УДК 512.54

О ШИРИНЕ ВЕРБАЛЬНЫХ ПОДГРУПП НЕКОТОРЫХ СВОБОДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ [1]

В. Г. Бардаков

Светлой памяти

ЮРИЯ ИВАНОВИЧА МЕРЗЛЯКОВА

посвящается

Следуя Ю. И. Мерзлякову [1, с.118], под *шириной* $\mathrm{wid}(G, V)$ вербальной подгруппы $V(G)$, определенной в группе G множеством слов V, относительно этого V будем понимать наименьшее $m \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ такое, что всякий элемент подгруппы $V(G)$ записывается в виде произведения $\leq m$ значений слов из V. Можно показать [2, с.7], что ширина $\mathrm{wid}(G, V)$, вообще говоря, зависит от множества V, а не только от подгруппы $V(G)$. Поэтому, говоря о наиболее употребительных вербальных подгруппах, мы будем иметь в виду ширину относительно их естественного задания, например, для коммутанта — относительно коммутатора $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, а для s–й степени — относительно слова x^s. Ограничимся случаем, когда V — конечное множество слов, так как для любой вербальной подгруппы $V(G)$ можно подобрать такое бесконечное множество слов W, что $V(G) = W(G)$, а ширина $\mathrm{wid}(G, W)$ равна единице. Кроме того, будем считать, что V — *собственное* множество слов, т. е. для свободной группы F_2 степени свободы 2 вербальная подгруппа $V(F_2)$ отлична от единичной и самой группы F_2. В противном случае, назовём V *несобственным* множеством слов. Ширина вербальной подгруппы относительно несобственного множества слов всегда конечна — для единичной вербальной подгруппы это очевидно, а для вербальной подгруппы, совпадающей со всей группой, отмечалось в работе Ремтуллы [3].

Интересно было бы исследовать, как меняется ширина вербальных подгрупп при различных групповых конструкциях, т. е. если A и B — группы, V — множество теоретико-групповых слов, G — группа, полученная из A и B при помощи некоторой групповой конструкции (свободное произведение с объединением, HNN–расширение, расширение, сплетение и т. д.), то как выражается ширина $\mathrm{wid}(G, V)$ через $\mathrm{wid}(A, V)$ и $\mathrm{wid}(B, V)$?

В этом направлении Ремтулла ([3], [4]) доказал, что 1) в нетривиальном свободном произведении $A*B$ ширина всякой собственной вербальной подгруппы $v(A*B)$ относительно слова v бесконечна тогда и только тогда, когда $|A|\geq 3$ и $|B|\geq 2$; 2) коммутант любой конечно порождённой разрешимой группы ступени разрешимости ≤ 3 имеет конечную ширину. Вопрос М. И. Каргаполова, справедлив ли этот результат для произвольной конечно порождённой разрешимой группы, остается открытым (см. [5, вопрос 4.34]), хотя доказано [6], что ширина всякой вербальной подгруппы полициклической группы конечна.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №93–01 –01513)

Все известные автору конечно порожденные группы, у которых ширина всякой вербальной подгруппы относительно собственного множества слов бесконечна, содержат свободную неабелеву подгруппу.

Вопрос 1. Всякая ли конечно порожденная группа, у которой ширина любой вербальной подгруппы относительно собственного конечного множества слов бесконечна, содержит свободную неабелеву подгруппу?

С другой стороны, кажется интересным

Вопрос 2. Если G — конечно порождённая группа, содержащая нормальную (конечного индекса) свободную неабелеву подгруппу, V — конечное множество слов, определяющих собственную вербальную подгруппу $V(G)$ группы G, то должна ли ширина $\mathrm{wid}(G, V)$ быть бесконечной?

В предлагаемой работе изучается ширина вербальных подгрупп HNN-расширений, свободных произведений с объединением, а также групп с одним определяющим соотношением. Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 1. *Пусть в* HNN–*расширении*

$$G^* = (G, t \mid\mid t^{-1}At = B,\ \varphi)$$

связанные подгруппы A, B отличны от базовой группы G. Тогда всякая вербальная подгруппа $V(G^*)$, определённая конечным собственным множеством слов V, имеет бесконечную ширину относительно V.

