства. Также установлено, что система определяющих соотношений группы кос двумерных многообразия, найденная в работе Скотта, противоречива.

В последние годы появилось много работ, посвященных группам кос и различным их обобщениям [1]–[9]. Это объясняется тесной связью теории групп кос с теорией узлов. Теория узлов привлекает внимание многих исследователей в связи с появлением новых методов и направлений, возникших в этой теории. Достаточно вспомнить о результатах Джонса [10], построившего новый полиномиальный инвариант узлов, о результатах В. А. Васильева [3], построившего инварианты конечного порядка, о результатах Бигелоу и Крамера [11, 12], доказавших линейность групп кос, а также о результате Деорнуа [13], доказавшего, что группа кос является правоупорядоченной. Кроме того, теория узлов тесно связана с другими областями математики и физики [14, 15].

Одним из первых обобщений группы кос являются группы кос замкнутых ориентируемых поверхностей, введенные Зарисским [16]. Затем в работе Скотта [17] рассматривались группы кос замкнутых поверхностей и найдены порождающие и определяющие соотношения этих групп, а также групп крашеных кос для этих поверхностей (систему порождающих и определяющих соотношений называют *генетическим кодом* данной группы). К сожалению, система соотношений, выписанная в этой работе является противоречивой (см. § 2 настоящей работы). Группы кос сферы и проективной плоскости отличаются от групп кос других поверхностей и, как правило, изучаются отдельно (см. [18, 19, 20] ).

Гонзалес-Менесис [21] нашел новое представление групп кос замкнутых поверхностей в виде системы порождающих и определяющих соотношений. Затем Белинджери [22] упростил это представление, а также нашел порождающие и определяющие соотношения группы кос поверхности с краем. В препринте [23] найдено положительное представление группы кос ориентируемой поверхности. Кроме того, в работах [21, 22] решена проблема равенства для соответствующих групп кос, а в препринте [23] решена проблема сопряженности для группы кос $B_2(T^2)$ на двух нитях тора $T^2$. В общем случае, проблема сопряженности для групп кос поверхностей остается открытой.

В предлагаемой работе напоминается определение группы кос многообразия (см. § 1), показано, что представление Скотта противоречиво (см. § 2). Как сообщил автору Белинджери,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №02–01–01118)

последний факт также заметили В. С. Куликов и Шимада. Далее, в § 3 для каждого генетического кода с конечным числом порождающих и не более чем одним соотношением мы введем группу кос этого генетического кода. Предложенная конструкция включает группу кос плоскости, группы кос замкнутых ориентируемых поверхностей, группы кос Артина-Брискорна серии $B$ и позволяет изучать все эти группы с единых позиций. В § 4 выясняется строение группы кос генетического кода, строится нормальная форма слов, исследуется кручение, вычисляется ширина вербальных подгрупп и устанавливаются некоторые другие свойства.

Результаты настоящей работы были анонсированы еще в 2000 г. (см. [24]), но по ряду причин не были своевременно опубликованы.

Благодарю всех участников семинара “Эварист Галуа”, прослушавших доказательства и внесших ряд полезных замечаний и предложений. Отдельно благодарю М. В. Нещадима за плодотворные дискуссии и полезные обсуждения. Также благодарю В. В. Вершинина, указавшего работу Зарисского.

## § 1. Группы кос многообразий

Напомним некоторые известные факты о группах кос многообразий (см. [25, § 1.1], [2]). Пусть $M$ — связное многообразие размерности $\geq 2$. *Конфигурационным пространством* $F_nM$, $n \in \mathbb{N}$, многообразия $M$ называется многообразие

$$F_nM = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \prod_{i=1}^{n} M \mid z_i \neq z_j \ \text{ при } \ i \neq j\}$$

упорядоченных наборов $n$ различных точек из $M$. Его фундаментальная группа $\pi_1(F_nM)$ называется *$n$–нитиевой группой крашеных кос многообразия* $M$ и обозначается символом $P_n(M)$. На множестве $F_nM$ определим отношение эквивалентности, полагая $z \sim z'$, если вектор $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in F_nM$ отличается от вектора $z' = (z_1', z_2', \dots, z_n') \in F_nM$ перестановкой компонент. Фундаментальная группа $\pi_1(F_nM/_\sim)$ фактор–многообразия $F_nM/_\sim$ называется *$n$–нитиевой группой кос многообразия* $M$ и обозначается символом $B_n(M)$. Естественная проекция $p : F_nM \longrightarrow F_nM/_\sim$ является регулярной накрывающей проекцией. Группа накрывающих преобразований — симметрическая группа $S_n$. Следовательно, существует канонический изоморфизм

$$\pi_1(F_nM/_\sim)/\pi_1(F_nM) \simeq B_n(M)/P_n(M) \simeq S_n.$$

Если $M$ — замкнутое гладкое многообразие, то отображение $F_nM \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} M$ индуцирует эпиморфизм $P_n(M) \longrightarrow \pi_1(M) \times \ldots \times \pi_1(M)$ группы крашеных кос $P_n(M)$ на прямое произведение $n$ экземпляров фундаментальной группы $\pi_1(M)$. Более того, если размерность многообразия $M$ больше двух, то этот эпиморфизм является инъективным. Поэтому наибольший интерес представляют группы кос двумерных многообразий. Далее мы будем считать, что $M$ является двумерным многообразием.

Группа кос $B_n = B_n(E^2)$ евклидовой плоскости $E^2$ задается порождающими $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ и определяющими соотношениями

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, ..., n-2,$$

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \quad \text{при } |i - j| \geq 2.$$

Группа $P_n = P_n(E^2)$ порождается элементами $a_{ij}$, $1 \leq i < j \leq n$, которые выражаются через порождающие группы $B_n$ следующим образом

$$a_{i,i+1} = \sigma_i^2,$$
$$a_{ij} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\ldots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\ldots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}, \quad i+1 < j \leq n.$$

Для группы крашеных кос $P_n$ существует эпиморфизм $\eta : P_n \longrightarrow P_{n-1}$ ядро которого $U_n = \ker(\eta)$ – свободная группа ранга $n-1$. Группа крашеных кос $P_n$ распадается в полупрямое произведение нормальной подгруппы $U_n$, которая свободно порождается элементами $a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{n-1,n}$ и группы $P_{n-1}$. Аналогично, $P_{n-1}$ является полупрямым произведением свободной группы $U_{n-1}$ со свободными порождающими $a_{1,n-1}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n-2,n-1}$ и подгруппы $P_{n-2}$ и т. д. Следовательно, группа $P_n$ имеет следующее разложение

$$P_n = U_n \leftthreetimes (U_{n-1} \leftthreetimes (\ldots \leftthreetimes (U_3 \leftthreetimes U_2))\ldots), \quad U_i \simeq F_{i-1}, \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Группа крашеных кос $P_n$ определяется соотношениями (при $\varepsilon = \pm 1$)

1) $a_{ik}^{-\varepsilon} a_{kj} a_{ik}^{\varepsilon} = (a_{ij}a_{kj})^{\varepsilon}\, a_{kj}\, (a_{ij}a_{kj})^{-\varepsilon}$,

2) $a_{km}^{-\varepsilon} a_{kj} a_{km}^{\varepsilon} = (a_{kj}a_{mj})^{\varepsilon}\, a_{kj}\, (a_{kj}a_{mj})^{-\varepsilon}$, $\quad m < j$,

3) $a_{im}^{-\varepsilon} a_{kj} a_{im}^{\varepsilon} = \left[a_{ij}^{-\varepsilon}, a_{mj}^{-\varepsilon}\right]^{\varepsilon} a_{kj} \left[a_{ij}^{-\varepsilon}, a_{mj}^{-\varepsilon}\right]^{-\varepsilon}$, $\quad i < k < m$,

4) $a_{im}^{-\varepsilon} a_{kj} a_{im}^{\varepsilon} = a_{kj}$, $\quad k < i; \quad m < j$ или $m < k$,

где $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$.

При этом порождающие группы кос действуют на порождающих группы крашеных кос по формулам

1) $\sigma_k^{-\varepsilon} a_{ij} \sigma_k^{\varepsilon} = a_{ij}$, $\quad k \neq i-1, i, j-1, j$,

2) $\sigma_i^{-\varepsilon} a_{i,i+1} \sigma_i^{\varepsilon} = a_{i,i+1}$,

3) $\sigma_{i-1}^{-1} a_{ij} \sigma_{i-1} = a_{i-1,j}$,

4) $\sigma_{i-1} a_{ij} \sigma_{i-1}^{-1} = a_{i-1,i} a_{i-1,j} a_{i-1,i}^{-1}$,

5) $\sigma_i^{-1} a_{ij} \sigma_i = a_{i+1,j}[a_{i,i+1}^{-1}, a_{ij}^{-1}]$, $\quad j \neq i+1$,

6) $\sigma_i a_{ij} \sigma_i^{-1} = a_{i+1,j}$, $\quad j \neq i+1$,

7) $\sigma_{j-1}^{-1} a_{ij} \sigma_{j-1} = a_{i,j-1}$,

8) $\sigma_{j-1} a_{ij} \sigma_{j-1}^{-1} = a_{ij}^{-1} a_{i,j-1} a_{ij}$,

9) $\sigma_j^{-1} a_{ij} \sigma_j = a_{ij} a_{i,j+1} a_{ij}^{-1}$,

10) $\sigma_j a_{ij} \sigma_j^{-1} = a_{i,j+1}$, $\quad 1 \leq i < j \leq n-1$,

(см. [26]).

Если $n \geq 3$, то центр группы $B_n$ — бесконечная циклическая группа, порожденная элементом

$$(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{n-1})^n = a_{12}(a_{13}a_{23})\ldots(a_{1n}a_{2n}\ldots a_{n-1,n}).$$

Если $M$ — компактное двумерное многообразие, отличное от сферы $S^2$ и проективной плоскости $P^2$, то группа кос $B_n(E^2)$ евклидовой плоскости $E^2$ вкладывается в группу кос $B_n(M)$ многообразия $M$ при всех $n \geq 1$.

Фадель и Нойвирт доказали, что если $M$ — компактное двумерное многообразие, отличное от $S^2$ и $P^2$, то в группе кос $B_n(M)$ нет элементов конечного порядка.

Группа кос $B_n(S^2)$ сферы $S^2$ порождается элементами $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}$ и определяется соотношениями

$$\delta_i\delta_{i+1}\delta_i = \delta_{i+1}\delta_i\delta_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, ..., n-2,$$

$$\delta_i\delta_j = \delta_j\delta_i \quad \text{при } |i-j| \geq 2,$$

$$\delta_1\delta_2\ldots\delta_{n-2}\delta_{n-1}^2\delta_{n-2}\ldots\delta_2\delta_1 = 1.$$

При этом $P_2(S^2) = 1$, $P_3(S^2) = B_2(S^2) \simeq \mathbb{Z}_2$, $B_3(S^2)$ — метациклическая группа порядка 12. При $n \geq 3$ центр группы $B_n(S^2)$ — подгруппа порядка 2, порожденная элементом $(\delta_1\delta_2\ldots\delta_{n-1})^n$. Группа $B_{n-1}(S^2)$ не вложима в группу $B_n(S^2)$ при $n \geq 3$.

## § 2. О представлении Скотта

Если $T_g$ – компактная ориентируемая поверхность рода $g \geq 1$, то порождающие и соотношения группы кос $B_n(T_g)$, $n \geq 1$, найдены в работе [17]. Покажем, что эта система соотношений противоречива.

Положим $T = T_1$ — компактная ориентируемая поверхность рода 1 (тор). Рассмотрим группу кос $B_2(T)$ на двух нитях и ее подгруппу крашеных кос $P_2(T)$. Как следует из теоремы 1.3 работы Скотта, группа $P_2(T)$ порождается элементами

$$a_{12}, \quad \rho_{11}, \quad \rho_{12}, \quad \rho_{21}, \quad \rho_{22}$$

и определяется соотношениями

$$[\rho_{i2}, \rho_{i1}] = a_{12}, \qquad i = 1, 2, \tag{1.1}$$

$$\rho_{2i}^{-1}\rho_{1i}\rho_{2i} = a_{12}^{-1}\rho_{1i}a_{12}, \qquad i = 1, 2, \tag{2.1}$$

$$\rho_{2i}\rho_{1i}\rho_{2i}^{-1} = \rho_{1i}^{-1}a_{12}\rho_{1i}a_{12}^{-1}\rho_{1i}, \qquad i = 1, 2, \tag{2.2}$$

$$\rho_{1i}^{-1}\rho_{2i}\rho_{1i} = \rho_{2i}a_{12}^{-1}\rho_{2i}a_{12}\rho_{2i}^{-1}, \qquad i = 1, 2, \tag{2.3}$$

$$\rho_{1i}\rho_{2i}\rho_{1i}^{-1} = a_{12}\rho_{2i}a_{12}^{-1}, \qquad i = 1, 2, \tag{2.4}$$

$$\rho_{21}^{-1}\rho_{12}\rho_{21} = a_{12}^{-1}\rho_{11}a_{12}\rho_{11}^{-1}\rho_{12}a_{12}, \tag{3.1}$$

$$\rho_{21}\rho_{12}\rho_{21}^{-1} = \rho_{11}^{-1}a_{12}\rho_{11}a_{12}^{-1}\rho_{12}\rho_{11}^{-1}a_{12}^{-1}\rho_{11}, \tag{3.2}$$

$$\rho_{11}^{-1}\rho_{22}\rho_{11} = \rho_{22}\rho_{21}a_{12}\rho_{21}^{-1}, \tag{3.3}$$

$$\rho_{11}\rho_{22}\rho_{11}^{-1} = \rho_{22}a_{12}^{-1}, \tag{3.4}$$

$$\rho_{22}^{-1}\rho_{11}\rho_{22} = a_{12}^{-1}\rho_{11}, \tag{4.1}$$

$$\rho_{22}\rho_{11}\rho_{22}^{-1} = \rho_{12}^{-1}a_{12}\rho_{12}\rho_{11}, \tag{4.2}$$

$$\rho_{12}^{-1}\rho_{21}\rho_{12} = \rho_{22}a_{12}^{-1}\rho_{22}^{-1}\rho_{21}a_{12}^{-1}\rho_{22}a_{12}\rho_{22}^{-1}, \tag{4.3}$$

$$\rho_{12}\rho_{21}\rho_{12}^{-1} = a_{12}\rho_{21}\rho_{22}^{-1}a_{12}\rho_{22}a_{12}^{-1}. \tag{4.4}$$

Из теоремы 1.4 следует, что группа $B_2(T)$ порождается элементами

$$\sigma_1, \quad \rho_{11}, \quad \rho_{12},$$

которые связаны с порождающими группы $P_2(T)$ равенствами

$$a_{12} = \sigma_1^2, \quad \rho_{21} = \sigma_1^{-1}\rho_{11}\sigma_1, \quad \rho_{22} = \sigma_1^{-1}\rho_{12}\sigma_1.$$

Группа $A_1 = \langle a_{12}, \rho_{11}, \rho_{12} \rangle$ изоморфна свободной группе со свободными порождающими $\rho_{11}, \rho_{12}$, которая нормальна в группе $P_2(T)$.

Из соотношения (1.1) следует, что в группе $A_1$ выполнено соотношение

$$[\rho_{12}, \rho_{11}] = a_{12}. \tag{5}$$

Сопряжем обе части этого соотношения элементом $\rho_{22}$. Тогда в левой части, используя соотношения (2.1) и (4.1), получим выражение

$$[\rho_{12}, \rho_{11}]^{\rho_{22}} = [a_{12}^{-1}\rho_{12}a_{12}, a_{12}^{-1}\rho_{11}] = a_{12}^{-1}\rho_{12}^{-1}a_{12}\rho_{11}^{-1}\rho_{12}\rho_{11}.$$

В правой части получим выражение

$$\rho_{22}^{-1} a_{12} \rho_{22} = a_{12}^{-1} \rho_{12} a_{12} \rho_{12}^{-1} a_{12}. \tag{6}$$

Действительно, из соотношения (2.4) имеем равенство

$$\rho_{22}^{-1} a_{12} \rho_{22} = (\rho_{22}^{-1} \rho_{12} \rho_{22}) \rho_{12}^{-1} a_{12}.$$

Применяя к выражению, стоящему в скобках, соотношение (2.1) при $i = 2$, получим равенство (6). Следовательно, в свободной группе $A_1$ мы имеем равенство

$$a_{12}^{-1} \rho_{12}^{-1} a_{12} \rho_{11}^{-1} \rho_{12} \rho_{11} = a_{12}^{-1} \rho_{12} a_{12} \rho_{12}^{-1} a_{12},$$

или, после умножения слева на $a_{12}$:

$$\rho_{12}^{-1} a_{12} \rho_{11}^{-1} \rho_{12} \rho_{11} = \rho_{12} a_{12} \rho_{12}^{-1} a_{12}. \tag{7}$$

Группа $A_1$ свободно порождается элементами $\rho_{11}, \rho_{12}$, а элемент $a_{12}$ выражается через них при помощи равенства (5). Избавившись в равенстве (7) от порождающего $a_{12}$, получим равенство

$$\rho_{12}^{-2} \rho_{11}^{-1} \rho_{12} = \rho_{11}^{-1} \rho_{12} \rho_{11} \rho_{12}^{-2} \rho_{11}^{-1}.$$

Но в свободной группе со свободными порождающими $\rho_{11}$ и $\rho_{12}$ такое равенство невозможно. Следовательно, система определяющих соотношений Скотта для групп кос двумерных компактных ориентируемых многообразий противоречива. Аналогичным образом можно показать, что и система определяющих соотношений, построенная в теоремах 1.1 и 1.2, для групп кос неориентируемых многообразий также противоречива.