Доказательство теоремы проведем по схеме из работы [3] (см. также [2]). Именно, для каждого множества слов V построим функцию $F_V : G^* \longrightarrow \mathbf{Z}$ такую, что для всякого элемента $g \in V(G^*)$, представимого в виде произведения $\leq n$ значений слов из V, найдется константа c, зависящая от n и не зависящая от g, такая, что значение $|F_V(g)|$ не превосходит c. С другой стороны, мы построим бесконечную последовательность элементов $a_1, a_2, ...$ вербальной подгруппы $V(G^*)$, для которых числовая последовательность $|F_V(a_1)|, |F_V(a_2)|, \ldots$ неограниченно возрастает. Отсюда и последует утверждение теоремы.

Если хотя бы одна из связанных подгрупп A или B совпадает с базой G, то соответствующие примеры показывают, что теорема 1 перестаёт быть справедливой. Для таких HNN–расширении мы построим некоторую каноническую форму записи элементов, которая представляет и самостоятельный интерес.

Аналогичный результат будет получен для свободных произведений с объединением, при условии, что объединяемая подгруппа нормальна в каждом из множителей.

Изучая группы с одним определяющим соотношением, Д. И. Молдаванский [8] установил связь этих групп с HNN-расширениями (см., также [9, гл. 5]). Используя метод Д. И. Молдаванского, будет установлена

ТЕОРЕМА 2. *Пусть G — группа с одним определяющим соотношением, имеющая по меньшей мере три порождающих. Тогда всякая вербальная подгруппа $V(G)$, определённая конечным собственным множеством слов V имеет бесконечную ширину относительно V.*

Распространить эту теорему на группы с двумя порождающими и одним определяющим соотношением уже неудаётся.

По ходу изложения сформулировано несколько вопросов, ответы на которые автору не известны.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Нам потребуются некоторые определения из работы [2]. Напомним их.

Пусть F_n — свободная группа со свободными порождающими $x_1, \ldots, x_n$, $n \geq 2$, V – множество слов из F_n. Слово v из F_n назовем *коммутаторным*, если оно лежит в коммутанте F_n' группы F_n . Множество V назовем *коммутаторным*, а определяемую им вербальную подгруппу *коммутантной*, если V содержит только коммутаторные слова. Множество V будем называть *собственным*, если вербальная подгруппа $V(F_n)$ является собственной (т. е. отличной от единицы и всей группы) подгруппой группы F_n. Отметим, что если G не свободна, то собственное множество V не обязательно определяет собственную вербальную подгруппу $V(G)$ (в качестве примера можно взять любую простую группу G, которая вообще не содержит собственных вербальных подгрупп). Если же V — несобственное множество слов, то, очевидно, $V(G)$ — несобственная вербальная подгруппа в любой группе G. Тем не менее, если G содержит свободную неабелеву подгруппу и V — собственное множество слов, то подгруппа $V(G)$ отлична от единицы. Если в группе G всякое собственное множество слов определяет собственную вербальную подгруппу, то будем называть G *богатой вербальными подгруппами.*

В работе [2, лемма 5] доказывается, что всякая несобственная вербальная подгруппа группы кос B_n имеет конечную ширину. Естественным обобщением этого результата является

ЛЕММА 1. *Пусть G — группа, V — несобственное множество слов. Тогда ширина* $\mathrm{wid}(G, V)$ *конечна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что $V(G) = G$ (случай $V(G) = 1$ тривиален). Известно (см., например, [10, теорема 15.1.10]), что V эквивалентно (т. е. определяет ту же вербальную подгруппу) множеству слов вида $W = \{x_1^s,\ u_j | j \in J, u_j \in F_n'\}$. Так как V — несобственное множество слов, $V(G) = W(G) = G$, то $s = 1$. Следовательно, в множестве V найдутся слова, произведение которых равно несобственному слову $v = x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n} v^*$, $\alpha_i \in \mathbf{Z}$, $v^* \in F_n'$, у которого $s = ..(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 1$. Для завершения доказательства остается воспользоваться следующим утверждением.

ЛЕММА 2 ([3, с.574]). *Если слово $v = x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n} v^*$, где $\alpha_i \in \mathbf{Z}$, $v^* \in F_n'$, не является коммутаторным и $s = ..(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, то для любого элемента g группы G его s–я степень g^s лежит в $v(G)$ и является значением слова v.*

Будем говорить, что группа G *не имеет собственных вербальных подгрупп конечной ширины*, если для всякого конечного множества V, определяющего собственную вербальную подгруппу $V(G)$, ширина $\mathrm{wid}(G, V)$ бесконечна.

Напомним определения и некоторые свойства HNN–расширений (см., например, [9, гл. 4, § 2]).