## § 3. Группа кос генетического кода

Рассмотрим генетический код

$$\mathcal{G} = \langle X \parallel R \rangle, \tag{1}$$

где $X = \{x_1, \ldots, x_l\}$ — конечное множество букв, а $R$ — либо пустое множество, либо множество, содержащее одно слово в алфавите $X^{\pm} = \{x_1^{\pm}, \ldots, x_l^{\pm}\}$. При этом мы будем различать случаи, когда $R = \varnothing$ — пустое множество и $R = \{e\}$ — множество, содержащее тривиальное слово. Группу, определенную генетическим кодом (1), будем обозначать символом $G(\mathcal{G})$. Генетическому коду (1) и натуральному числу $n$ сопоставим группу $B_n(\mathcal{G})$, которую будем называть *$n$—нитиевой группой кос генетического кода $\mathcal{G}$*. Если $n = 1$, то положим $B_1(\mathcal{G}) = G(\mathcal{G})$. Если $n > 1$, $R = \{r\}$, то группа $B_n(\mathcal{G})$ задается порождающими $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n-1}$, $x_1, \ldots, x_l$ и определяющими соотношениями

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad i = 1, 2, ..., n-2, \tag{2}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i - j| \geq 2, \tag{3}$$

$$\sigma_i x_j = x_j \sigma_i, \quad i = 2, 3, ..., n-1, \quad j = 1, 2, ..., l, \tag{4}$$

$$x_j (\sigma_1^{-1} x_j \sigma_1^{-1}) = (\sigma_1^{-1} x_j \sigma_1^{-1}) x_j, \quad j = 1, 2, ..., l, \tag{5}$$

$$x_j (\sigma_1^{-1} x_i^{-1} \sigma_1) x_j^{-1} (\sigma_1^{-1} x_i \sigma_1) = \sigma_1^2, \quad 1 \leq i < j \leq l, \tag{6}$$

$$r = \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}^2\sigma_{n-2}\dots\sigma_2\sigma_1. \tag{7}$$

Так определенный класс групп $B_n(\mathcal{G})$ включает в себя многие известные группы. Приведем соответствующие примеры.

Если $\mathcal{G}_\varnothing^\varnothing = \langle\varnothing \parallel \varnothing\rangle$ — пустой генетический код, то соотношения (4)–(7) отсутствуют и $B_n(\mathcal{G}_\varnothing^\varnothing) = B_n(E^2)$ — группа кос евклидовой плоскости. Если $\mathcal{G}_0^\varnothing = \langle\varnothing \parallel e = e\rangle$, то соотношения (4)–(6) отсутствуют и $B_n(\mathcal{G}_0^\varnothing) = B_n(S^2)$ — группа кос двумерной сферы.

Рассмотрим генетические коды

$$\mathcal{G}_\varnothing^l = \langle x_1, x_2, \dots, x_l \mid \varnothing\rangle, \quad \mathcal{G}_0^l = \langle x_1, x_2, \dots, x_l \mid e = e\rangle, \quad \mathcal{G}_1^l = \langle x_1, x_2, \dots, x_l \mid r = e\rangle, \quad l \geq 1,$$

где $r$ – нетривиальное слово. При этом мы считаем, что группа $G(\mathcal{G}_1^l)$ не является свободной так как в противном случае ее можно задать генетическим кодом с пустым множеством соотношений. Очевидно, $G(\mathcal{G}_\varnothing^l) \simeq G(\mathcal{G}_0^l) \simeq F_l$ – свободная группа со свободными порождающими $x_1, x_2, \dots, x_l$; $G(\mathcal{G}_1^l)$ – группа с одним определяющим соотношением, которая является гомоморфным образом групп $G(\mathcal{G}_\varnothing^l)$ и $G(\mathcal{G}_0^l)$.

Если

$$\mathcal{G}_1^{2p} = \langle x_1, \dots, x_{2p} \parallel x_1x_2^{-1}x_3\dots x_{2p}^{-1}x_1^{-1}x_2x_3^{-1}\dots x_{2p}\rangle, \quad p \geq 1,$$

— генетический код фундаментальной группы компактной ориентируемой поверхности рода $p$, то $B_n(\mathcal{G}_1^{2p})$ — группа кос этой поверхности, введенная Зарисским [16]. Если $\mathcal{G} = \langle x \parallel \varnothing\rangle$, то $B_n(\mathcal{G})$ — группа Артина, соответствующая группе Кокстера типа $B_n$ [31]. Действительно, группе Коксетера типа $B$ соответствует группа Артина с порождающими $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n-1}$, $\tau$, где порождающие $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n-1}$ удовлетворяют соотношениям (2)–(3), а соотношения, содержащие $\tau$ имеют вид

$$\sigma_i\tau = \tau\sigma_i, \quad i = 2, 3, ..., n-1, \tag{8}$$

$$\tau\sigma_1\tau\sigma_1 = \sigma_1\tau\sigma_1\tau, \tag{9}$$

т. е. соотношения (8) соответствуют соотношениям (4), а переписав соотношения (9) в виде

$$\tau^{-1}\sigma_1^{-1}\tau^{-1}\sigma_1^{-1} = \sigma_1^{-1}\tau^{-1}\sigma_1^{-1}\tau^{-1},$$

и полагая $\tau^{-1} = x$, получим группу кос $B_n(\langle x \parallel \varnothing\rangle)$. Отметим, что эта группа связана с зацеплениями в полнотории подобно тому, как группа кос евклидовой плоскости связана с зацеплениями в трехмерной сфере $S^3$ (см. [7]).

Группа кос $B_n(\mathcal{G})$ вообще говоря, зависит от генетического кода $\mathcal{G}$, а не от определяемой им группы $G(\mathcal{G})$. Так, например, $\mathcal{G}_\varnothing^l$ и $\mathcal{G}_0^l$ определяют изоморфные группы, а соответствующие им группы кос $B_n(\mathcal{G}_\varnothing^l)$ и $B_n(\mathcal{G}_0^l)$ не изоморфны при $n > 1$.

Попробуем выяснить, как связаны соответствующие группы кос $B_n(\mathcal{G}_\varnothing^l)$, $B_n(\mathcal{G}_0^l)$ и $B_n(\mathcal{G}_1^l)$ при $n \geq 2$.

Символом $\mathcal{G}_\varnothing$ далее будем обозначать либо генетический код $\mathcal{G}_\varnothing^\varnothing$, либо генетический код $\mathcal{G}_\varnothing^l$. Символом $\mathcal{G}_0$ — либо генетический код $\mathcal{G}_0^\varnothing$, либо генетический код $\mathcal{G}_0^l$. Символом $\mathcal{G}_1$ будем обозначать любой генетический код $\mathcal{G}_1^l$, содержащий одно нетривиальное соотношение. Чтобы указать явный вид соотношения $r$ генетического кода $\mathcal{G}_1^l$ будем писать $\mathcal{G}_1^l(r)$.

Заметим, что в группе $B_n(\mathcal{G}_\varnothing)$ отсутствует соотношение (7). Следовательно, существуют гомоморфизмы $\mu_1 : B_n(\mathcal{G}_\varnothing) \longrightarrow B_n(\mathcal{G}_0)$, $\mu_2 : B_n(\mathcal{G}_\varnothing) \longrightarrow B_n(\mathcal{G}_1)$. При этом ядро первого гомоморфизма $\ker(\mu_1)$ является нормальным замыканием элемента $\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}^2\sigma_{n-2}\dots\sigma_2\sigma_1$ в группе $B_n(\mathcal{G}_\varnothing)$, а ядро второго гомоморфизма является нормальным замыканием элемента $r^{-1}\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}^2\sigma_{n-2}\dots\sigma_2\sigma_1$.

Для группы $B_n(\mathcal{G})$, $n > 1$, существует гомоморфизм $\nu$ на симметрическую группу $S_n$, заданный на порождающих равенствами:

$$\nu(\sigma_i) = (i, i+1), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1; \quad \nu(x_j) = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, l.$$

Ядро этого гомоморфизма $\ker(\nu)$ будем называть *группой крашеных кос* на $n$ нитях и обозначать символом $P_n(\mathcal{G})$.

Для того, чтобы выяснить строение группы $B_n(\mathcal{G})$, определим ее подгруппу $D_n = D_n(\mathcal{G})$, состоящую из таких элементов, которые под действием гомоморфизма $\nu$ переходят в подстановки, оставляющие символ 1 на месте.

Введем следующие обозначения:

$$x_{1i} = x_i, \quad x_{k+1,i} = \sigma_k^{-1} x_{ki} \sigma_k, \quad i = 1, 2, \ldots, l, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

В этих обозначениях справедлива следующая лемма, являющаяся аналогом соответствующей леммы из работы Зарисского.

**Лемма 1.** *В группе $D_n$ справедливы следующие формулы сопряжения*

1) $\sigma_k^{\varepsilon} x_{1i} \sigma_k^{-\varepsilon} = x_{1i}, \qquad \varepsilon = \pm 1, \quad k = 2, 3, \ldots, n-1; \quad i = 1, 2, \ldots, l$

2) $x_{2i} a_{12} x_{2i}^{-1} = x_{1i}^{-1} a_{12} x_{1i},$

3) $x_{2i}^{-1} a_{12} x_{2i} = a_{12}^{-1} x_{1i} a_{12} x_{1i}^{-1} a_{12},$

4) $x_{2i}^{-\varepsilon} a_{1j} x_{2i}^{\varepsilon} = a_{1j}, \qquad j > 2,$

5) $x_{2i}^{-1} x_{1i} x_{2i} = a_{12}^{-1} x_{1i} a_{12},$

6) $x_{2i} x_{1i} x_{2i}^{-1} = x_{1i}^{-1} a_{12} x_{1i} a_{12}^{-1} x_{1i},$

7) $x_{2i}^{-1} x_{1j} x_{2i} = a_{12}^{-1} x_{1j}, \qquad i < j,$

8) $x_{2i} x_{1j} x_{2i}^{-1} = (x_{1i}^{-1} a_{12} x_{1i}) x_{1j}, \qquad i < j,$

9) $x_{2j} x_{1i} x_{2j}^{-1} = (x_{1j}^{-1} a_{12} x_{1j}) a_{12}^{-1} x_{1i} (x_{1j}^{-1} a_{12}^{-1} x_{1j}), \qquad i < j,$

10) $x_{2j}^{-1} x_{1i} x_{2j} = (a_{12}^{-1} x_{1j} a_{12} x_{1j}^{-1}) x_{1i} a_{12}, \qquad i < j.$

**Доказательство.** Формула 1) следует из определяющего соотношения (4).

Из соотношения (5) следует соотношение

$$x_{1i}(\sigma_1^{-1} x_{1i} \sigma_1^{-1}) = (\sigma_1^{-1} x_{1i} \sigma_1^{-1}) x_{1i}, \quad i = 1, 2, \ldots, l. \tag{10}$$

Отсюда

$$(\sigma_1 x_{1i}^{-1} \sigma_1) x_{1i} (\sigma_1^{-1} x_{1i} \sigma_1^{-1}) = x_{1i}, \quad i = 1, 2, \ldots, l.$$

Сопрягая обе части этого равенства элементом $a_{12} = \sigma_1^2$, получим равенство 5). Сопрягая далее равенство 5) элементом $x_{2i}^{-1}$, получим

$$x_{1i} = x_{2i} a_{12}^{-1} x_{1i} a_{12} x_{2i}^{-1}. \tag{11}$$

С другой стороны, из (10) следует, что

$$\sigma_1^{-1}x_{1i}\sigma_1^{-1}x_{1i} = a_{12}^{-1}x_{1i}\sigma_1^{-1}x_{1i}\sigma_1,$$

т. е.

$$(\sigma_1^{-1}x_{1i}\sigma_1)a_{12}^{-1}x_{1i} = a_{12}^{-1}x_{1i}(\sigma_1^{-1}x_{1i}\sigma_1).$$

Вспоминая, что $\sigma_1^{-1}x_{1i}\sigma_1 = x_{2i}$ видим, что элементы $x_{2i}$ и $a_{12}^{-1}x_{1i}$ перестановочны. Следовательно, (11) можно записать в виде

$$x_{1i} = a_{12}^{-1}x_{1i}x_{2i}a_{12}x_{2i}^{-1},$$

т. е.

$$x_{1i}^{-1}a_{12}x_{1i} = x_{2i}a_{12}x_{2i}^{-1}, \tag{12}$$

а это в точности равенство 2).

Сопряжем обе части соотношения (12) элементом $\sigma_1$, получим

$$(\sigma_1^{-1}x_{1i}^{-1}\sigma_1)a_{12}(\sigma_1^{-1}x_{1i}\sigma_1) = a_{12}^{-1}x_{1i}a_{12}x_{1i}^{-1}a_{12}$$

и равенство 3) установлено.

Для доказательства 4) вспомним, что $a_{1j} = \sigma_1^{-1}\ldots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^2\sigma_{j-2}\ldots\sigma_1$, а потому

$$x_{2i}^{\varepsilon}a_{1j}x_{2i}^{-\varepsilon} = (\sigma_1^{-1}x_{1i}^{\varepsilon}\sigma_1)a_{1j}(\sigma_1^{-1}x_{1i}^{-\varepsilon}\sigma_1) = \sigma_1^{-1}x_{1i}^{\varepsilon}a_{2j}x_{1i}^{-\varepsilon}\sigma_1 = \sigma_1^{-1}a_{2j}\sigma_1 = a_{1j},$$

т. е. равенство 4) справедливо.

Сопряжем обе части равенства 5) элементом $a_{12}^{-1}x_{1i}$. Получим

$$x_{1i}^{-1}a_{12}x_{2i}^{-1}x_{1i}x_{2i}a_{12}^{-1}x_{1i} = x_{1i}.$$

Воспользовавшись тем, что элемент $x_{2i}$ перестановочен с $a_{12}^{-1}x_{1i}$, перепишем последнее равенство в виде

$$x_{2i}^{-1}x_{1i}^{-1}a_{12}x_{1i}a_{12}^{-1}x_{1i}x_{2i} = x_{1i}.$$

Сопрягая обе части этого равенства элементом $x_{2i}^{-1}$, получим соотношение 6).

Заметим, что определяющее соотношение (6) группы $B_n(\mathcal{G})$ можно записать в виде

$$x_{1j}x_{2i}^{-1}x_{1j}^{-1}x_{2i} = a_{12}, \quad j > i.$$

Из этого равенства следует 7).

Для доказательства 8) сопряжем обе части равенства 7) элементом $x_{2i}^{-1}$, получим

$$x_{1j} = x_{2i}a_{12}^{-1}x_{1j}x_{2i}^{-1}, \quad j > i.$$

Умножим обе части этого равенства слева на $x_{2i}a_{12}x_{2i}^{-1}$ и воспользовавшись 2), получим требуемое равенство.

Сопряжем обе части соотношения

$$x_{1j}x_{2i}^{-1}x_{1j}^{-1}x_{2i} = a_{12}, \quad j > i,$$

справедливого в группе $B_n(\mathcal{G})$ (см. соотношение (6)), порождающим $\sigma_1$. Получим

$$x_{2j}a_{12}^{-1}x_{1i}^{-1}a_{12}x_{2j}^{-1}a_{12}^{-1}x_{1i}a_{12} = a_{12}.$$

Умножая обе части этого равенства справа на $a_{12}^{-1}x_{1i}^{-1}a_{12}$ и переходя к обратным элементам, придем к равенству

$$(x_{2j}a_{12}^{-1}x_{2j}^{-1})(x_{2j}x_{1i}x_{2j}^{-1})(x_{2j}a_{12}x_{2j}^{-1}) = a_{12}^{-1}x_{1i}.$$

Отсюда,

$$x_{2j}x_{1i}x_{2j}^{-1} = (x_{2j}a_{12}x_{2j}^{-1})a_{12}^{-1}x_{1i}(x_{2j}a_{12}^{-1}x_{2j}^{-1}).$$

Воспользовавшись равенством 2), получим 9).

Для доказательства пункта 10) сопряжем обе части равенства 9) элементом $x_{2j}$:

$$x_{1i} = (x_{2j}^{-1}x_{1j}^{-1}x_{2j})(x_{2j}^{-1}a_{12}x_{2j})(x_{2j}^{-1}x_{1j}x_{2j})(x_{2j}^{-1}a_{12}^{-1}x_{2j})(x_{2j}^{-1}x_{1i}x_{2j})(x_{2j}^{-1}x_{1j}^{-1}x_{2j})(x_{2j}^{-1}a_{12}^{-1}x_{2j})(x_{2j}^{-1}x_{1j}x_{2j}).$$

Воспользовавшись равенствами 3) и 5), приходим к равенству

$$x_{1i} = x_{1j}a_{12}^{-1}x_{1j}^{-1}a_{12}(x_{2j}^{-1}x_{1i}x_{2j})a_{12}^{-1}.$$

Отсюда,

$$x_{2j}^{-1}x_{1i}x_{2j} = (a_{12}^{-1}x_{1j}a_{12}x_{1j}^{-1})x_{1i}a_{12},$$

а это и есть равенство 10). Лемма доказана.

**Лемма 2.** 1) *В качестве множества представителей правых смежных классов группы* $B_n(\mathcal{G})$ *по подгруппе* $D_n$ *можно выбрать множество* $M_n = \{1, \sigma_1, \sigma_2\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\ldots\sigma_2\sigma_1\}$.
2) *Группа* $D_n$ *порождается элементами* $a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}, x_{1k}, x_{2k}, k = 1, 2, \ldots, l$.
3) *Подгруппа* $U_n = \langle a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}, x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1l}\rangle$ *является нормальной в* $D_n$.

**Доказательство.** 1) Обозначим $m_0 = 1$, $m_i = \sigma_i\sigma_{i-1}\ldots\sigma_2\sigma_1$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Заметим, что образ элемента $m_i$ в группе $S_n$ переводит символ 1 в символ $i+1$ (мы рассматриваем произведение подстановок справа налево). Следовательно, $M_n$ является множеством представителей правых смежных классов группы $B_n(\mathcal{G})$ по подгруппе $D_n$. Более того, $M_n$ образует шрайерову систему представителей.