Пусть G — группа, A и B — ее подгруппы, $\varphi : A \longrightarrow B$ — изоморфизм. HNN–*расширением* группы G относительно A, B и φ называется группа

$$G^* = (G, t \mid\mid t^{-1} a t = \varphi(a),\ a \in A),$$

причём G называется его *базой*, t — *проходной буквой*, A и B — *связанными подгруппами.*

Слово $w = g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 \ldots t^{\varepsilon_n} g_n$, $g_i {\in} G$, $\varepsilon_i = \pm 1$, представляющее некоторый элемент из G^*, называется *приведенным*, если в нем не встречаются подслова $t^{-1} g_i t$, где $g_i \in A$, и $t g_j t^{-1}$, где $g_j \in B$. Если слово w приведено и $n \geq 1$, то оно представляет неединичный элемент из G^*, но один и тот же элемент из G^* может быть представлен различными приведенными словами. Тем не менее, для приведенных слов справедлива

ЛЕММА 3 (см. [9, с.254]). *Пусть* $u = g_0t^{\varepsilon_1}\dots t^{\varepsilon_n}g_n$ *и* $v = h_0t^{\delta_1}\dots t^{\delta_m}h_m$ — *приведенные слова. Предположим, что* $u = v$ *в* G^*. *Тогда* $m = n$ *и* $\varepsilon_i = \delta_i$, $i = 1,\dots,n$.

Сигнатурой элемента $g \in G^*$ назовем последовательность знаков $\mathrm{sqn}g = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$, $\varepsilon_i = \pm1$, в любом приведенном представлении

$$g = g_0t^{\varepsilon_1}g_1\dots t^{\varepsilon_n}g_n$$

элемента g (ввиду леммы 3 от выбора представления сигнатура не зависит). Единицы и запятые в записи сигнатуры удобно опускать и писать именно знаки: $\mathrm{sqn}g = (+\ -\ -\ +\dots)$ и т. д.

Если $\sigma = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$, – сигнатура, то число $|\sigma| = n$ назовем ее *длиной*, а $\sigma^{-1} = (-\varepsilon_n,\dots,-\varepsilon_1)$, – *обратной сигнатурой*. Очевидно, $\mathrm{sqn}g^{-1} = (\mathrm{sqn}g)^{-1}$. Определим произведение $\sigma\tau$ сигнатур σ, τ как сигнатуру, получающуюся приписыванием τ после σ. Если $\sigma = \sigma_1\rho$, $\tau = \rho^{-1}\tau_1$, $|\rho| = r$, то определим еще r*–произведение* $\sigma[r]\tau = \sigma_1\tau_1$. Непосредственно из определений вытекает

ЛЕММА 4. *Для всяких* $g, h\in G^*$ *найдется такое целое число* $r = r(g,h) \geq 0$, *что* $\mathrm{sqn}gh = (\mathrm{sqn}g)[r](\mathrm{sqn}h)$, *причем* $\mathrm{sqn}g = \sigma_1\rho$, $\mathrm{sqn}h = \rho^{-1}\tau_1$, $|\rho| = r$.

Нам потребуется еще следующее представление слов из G^*. Пусть $w = g_0t^{\varepsilon_1}g_1\dots t^{\varepsilon_n}g_n$, $g_i\in G$, $\varepsilon_i = \pm1$, – приведенная форма элемента $w\in G^*$. Назовем слово w *положительным* (*отрицательным*), если все показатели ε_i положительны (соответственно, отрицательны). Слово w назовем *однородным*, если оно либо положительно, либо отрицательно. Если w не однородно, то его можно представить в виде произведения подслов чередующихся знаков, т. е. если $w = g_0t^{\varepsilon_1}g_1\dots t^{\varepsilon_i}g_it^{\varepsilon_{i+1}}\dots t^{\varepsilon_n}g_n$, и все показатели $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_i$ одного знака, а ε_{i+1} имеет другой знак, то положим $w = w_1w'$, где $w_1 = g_0t^{\varepsilon_1}g_1\dots t^{\varepsilon_i}g_i$ – однородное подслово, а $w' = t^{\varepsilon_{i+1}}g_{i+1}\dots t^{\varepsilon_n}g_n$. Подслово w_1 назовем *начальным квазислогом* слова w. Аналогично, в слове w' выделим начальный квазислог и запишем $w' = w_2w''$, где w_2 – максимальное однородное подслово слова w'. Продолжая эту процедуру, представим w в виде произведения

$$w = w_1w_2\dots w_p,$$

множители w_i которого называются *квазислогами* слова w.

Хорошо известно, что свободное произведение $A * B$, где $|A| \geq 3$, $|B| \geq 2$, содержит свободную неабелеву подгруппу. Аналогично, свободное произведение с объединением $A \underset{U}{*} B$, где $|A:U| \geq 3$, $|B:U| \geq 2$ содержит свободную неабелеву подгруппу (см. [11]).

Покажем, что HNN–расширение $G^* = (G, t \mid\mid t^{-1}At = B,\ \varphi)$, в котором $A \neq G \neq B$, содержит свободную неабелеву подгруппу. Действительно, пусть a, b — нетривиальные представители смежных классов группы G по подгруппам A и B соответственно. Положим $x = atb$, $y = t^{-1}atbt$. Так как $a \notin A$, $b \notin B$, то можно показать, что никакой элемент группы (x,y) не сопряжен в G^* с элементом из G, а это и означает [9, с.289], что x и y порождают свободную неабелеву подгруппу. Легко проверить, что в этом случае G^* богата вербальными подгруппами.

Используя технику, разработанную для свободных групп Ю. И. Мерзляковым [12], Сакердот [13] установил, что любые свободные произведения $A * B$, $|A| \geq 3$, $|B| \geq 2$, имеют одинаковые позитивные теории. В связи с этими результатами естественно сформулировать

Вопрос 3. Верно ли, что любые свободные произведения с объединением $A \underset{U}{*} B$, $|A:U| \geq 3$, $|B:U| \geq 2$, имеют одну и ту же позитивную теорию?

Вопрос 4. Верно ли, что любые HNN–расширения

$$G^* = (G, t \mid\mid t^{-1}At = B,\ \varphi), \quad |G:A| \geq 2, \quad |G:B| \geq 2$$

имеют одну и ту же позитивную теорию?

§ 2. КВАЗИГОМОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ

В этом параграфе мы установим достаточное условие того, что в группе G ширина вербальной подгруппы $V(G)$ бесконечна относительно конечного множества слов V .

Пусть $f : G \longrightarrow \mathbf{R}$ — некоторая функция, определенная на группе G и принимающая значения из множества действительных чисел $\mathbf{R}$. Назовем f *квазигомоморфной*, если функция $f(xy) - f(x) - f(y)$ ограничена на $G \times G$, т.е. найдется такая константа $c \geq 0$, что

$$|f(xy) - f(x) - f(y)| \leq c$$

для всех $x, y \in G$. (Легко видеть, что тогда и

$$|f(x^{-1}) + f(x)| \leq c + |f(e)|$$

для всех $x \in G$. Легко видеть также, что для ограниченности функции $f(xy) - f(x) - f(y)$ на G достаточно ее односторонней ограниченности на G сверху или снизу.) Будем говорить, что f *квазианнулирует s–е степени*, $s \geq 2$, если функция $f(x^s)$ ограничена на G (если f квазигомоморфна, то опять-таки достаточна односторонняя ограниченность функции $f(x^s)$).

ЛЕММА 5. *Пусть функция $f : G \longrightarrow \mathbf{R}$ квазигомоморфна. Тогда для всякого натурального числа n найдется такая константа $c(n)$, зависящая только от n, что значение функции f на произведении любых n коммутаторов из G не превосходит $c(n)$.*

ЛЕММА 6. *Пусть функция $f : G \longrightarrow \mathbf{R}$ квазигомоморфна и квазианнулирует s-е степени. Тогда для всякого элемента $g \in G$ представимого в виде произведения не более l s–х степеней и m коммутаторов, найдется такая константа $c(l, m)$, зависящая только от l, m, что*

$$f(g) \leq c(l, m).$$

Доказательство этих утверждений вытекает непосредственно из определений.

Пусть далее V — множество теоретико–групповых слов. Функцию $f : G \longrightarrow \mathbf{R}$ будем называть *V–слойно ограниченной* на G, если для всякого $n = 1, 2, \ldots$ найдётся такая константа $c(n) \in \mathbf{R}$, что $f(g) \leq c(n)$ для всякого элемента g, представимого в виде произведения n значений слов из V на G. Таким образом, если f — квазигомоморфная функция на группе G, а V — коммутаторное множество слов, то ввиду леммы 5, функция f является V–слойно ограниченной на G. Если же f — квазигомоморфная функция и квазианнулирует s–е степени на группе G, а V — множество слов эквивалентное x^s, V_0, где V_0 — коммутаторное множество слов, то ввиду леммы 6, функция f является V–слойно ограниченной на G.