Для доказательства пункта 2) воспользуемся методом Рейдемейстера–Шрайера. Пусть $u \longmapsto \overline{u}$ — функция, выбирающая правые представители группы $B_n(\mathcal{G})$ по подгруппе $D_n$. Тогда

$$D_n = \langle d_{x,m} = (\overline{xm})^{-1}xm \mid m \in M_n, x \in \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}, x_1, x_2, \ldots, x_l\}\rangle.$$

Покажем, что если $x = \sigma_i$ для некоторого $i = 1, 2, \ldots, n-1$, то

$$d_{\sigma_i,m_j} = \begin{cases} \sigma_i & \text{при } i > j+1, \\ 1 & \text{при } i = j+1, \\ a_{1,i+1} & \text{при } i = j, \\ \sigma_{i+1} & \text{при } i < j. \end{cases}$$

Действительно, при $i > j+1$ имеем

$$d_{\sigma_i,m_j} = (\overline{\sigma_i m_j})^{-1}\sigma_i m_j = m_j^{-1}\sigma_i m_j = \sigma_i.$$

При $i = j+1$

$$d_{\sigma_i,m_{i-1}} = (\overline{\sigma_i m_{i-1}})^{-1}\sigma_i m_{i-1} = m_i^{-1}\sigma_i m_{i-1} = m_i^{-1}m_i = 1.$$

При $i = j$

$$d_{\sigma_i,m_i} = (\overline{\sigma_i\sigma_i m_{i-1}})^{-1}\sigma_i^2 m_{i-1} = m_{i-1}^{-1}\sigma_i^2 m_{i-1} = m_{i-2}^{-1}\sigma_i\sigma_{i-1}^2\sigma_i^{-1}m_{i-2} =$$

$$= \sigma_i m_{i-3}^{-1} (\sigma_{i-2}^{-1} \sigma_{i-1}^2 \sigma_{i-2}) m_{i-3} \sigma_i^{-1} = \sigma_i m_{i-3}^{-1} \sigma_{i-1} \sigma_{i-2}^2 \sigma_{i-1}^{-1} m_{i-3} \sigma_i^{-1} = \sigma_i \sigma_{i-1} m_{i-3}^{-1} \sigma_{i-2}^2 m_{i-3} \sigma_{i-1}^{-1} \sigma_i =$$

$$= \ldots = \sigma_i \sigma_{i-1} \ldots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2^{-1} \ldots \sigma_{i-1}^{-1} \sigma_i^{-1} = a_{1i}.$$

Наконец, при $i < j$ требуемое равенство получается из следующей цепочки:

$$d_{\sigma_i, m_j} = (\overline{\sigma_i m_j})^{-1} \sigma_i m_j = m_j^{-1} \sigma_i m_j =$$

$$= \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \ldots \sigma_{i+1}^{-1} (\sigma_{i+2}^{-1} \ldots \sigma_j^{-1} \sigma_i \sigma_j \ldots \sigma_{i+2}) \sigma_{i+1} \ldots \sigma_2 \sigma_1 = m_{i+1}^{-1} \sigma_i m_{i+1} = m_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} (\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i) m_{i-1} =$$

$$= m_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} m_{i-1} = m_i^{-1} \sigma_i m_{i-1} \sigma_{i+1} = m_i^{-1} m_i \sigma_{i+1} = \sigma_{i+1}.$$

Далее, если $x = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, l$, то

$$d_{x_i, m_j} = \begin{cases} x_i & \text{при } j = 0, \\ x_{2i} & \text{при } j = 1, 2, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Действительно,

$$d_{x_i, 1} = (\overline{x_i})^{-1} x_i = x_i, \quad d_{x_i, m_j} = \overline{m_j}^{-1} x_i m_j = \sigma_1^{-1} x_i \sigma_1 = x_{2i}, \quad i = 1, 2, \ldots, l, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Следовательно, пункт 2) леммы установлен.

Утверждение 3) непосредственно вытекает из установленного пункта 2), формул сопряжения в группе $B_n$ и леммы 1.

Используя эту лемму, мы можем всякий элемент $w \in B_n(\mathcal{G})$ представить в виде произведения

$$w = w_1 m_{n, i_1}, \quad w_1 \in D_n, \quad m_{n, i_1} = m_{i_1} = \sigma_{i_1} \sigma_{i_1 - 1} \ldots \sigma_1 \in M_n,$$

а элемент $w_1$, в свою очередь, представить в виде

$$w_1 = w_2 u_n,$$

где $w_2 \in \langle \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2l} \rangle$, $u_n \in U_n$. Обозначим символом $\overline{B}_{n-1}$ подгруппу группы $B_n(\mathcal{G})$ порожденную элементами $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}$, $x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2l}$. Справедлива

**Лемма 3.** *В группе $\overline{B}_{n-1} = \langle \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2l} \rangle$ справедливы соотношения*

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad i = 2, 3, ..., n-2, \tag{13}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i - j| \geq 2, \tag{14}$$

$$\sigma_i x_{2k} = x_{2k} \sigma_i, \quad i = 3, 4, ..., n-1, \quad k = 1, 2, ..., l, \tag{15}$$

$$x_{2k} (\sigma_2^{-1} x_{2k} \sigma_2^{-1}) = (\sigma_2^{-1} x_{2k} \sigma_2^{-1}) x_{2k}, \quad k = 1, 2, ..., l, \tag{16}$$

$$x_{2j} (\sigma_2^{-1} x_{2i}^{-1} \sigma_2) x_{2j}^{-1} (\sigma_2^{-1} x_{2i} \sigma_2) = \sigma_2^2, \quad 1 \leq i < j \leq l, \tag{17}$$

$$r_2 = \sigma_2 \sigma_3 \ldots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \ldots \sigma_3 \sigma_2 a_{12}. \tag{18}$$

*где слово $r_2$ получается из $r_1 = r$ при сопряжении элементом $\sigma_1$, т. е. при замене всех элементов $x_{1k} = x_k$, входящих в $r$, элементами $x_{2k}$, $k = 1, 2, \ldots, l$.*

**Доказательство.** Справедливость соотношений (13)–(14) очевидна. Соотношение (15) получается из соотношения (4) при $i = 3, 4, \ldots, n-1$, сопряжением порождающим $\sigma_1$. Для доказательства соотношения (16) рассмотрим соотношение (5):

$$x_{1k} (\sigma_1^{-1} x_{1k} \sigma_1^{-1}) = (\sigma_1^{-1} x_{1k} \sigma_1^{-1}) x_{1k}, \quad k = 1, 2, ..., l,$$

группы $B_n(\mathcal{G})$. Сопряжем обе его части элементом $\sigma_2$ и воспользовавшись перестановочностью $\sigma_2$ и $x_{1k}$, получим

$$x_{1k}(\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2 x_{1k}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2) = (\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2 x_{1k}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2)x_{1k}.$$

Применяя далее соотношение $\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2 = \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}$, получим

$$x_{1k}(\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}x_{1k}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}) = (\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}x_{1k}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1})x_{1k}.$$

Сопрягая обе части этого равенства элементом $\sigma_1$, имеем

$$(\sigma_1^{-1}x_{1k}\sigma_1)\sigma_2^{-1}(\sigma_1^{-1}x_{1k}\sigma_1)\sigma_2^{-1} = \sigma_2^{-1}(\sigma_1^{-1}x_{1k}\sigma_1)\sigma_2^{-1}(\sigma_1^{-1}x_{1k}\sigma_1).$$

Так как $\sigma_1^{-1}x_{1k}\sigma_1 = x_{2k}$, то отсюда получаем соотношение (16).

Установим соотношение (17). Для этого рассмотрим соотношение

$$x_{1j}(\sigma_1^{-1}x_{1i}^{-1}\sigma_1)x_{1j}^{-1}(\sigma_1^{-1}x_{1i}\sigma_1) = \sigma_1^2, \quad j > i,$$

выполненное в группе $B_n(\mathcal{G})$ (см. соотношение (6)), и сопряжем обе его части элементом $\sigma_2$. Получим

$$\sigma_2^{-1}x_{1j}(\sigma_1^{-1}x_{1i}^{-1}\sigma_1)x_{1j}^{-1}(\sigma_1^{-1}x_{1i}\sigma_1)\sigma_2 = \sigma_2^{-1}\sigma_1^2\sigma_2.$$

Воспользовавшись тем, что $\sigma_2$ перестановочен с любым порождающим $x_{1k}$, перепишем последнее равенство в таком виде

$$x_{1j}(\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2)x_{1i}^{-1}(\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2)x_{1j}^{-1}(\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2)x_{1i}(\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2) = \sigma_2^{-1}\sigma_1^2\sigma_2.$$

Применяя далее равенства

$$\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2 = \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}, \quad \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1},$$

получим

$$x_{1j}(\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1})x_{1i}^{-1}(\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1})x_{1j}^{-1}(\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1})x_{1i}(\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}) = \sigma_1\sigma_2^2\sigma_1^{-1}.$$

Сопряжем обе части этого равенства элементом $\sigma_1$ и вспоминая, что $x_{2k} = \sigma_1^{-1}x_{1k}\sigma_1$, $k = 1, 2, \ldots, l$ получим соотношение (17).

Соотношение (18) получается из соотношения (7) сопряжением элементом $\sigma_1$. Лемма доказана.

Из этой леммы следует, что группа $\overline{B}_{n-1}$ изоморфна группе кос $B_{n-1}(\mathcal{G})$ в случае, если соотношение (7) отсутствует. Следовательно, в этом случае справедлива

**Лемма 4.** *Для генетического кода $\mathcal{G} = \mathcal{G}_\varnothing$ (не содержащего соотношений) группа $D_n$ содержит подгруппу, изоморфную $B_{n-1}(\mathcal{G})$, а потому $D_n$ является полупрямым произведением: $D_n = U_n \leftthreetimes B_{n-1}(\mathcal{G})$.*

В случае, когда $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1$ (содержит одно нетривиальное соотношение) можно заметить, что фактор–группа $D_n/U_n$ изоморфна $B_{n-1}(\mathcal{G})$, но в этом случае мы уже не можем утверждать, что группа $B_{n-1}(\mathcal{G})$ является подгруппой группы $B_n(\mathcal{G})$.