Снова прямо из определения следует

ЛЕММА 7. *Пусть G — группа. Если для множества слов V, определяющего вербальную подгруппу $V(G)$, найдётся V–слойно–ограниченная функция f, не ограниченная на $V(G)$, то* $\mathrm{wid}(G, V) = \infty$.

Линдон и некоторые другие авторы (см. [9, гл. 1, § 9]) изучали на группах абстрактные функции длины. В частности, Линдон установил, что всякая группа, допускающая функцию длины, свободна. В связи с введенными в этом параграфе определениями кажется интересным

Вопрос 5. Охарактеризовать группы, допускающие квазигомоморфные функции, не ограниченные на коммутанте. Охарактеризовать группы G, допускающие квазигомоморфные функции, квазианнулирующие s–е, $s \geq 2$ степени и не ограниченные на $G^s = (x^s \mid\mid x \in G)$.

§ 3. V–СЛОЙНО–ОГРАНИЧЕННЫЕ ФУНКЦИИ НА HNN—РАСШИРЕНИЯХ

В этом параграфе мы рассмотрим группу $G^* = (G, t \;\; || \; t^{-1}At = B, \; \varphi)$, являющуюся HNN–расширением, с разрешимой проблемой равенства слов. Определим вначале на G^* квазигомоморфную функцию.

Следуя [2, с.20], назовем 3–*следом* целого числа m число

$$\mathrm{tr}(m) = \begin{cases} 0 & \text{при } \; m \equiv 0 \pmod 3, \\ 1 & \text{при } \; m \equiv 1 \pmod 3, \\ -1 & \text{при } \; m \equiv -1 \pmod 3. \end{cases}$$

Очевидно, что для любых целых чисел m, n имеют место равенства

$$\mathrm{tr}(m+n) = \begin{cases} \mathrm{tr}(m) + \mathrm{tr}(n) - 3 & \text{при } \; m \equiv n \equiv 1, \\ \mathrm{tr}(m) + \mathrm{tr}(n) + 3 & \text{при } \; m \equiv n \equiv -1, \\ \mathrm{tr}(m) + \mathrm{tr}(n) & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где запись $a \equiv b$ означает, что a сравнимо с b по модулю 3. Следовательно, всегда

$$|\mathrm{tr}(m+n) - \mathrm{tr}m - \mathrm{tr}n| \leq 3. \tag{1}$$

Пусть u — слово в алфавите $X = \{x_1, \; x_2, \ldots\}$. Согласно [10, с.137], *логарифмом* u по основанию $x_i \in X$ называется целое число $\log_i u$, равное сумме показателей при букве x_i в слове u.

Определим теперь *квазилогарифм*

$$ql : G^* \longrightarrow \mathbf{Z}$$

следующим образом. Пусть w — приведенное слово из G^*, представленное в виде произведения квазислогов, т. е.

$$w = w_1 w_2 \ldots w_p,$$

где w_i — либо положительное, либо отрицательное подслово, и рядом стоят подслова разных знаков. Положим

$$\mathrm{ql}(w) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{tr}(\log_t w_i).$$

Как отмечалось ранее, приведенная форма определена неоднозначно, но, ввиду леммы 3, определение квазилогарифма корректно, т. е. если w' — приведенное слово, представляющее тот же элемент группы G^*, что и слово w , то $\mathrm{ql}(w) = \mathrm{ql}(w')$.

Введенная таким образом функция ql квазигомоморфна; более точно, справедлива

ЛЕММА 8. *Для всяких u, v из* HNN–*расширения G^* выполняются соотношения*

$$\mathrm{ql}(u^{-1}) = -\mathrm{ql}(u),$$

$$|\mathrm{ql}(uv) - \mathrm{ql}(u) - \mathrm{ql}(v)| \le 6.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u = g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 \dots t^{\varepsilon_m} g_m$ — приведенное слово. Очевидно, что тогда $u^{-1} = g_m^{-1} t^{-\varepsilon_m} \dots g_1^{-1} \times \times t^{-\varepsilon_1} g_0^{-1}$ — также приведенное слово, и первое равенство легко вытекает из определения функции ql.

Пусть $v = h_0 t^{\mu_1} h_1 \dots t^{\mu_l} h_l$ — еще одно приведенное слово. Произведение

$$uv = g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 \dots t^{\varepsilon_m} g_m h_0 t^{\mu_1} h_1 \dots t^{\mu_l} h_l, \tag{2}$$

вообще говоря, не обязано быть приведенным. Рассмотрим все возможные здесь случаи.