Далее мы можем рассматривать группу $B_{n-1}(\mathcal{G}) = \langle \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}, x_{21}, \ldots, x_{2l} \rangle$, ее гомоморфизм в симметрическую группу $S_n$, индуцированный гомоморфизмом $\nu : B_n(\mathcal{G}) \longrightarrow S_n$, выбрать подгруппу $D_{n-1} \leq B_{n-1}(\mathcal{G})$, состоящую из таких элементов, которые под действием

$\nu$ переходят в подстановки, оставляющие символ 2 на месте. В качестве множества представителей смежных классов группы $B_{n-1}(\mathcal{G})$ по подгруппе $D_{n-1}$ можно выбрать множество

$$M_{n-1} = \{1, \sigma_2, \sigma_3\sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\ldots\sigma_2\}.$$

Так же, как и выше, можно показать, что $D_{n-1}$ порождается элементами $a_{23}, a_{24}, \ldots, a_{2n}$, $\sigma_3, \sigma_4, \ldots, \sigma_{n-1}$, $x_{2k}, x_{3k}$, $k = 1, 2, \ldots, l$, а подгруппа $U_{n-1} = \langle a_{23}, a_{24}, \ldots, a_{2n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2l}\rangle$ нормальна в $D_{n-1}$. При этом фактор–группа $D_{n-1}/U_{n-1}$ изоморфна $B_{n-2}(\mathcal{G})$.

Продолжая этот процесс, на последнем шаге получим группу $B_1(\mathcal{G})$, которая изоморфна группе $G(\mathcal{G})$. Таким образом, для каждого $i = 0, 1, \ldots, n-2$ мы построим матрешку

$$B_{n-i}(\mathcal{G}) \geq D_{n-i} \trianglerighteq U_{n-i},$$

где

$$B_{n-i}(\mathcal{G}) = \langle \sigma_{i+1}, \sigma_{i+2}, \ldots, \sigma_{n-1}, x_{i+1,1}, \ldots, x_{i+1,l}\rangle,$$

$$D_{n-i} = \langle a_{i+1,i+2}, a_{i+1,i+3}, \ldots, a_{i+1,n}, \sigma_{i+2}, \sigma_{i+3}, \ldots, \sigma_{n-1}, x_{i+1,1}, \ldots, x_{i+1,l}, x_{i+2,1}, \ldots, x_{i+2,l}\rangle,$$

$$U_{n-i} = \langle a_{i+1,i+2}, a_{i+1,i+3}, \ldots, a_{i+1,n}, x_{i+1,1}, x_{i+1,2}, \ldots, x_{i+1,l}\rangle.$$

При этом фактор–группа $D_{n-i}/U_{n-i}$ изоморфна группе $B_{n-i-1}(\mathcal{G})$.

Напомним, что группа крашеных кос $P_n(\mathcal{G})$ на $n$ нитях определялась как ядро гомоморфизма $\nu : B_n(\mathcal{G}) \longrightarrow S_n$. Из доказанных выше утверждений легко следует

**Лемма 5.** 1) *Подгруппа $P_n(\mathcal{G})$ является нормальной подгруппой индекса $n!$ в группе $B_n(\mathcal{G})$.* 2) *В качестве множества представителей правых смежных классов группы $B_n(\mathcal{G})$ по подгруппе $P_n(\mathcal{G})$ можно выбрать множество $M = M_2M_3...M_n$.*

3) *Группа $P_n(\mathcal{G})$ порождается элементами*

$$a_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n; \quad x_{ik}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq l.$$

В группе $B_n(\mathcal{G})$ вместе с соотношением (7) содержатся соотношения, полученные из него при помощи сопряжения. Более точно, справедлива

**Лемма 6.** *В группе $B_n(\mathcal{G})$ справедливы равенства*

$$\begin{aligned}
&r_1 = a_{12}a_{13}\ldots a_{1n},\\
&r_2 = a_{23}a_{24}\ldots a_{2n}a_{12},\\
&r_3 = a_{34}a_{35}\ldots a_{3n}a_{13}a_{23},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&r_{n-1} = a_{n-1,n}a_{1,n-1}a_{2,n-1}\ldots a_{n-2,n-1},\\
&r_n = a_{1n}a_{2n}\ldots a_{n-1,n},
\end{aligned}$$

*где слово $r_i$ получается из слова $r$ заменой всех вхождений порождающих $x_j$ порождающими $x_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, l$. Каждое соотношение*

$$r_i = a_{i,i+1}a_{i,i+2}\ldots a_{i,n}$$

*выполнено в группе $U_{n-i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.*

**Доказательство.** Так как $x_k = x_{1k}$, $k = 1, 2, \ldots, l$ а $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}^2\sigma_{n-2}\ldots\sigma_2\sigma_1 = a_{12}a_{13}\ldots a_{1n}$, то первое соотношение совпадает с соотношением (7) группы $B_n(\mathcal{G})$. Соотношение

$$r_i = a_{i,i+1}a_{i,i+2}\ldots a_{in}a_{1i}a_{2i}\ldots a_{i-1,i}$$

получается из первого соотношения сопряжением элементом $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{i-1}$. Далее мы используем следующие формулы сопряжения:

$$(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{i-1})^{-1}x_{1k}(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{i-1}) = x_{ik}, \quad k = 1, 2, \ldots, l,$$

а также равенства

$$(a_{12}a_{13}\ldots a_{1n})^{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{i-1}} = (\sigma_i\sigma_{i+1}\ldots\sigma_{n-1}^2\ldots\sigma_{i+1}\sigma_i)(\sigma_{i-1}\sigma_{i-2}\ldots\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2\ldots\sigma_{i-2}\sigma_{i-1}) =$$

$$= (a_{i,i+1}a_{i,i+2}\ldots a_{i,n})(a_{1i}a_{2i}\ldots a_{i-1,i}).$$

Заметим, что в группе

$$U_n = \langle a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}, x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1l}\rangle$$

выполнено соотношение $r_1 = a_{12}a_{13}\ldots a_{1n}$. Используя индукцию по $i$, и, вышеприведенные формулы, замечаем, что в группе

$$U_{n-i+1} = \langle a_{i,i+1}, a_{i,i+2}, \ldots, a_{i,n}, x_{i1}, x_{i,2}, \ldots, x_{il}\rangle$$

выполнено единственное соотношение

$$r_i = a_{i,i+1}a_{i,i+2}\ldots a_{i,n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Лемма доказана.

## § 4. Некоторые свойства группы $B_n(\mathcal{G})$

Покажем, что группа $B_n(\mathcal{G}_0)$ при $n \geq 2$ имеет кручение. Справедлива

**Теорема 1.** *Группа $B_n(\mathcal{G}_0)$ имеет кручение при всех $n \geq 2$. Подгруппа $U_3(\mathcal{G}_0)$ имеет элементы порядка 2. Подгруппы $U_n(\mathcal{G}_0)$ при $n \neq 3$ являются свободными.*

**Доказательство.** Действительно, при $n = 2$ в группе $B_n(\mathcal{G}_0)$ справедливо соотношение $a_{12} = 1$, т. е. $\sigma_1^2 = 1$. Если $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_0^{\varnothing}$, то $B_2(\mathcal{G}_0) \simeq \mathbb{Z}_2$. Если $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_0^l$, то группа $B_2(\mathcal{G}_0)$ порождается элементами $x_1, x_2, \ldots, x_l, \sigma_1$. Положим $x_{1k} = x_k$, $x_{2k} = \sigma_1^{-1}x_{1k}\sigma_1 = \sigma_1 x_{1k}\sigma_1$, $k = 1, 2, \ldots, l$. Тогда соотношения (5)–(7) примут такой вид:

$$x_{1j}x_{2j} = x_{2j}x_{1j}, \quad j = 1, 2, \ldots, l,$$

$$x_{1j}x_{2i}^{-1} = x_{2i}^{-1}x_{1j}, \quad j > i,$$
$$\sigma_1^2 = 1.$$

Из этих соотношений следует, что группа крашеных кос $P_2(\mathcal{G}_0^l) \simeq F_l \times F_l$ — прямое произведение двух экземпляров свободной группы $F_l$. Группа $U_2$ порождается элементами $x_{1k}$, $k = 1, 2, \ldots, l$, а потому является свободной, а $U_1 = \langle x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2l}\rangle$ — тоже свободная группа.

По лемме 6 в группе $B_n(\mathcal{G}_0)$, при $n = 3$, выполняются соотношения

$$a_{12}a_{13} = 1, \quad a_{23}a_{12} = 1, \quad a_{13}a_{23} = 1.$$

Выражая из первого соотношения $a_{12}$ и подставляя во второе, получим $a_{23}a_{13}^{-1} = 1$, т. е. $a_{23} = a_{13}$. Тогда из третьего соотношения $a_{23}^2 = 1$. Следовательно, $a_{13} = a_{23}$, $a_{12} = a_{13}^{-1} = a_{23}^{-1} = a_{23}$. Поэтому

$$U_3 = \langle a_{13}, x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1l} \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 * F_l,$$

$$U_2 = \langle x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2l} \rangle \simeq F_l,$$

$$U_1 = \langle x_{31}, x_{32}, \ldots, x_{3l} \rangle \simeq F_l \simeq G(\mathcal{G}_0).$$

При $n = 4$ в группе $B_n(\mathcal{G}_0)$ выполняются соотношения

$$a_{12}a_{13}a_{14} = 1, \quad a_{23}a_{24}a_{12} = 1, \quad a_{34}a_{13}a_{23} = 1, \quad a_{14}a_{24}a_{34} = 1.$$

Выразим из первого соотношения $a_{14}$, из второго — $a_{24}$, из третьего — $a_{34}$ и, подставляя эти выражения в последнее соотношение, получим

$$a_{14}a_{24}a_{34} = (a_{12}^{-1}a_{23}^{-1}a_{13}^{-1})^2 = 1,$$

т. е.

$$(a_{13}a_{23}a_{12})^2 = (a_{12}a_{13}a_{23})^2 = 1.$$

Так как $a_{12}a_{13}a_{23} = (\sigma_1\sigma_2)^3$ и образ элемента $\sigma_1\sigma_2$ в группе $S_4$ отличен от 1, то группа $B_4(\mathcal{G}_0)$ содержит элементы конечного порядка.

Рассмотрим подгруппу

$$U_4 = \langle a_{12}, a_{13}, a_{14}, x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1l} \rangle.$$

В ней выполнено соотношение $a_{12}a_{13}a_{14} = 1$. Исключая из него $a_{12}$, видим, что

$$U_4 = \langle a_{13}, a_{14}, x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1l} \rangle$$

— свободная группа. Далее,

$$U_3 = \langle a_{23}, a_{24}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2l} \mid\mid a_{23}a_{24} = 1 \rangle = \langle a_{24}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2l} \rangle,$$

но так как $(a_{12}a_{13}a_{23})^2 = 1$, то в группе $U_3$ справедливо равенство $a_{23}^2 = a_{24}^{-2} = 1$. Следовательно, $U_3 \simeq \mathbb{Z}_2 * F_l$.

Рассмотрим

$$U_2 = \langle a_{34}, x_{31}, x_{32}, \ldots, x_{3l} || a_{34} = 1 \rangle = \langle x_{31}, x_{32}, \ldots, x_{3l} \rangle.$$

Следовательно, $U_2$ так же, как и группа $U_1 = G(\mathcal{G}_0)$ является свободной.

Далее, для произвольного $n \geq 4$, ввиду леммы 6 в группе $B_n(\mathcal{G}_0)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}
&a_{12}a_{13}\ldots a_{1n} = 1,\\
&a_{23}a_{24}\ldots a_{2n}a_{12} = 1,\\
&a_{34}a_{35}\ldots a_{3n}a_{13}a_{23} = 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n-1,n}a_{1,n-1}a_{2,n-1}\ldots a_{n-2,n-1} = 1,\\
&a_{1n}a_{2n}\ldots a_{n-1,n} = 1.
\end{aligned}$$

Выразим из первого равенства $a_{1n}$, из второго — $a_{2n}$, из третьего — $a_{3n}$, и т. д., наконец, из $n-1$–го выразим $a_{n-1,n}$. Подставив эти выражения в последнее равенство и, воспользовавшись определяющими соотношениями группы $P_n$, получим

$$\left[a_{12}^{-1}(a_{23}^{-1}a_{13}^{-1})(a_{34}^{-1}a_{24}^{-1}a_{14}^{-1})\dots(a_{n-2,n-1}^{-1}a_{n-3,n-1}^{-1}\dots a_{1,n-1}^{-1})\right]^2 = 1.$$

Нетрудно проверить, что элемент обратный к элементу, стоящему в квадратных скобках равен

$$a_{12}(a_{13}a_{23})(a_{14}a_{24}a_{34})\dots(a_{1,n-1}a_{2,n-1}\dots a_{n-2,n-1}),$$

который, в свою очередь, равен

$$(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-2})^{n-1}$$

(см. [25, с. 28]). Следовательно, $(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-2})^{2n-2} = 1$. Легко заметить, что образ элемента $\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-2}$ в группе $S_n$ отличен от 1, а потому группа $B_n(\mathcal{G}_0)$ имеет элементы конечного порядка.

Рассмотрим теперь подгруппы $U_{n-i+1}$, имеющие генетический код

$$U_{n-i+1} = \langle a_{i,i+1}, a_{i,i+2}, \dots, a_{i,n} x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{il} \mid\mid a_{i,i+1}a_{i,i+2}\dots a_{i,n} = 1\rangle.$$

Исключая из соотношения порождающий $a_{i,i+1}$, видим, что

$$U_{n-i+1} = \langle a_{i,i+2}, a_{i,i+3}, \dots, a_{i,n}, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{il}\rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

При всех $i \neq n-2$ эта группа является свободной, а при $i = n-2$ имеем

$$U_3 = \langle a_{n-2,n-1}, a_{n-2,n}, x_{n-2,1}, x_{n-2,2}, \dots, x_{n-2,l} \mid\mid a_{n-2,n-1}a_{n-2,n} = 1, \quad a_{n-2}^2 = 1\rangle \simeq \mathbb{Z}_2 * F_l.$$

Таким образом, теорема доказана.

Эта теорема обобщает результат из работы [18] о том, что группа кос сферы $B_n(S^2)$ имеет кручение.

Используя те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 1, легко получается такое

**Следствие.** *Подгруппа $U_n(\mathcal{G}_1)$, группы кос $B_n(\mathcal{G}_1)$, $n \geq 2$, является свободной.*

Так же, как и для классических групп кос справедлива

**Теорема 2.** *В группе кос $B_n(\mathcal{G})$ разрешима проблема равенства слов.*

**Доказательство.** Пусть слово $w$ записано в порождающих группы $B_n(\mathcal{G})$. Как было установлено в предыдущем параграфе, существует короткая точная последовательность

$$1 \longrightarrow P_n(\mathcal{G}) \longrightarrow B_n(\mathcal{G}) \longrightarrow S_n \longrightarrow 1.$$

Если образ слова $w$ в группе $S_n$ нетривиален, то и $w \neq 1$. В противном случае, $w \in P_n(\mathcal{G})$. Перепишем это слово в порождающих группы $P_n(\mathcal{G})$. Далее представим $w$ в виде произведения $w = w_1w'$, где $w_1 \in U_n$ и является словом от порождающих $a_{1j}$, $j = 2, 3, \dots, n$, $x_{1k}$, $k = 1, 2, \dots, l$, а слово $w'$ не содержит этих порождающих. Рассмотрим короткую точную последовательность

$$1 \longrightarrow U_n \longrightarrow P_n(\mathcal{G}) \longrightarrow P_{n-1}(\mathcal{G}) \longrightarrow 1.$$

Слово $w_1 \in U_n$, а $U_n$ — либо свободная группа, либо является свободным произведением с объединением, а потому мы можем эффективно проверить: представляет ли $w_1$ единичный элемент. Если $w_1 \neq 1$, то и $w \neq 1$. Если $w_1 = 1$, то найдем образ элемента $w'$ в группе $P_{n-1}(\mathcal{G})$

и представим его в виде произведения $w_2 w''$, где $w_2$ — слово от порождающих группы $U_{n-1}$, а $w''$ не содержит этих порождающих. Если $w_2 \neq 1$, то и $w \neq 1$. Если $w_2 = 1$, то найдем образ элемента $w''$ в группе $P_{n-2}(\mathcal{G})$. Продолжая эту процедуру, мы либо установим, что $w \neq 1$, либо на $n$–шаге построим элемент $w_n \in U_1$. Так как $U_1 \simeq G(\mathcal{G})$ и в $G(\mathcal{G})$ эффективно разрешима проблема равенства, то мы сможем проверить: будет ли $w_n = 1$ или нет. Если $w_n = 1$, то и исходный элемент $w = 1$. В противном случае $w \neq 1$. Теорема доказана.

Напомним, что *рангом* $\mathrm{rk}(G)$ конечно порожденной группы $G$ [27, с. 29] называется наименьшее число порождающих группы $G$. Для тривиальной группы $G$ полагаем $\mathrm{rk}(G) = 0$. Справедливо

**Предложение 1.** *Для группы кос $B_n(\mathcal{G})$ справедливы оценки*

$$\mathrm{rk}(B_1(\mathcal{G})) = \mathrm{rk}(G(\mathcal{G})),$$

$$\mathrm{rk}(B_2(\mathcal{G})) \leq \mathrm{rk}(G(\mathcal{G})) + 1,$$

$$\mathrm{rk}(B_n(\mathcal{G})) \leq \mathrm{rk}(G(\mathcal{G})) + 2, \quad \text{при} \quad n \geq 2.$$

**Доказательство.** Первое равенство следует непосредственно из определения, так как в этом случае $B_1(\mathcal{G}) = G(\mathcal{G})$. При $n = 2$ группа $B_2(\mathcal{G})$ порождается элементом $\sigma_1$ и порождающими группы $G(\mathcal{G})$, а потому отсюда следует вторая оценка. Третья оценка следует из того, что подгруппа группы $B_n(\mathcal{G})$, порожденная элементами $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ может быть порождена двумя элементами [28, гл. 6]. Предложение доказано.

В работе [29] изучался вопрос о ширине вербальных подгрупп группы кос $B_n(E^2)$ евклидовой плоскости $E^2$, а в работе [30] этот же вопрос исследовался для других групп Артина. Напомним некоторые факты из этих работ.

Под шириной $\mathrm{wid}(G, V)$ вербальной подгруппы $V(G)$, определенной в группе $G$ множеством слов $V$, относительно этого $V$ понимается наименьшее $m \in \mathbb{N} \bigcup \{+\infty\}$ такое, что всякий элемент подгруппы $V(G)$ записывается в виде произведения $\leq m$ значений слов из $V \bigcup V^{-1}$. Будем рассматривать только конечные множества слов $V$, так как для всякой вербальной подгруппы $V(G)$ можно построить такое множество слов $W$ (вообще говоря, бесконечное), что $W(G) = V(G)$ и $\mathrm{wid}(G, W) = 1$.

Говорим, что группа $G$ *богата вербальными подгруппами*, если всякое множество слов $V$, определяющее собственную вербальную подгруппу свободной группы $F_2$ ранга два, определяет собственную вербальную подгруппу группы $G$ (под собственной мы понимаем подгруппу, отличную от единичной и всей группы). В частности, если $G$ содержит свободную неабелеву группу, то $G$ богата вербальными подгруппами.

Говорим, что группа $G$ *не имеет собственных вербальных подгрупп конечной ширины*, если для всякого конечного множества $V$, определяющего собственную вербальную подгруппу $V(G)$ группы $G$, ширина $\mathrm{wid}(G, V)$ бесконечна.

Справедливы

**Лемма 7.** ([30, лемма 1]) *Пусть $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_k$ — прямое произведение конечного числа подгрупп $G_i$. Тогда ширина* $\mathrm{wid}(G, V)$ *равна максимальной ширине сомножителей* $\mathrm{wid}(G_i, V)$ *по всем $i = 1, 2, \ldots, k$.*

**Лемма 8.** ([30, лемма 3]) *Если существует эпиморфизм группы $G$ на группу, не имеющую собственных вербальных подгрупп конечной ширины и богатую вербальными подгруппами, то и сама $G$ не имеет собственных вербальных подгрупп конечной ширины.*

Напомним, что группа кос $B_n(\mathcal{G}_\varnothing^1)$ является группой Артина типа $B$. Из результатов работ [29, 30] следует, что группа кос евклидовой плоскости $B_n(E^2) = B_n(\mathcal{G}_\varnothing^\varnothing)$, группы кос $B_n(\mathcal{G}_\varnothing^1)$, а также соответствующие им группы крашеных кос $P_n(E^2)$ и $P_n(\mathcal{G}_\varnothing^1)$ при $n \geq 3$ не имеют собственных вербальных подгрупп конечной ширины.

Мы предполагаем, что справедлива

**Гипотеза.** *Для всякого генетического кода $\mathcal{G}$ найдется такое натуральное число $N = N(\mathcal{G})$, что при всех $n \geq N$ группа кос $B_n(\mathcal{G})$ не имеет собственных вербальных подгрупп конечной ширины.*

Для группы крашеных кос справедлива

**Предложение 2.** *Пусть $\mathcal{G} = \mathcal{G}_\varnothing^l, \mathcal{G}_0^l$ при $l \geq 2$ или $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1^l$ при $l \geq 3$. Тогда для всякого $n \geq 1$ группа крашеных кос $P_n(\mathcal{G})$ не имеет собственных вербальных подгрупп конечной ширины.*

**Доказательство.** Пусть $V$ – конечное собственное множество слов. Можно заметить, что группа крашеных кос $P_n(\mathcal{G})$ обладает эпиморфизмом на $n$-ю прямую степень $H = G(\mathcal{G}) \times G(\mathcal{G}) \times \ldots \times G(\mathcal{G})$. Ввиду леммы 7 $\mathrm{wid}(H, V) = \mathrm{wid}(G(\mathcal{G}), V)$. Группа $G(\mathcal{G})$ либо свободная неабелева, либо группа с одним соотношением и $\geq 3$ порождающими. В обоих случаях $G(\mathcal{G})$ богата вербальными подгруппами. То, что $G(\mathcal{G})$ не имеет собственных вербальных подгрупп конечной ширины следует из [32, теорема 2]. Поэтому ввиду леммы 8 группа $P_n(\mathcal{G})$ также не имеет собственных вербальных подгрупп конечной ширины. Предложение доказано.

В связи с введенной конструкцией сформулируем следующие вопросы.

**Вопрос 1** (И. А. Дынников). Пусть $\mathcal{G}$ — генетический код с одним определяющим соотношением, $K_\mathcal{G}$ — одноклеточный комплекс, соответствующий коду $K_\mathcal{G}$, $B_n(K_\mathcal{G})$ — группа кос на $n$ нитях, соответствующая комплексу $K_\mathcal{G}$ (которая определяется подобно тому, как определяется группа кос многообразия). В каких случаях группа кос $B_n(\mathcal{G})$ генетического кода $\mathcal{G}$ совпадает с группой кос $B_n(K_\mathcal{G})$ комплекса $K_\mathcal{G}$?

**Вопрос 2.** Пусть $M$ — двумерное, компактное неориентированное многообразие рода $g$, $\mathcal{G} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_g \mid\mid x_1^2 x_2^2 \ldots x_g^2 = 1\rangle$ — генетический код, определяющий фундаментальную группу $\pi_1(M)$. Как связаны группы $B_n(M)$ и $B_n(\mathcal{G})$ при $n \geq 2$?

**Вопрос 3.** Какие из групп $B_n(\mathcal{G})$ разлагаются нетривиальным образом в свободное произведение с объединением?

# Список литературы


[1] Э. Брискорн, К. Сайто, Группы Артина и группы Кокстера, Математика. Сб. переводов, 18, № 6 (1974), 56–79.

[2] В. Я. Лин, Косы Артина и связанные с ними группы и пространства, Итоги науки и техники. Алгебра. Тополгия. Геометрия, М., ВИНИТИ, 1979, Т. 17, 159–227.

[3] В. А. Васильев, Топология дополнений к дискриминантам, М., Фазис, 1997.

[4] П. Картье, Новые достижения в теории групп кос. Применения в топологии и алгебре, Труды семинара Н. Бурбаки за 1990, М., Мир, 1996, 14–49.

[5] J. S. Birman, New points of view in knot theory, Bull. Am. Math. Soc., New Ser. 28, № 2 (1993), 253-287.

[6] L. H. Kauffman, Virtual knot theory, Eur. J. Comb., 20, № 7 (1999), 663-690.

[7] В. В. Вершинин, Группы кос и пространства петель, Успехи мат. наук, 54, № 2 (1999), 3-84.

[8] R. Fenn, R. Rimányi, C. Rourke, The braid–permutation group, Topology, 36, № 1 (1997), 123-135.

[9] V. G. Bardakov, The virtual and universal braids, Fundamenta Math., 184, (2004), 1-18 .

[10] V. F. R. Jones, Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials, Ann. of Math., 126, №2 (1987), 335–388.

[11] S. Bigelow, Braid groups are linear, J. Amer. Math. Soc., 14, № 2 (2001), 471-486.

[12] D. Krammer, Braid groups are linear, Annals of. Math., 155, № 1 (2002), 131-156.

[13] P. Dehornoy, From large cardinals to braids via distributive algebra, J. Knot Theory and its Ramifications, 4, № 1 (1995), 33–79.

[14] М. Атья, Инварианты Джонса–Виттена для узлов, Труды семинара Н. Бурбаки за 1990, М., Мир, 1996, 6–13.

[15] М. Атья, Геометрия и физика узлов, М., Фазис, 1997.

[16] O. Zariski, The topological discriminant group of a riemann surface of genus $p$, Amer. J. of Math., 59, №2 (1937), 335–358.

[17] G. P. Scott, Braids groups and the group of homeomorphisms of a surface, Proc. Camb. Phil. Soc., 68, (1970), 605–617.

[18] R. Gillette, J. Buskirk, The word problem and consequences for the braid groups and mapping class groups of the 2–sphere, Trans. Amer. Math. Soc., 131, № 2 (1968), 277–296.

[19] E. Fadell, J. Van Buskirk, The braid groups of $E^2$ and $S^2$, Duke. Math. J., 29, № 2 (1961), 243–258.

[20] J. Van Buskirk, Braid groups of compact 2–manifolds with elements of finite order, Trans. Amer. Math. Soc., 122, №1 (1966), 81–97.

[21] J. González-Meneses, New presentations of surface braid groups, J. Knot Theory Ramifications, 10, (2001), 431-451.

[22] P. Bellingeri, On presentation of surface braids, J. Algebra, 274 (2004), 543-563.

[23] P. Bellingeri, E. Godelle, Questions on surface braid groups, Preprint, Universite de Caen, CNRS UMR 6139, 2005-15, 13 p.

[24] В. Г. Бардаков, М. В. Нещадим, Некоторые свойства групп кос компактных ориентируемых 2-многообразий, IV Междун. алгебр. конф., посвященная 60-летию профессора Ю. И. Мерзлякова, Новосибирск, 2000, 9–13.

[25] J. S. Birman, Braids, links and mapping class group, Princeton–Tokyo: Univ. press, 1974.

[26] Марков А. А. Основы алгебраической теории кос, Тр. МИАН, 16, (1945), 1–54.

[27] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, Основы теории групп, 4–е изд., М.: Наука, 1996.

[28] Г. С. Коксетер, У. О. Мозер, Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп, М.: Наука, 1980.

[29] В. Г. Бардаков, К теории групп кос, Матем. сб., 183, № 6 (1992), 3–42.

[30] В. Г. Бардаков. Ширина вербальных подгрупп некоторых групп Артина, Групповые и метрические свойства отображений: Сборник работ, посвящённых памяти Ю. И. Мерзлякова, НГУ, Новосибирск, 1995, 8–18.

[31] Н. Бурбаки, Группы и алгебры Ли, М.: Мир, гл. IV–VI, 1972.

[32] Бардаков В. Г. О ширине вербальных подгрупп некоторых свободных конструкций, Алгебра и логика, 36, № 5 (1997), 494–517.