Пусть вначале показатели ε_m и μ_1 одного знака. Положим $g'_m = g_m h_0$. Тогда (2) является приведенной формой слова uv. Если, при этом

$$u = u_1 u_2 \dots u_p, \quad v = v_1 v_2 \dots v_q$$

— представления в виде произведения квазислогов, то

$$uv = u_1 u_2 \dots u_{p-1} w v_2 \dots v_q, \quad w = u_p v_1$$

— представление в виде произведения квазислогов элемента uv. По определению квазилогарифма,

$$\mathrm{ql}(uv) = \sum_{j=1}^{p-1} \mathrm{ql}(u_j) + \mathrm{ql}(w) + \sum_{j=2}^{q} \mathrm{ql}(v_j). \tag{3}$$

Так как w — однородное слово, то

$$\mathrm{ql}(w) = \mathrm{tr}(\log_t(u_p v_1)) = \mathrm{tr}(\log_t u_p + \log_t v_1).$$

По свойству функции tr (см. (1)),

$$|\mathrm{ql}(w) - \mathrm{ql}(u_p) - \mathrm{ql}(v_1)| \le 3.$$

Следовательно, из (3) получаем

$$|\mathrm{ql}(uv) - \mathrm{ql}(u) - \mathrm{ql}(v)| \le 3,$$

т. е. в этом случае вторая формула леммы справедлива.

Пусть, далее, показатели ε_m и μ_1 имеют разные знаки. Для определенности, будем считать, что $\varepsilon_m = -1$, $\mu_1 = 1$ (двойственный случай разбирается аналогично).

Предположим, что элемент $g_m h_0$ не лежит в A. Тогда слово (2) является приведенным и его можно представить в виде произведения квазислогов следующим образом:

$$uv = u_1 u_2 \dots u_{p-1} u'_p v'_1 v_2 \dots v_q, \quad u'_p = u_p h_0, \quad v'_1 = h_0^{-1} v_1.$$

Очевидно, что

$$\mathrm{ql}(u'_p) = \mathrm{ql}(u_p), \quad \mathrm{ql}(v'_1) = \mathrm{ql}(v_1)$$

Следовательно,

$$\mathrm{ql}(uv) = \mathrm{ql}(u) + \mathrm{ql}(v),$$

и требуемое утверждение в этом случае также установлено.

Пусть, наконец, элемент $g_m h_0$ лежит в A. Выделим в слове (2) подслово максимальной длины, которое в результате приведения дает слово длины 0, т.е. попадает в G. Обозначим его w. Тогда

$$uv = u_1 u_2 \dots u_{i-1} u' w v' v_{p-i+2} \dots v_q,$$

где $w = w_1 w_2,\ w_1 = u'' u_{i+1} \dots u_p$ — конечное подслово слова u, $w_2 = v_1 \dots v_{p-i} v''$ — начальное подслово слова v, $u_i = u'u''$, $v_{p-i+1} = v''v'$. Очевидно, что в этом случае $\mathrm{ql}(w_1) = -\mathrm{ql}(w_2)$, а подслова u' и v' (так же, как u'' и v'') имеют разные знаки. По определению,

$$\mathrm{ql}(u) = \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{ql}(u_j) + \mathrm{ql}(u'u'') + \sum_{j=i+1}^{p} \mathrm{ql}(u_j),$$
$$\mathrm{ql}(v) = \sum_{j=1}^{p-i} \mathrm{ql}(v_j) + \mathrm{ql}(v''v') + \sum_{j=p-i+2}^{q} \mathrm{ql}(v_j). \tag{4}$$

В зависимости от длины подслов u' и v' рассмотрим несколько случаев. Предположим вначале, что u' и v' имеют длину 0. Тогда

$$\mathrm{ql}(uv) = \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{ql}(u_j) + \mathrm{ql}(w) + \sum_{j=p-i+2}^{q} \mathrm{ql}(v_j).$$

Так как w лежит в G, то $\mathrm{ql}(w) = 0$.

С другой стороны, равенства (4) можно записать в виде

$$\mathrm{ql}(u) = \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{ql}(u_j) + \mathrm{ql}(w_1),$$

$$\mathrm{ql}(v) = \mathrm{ql}(w_2) + \sum_{j=p-i+2}^{q} \mathrm{ql}(v_j).$$

Складывая почленно эти два равенства и учитывая, что $\mathrm{ql}(w_1) + \mathrm{ql}(w_2) = 0$, получим

$$\mathrm{ql}(uv) = \mathrm{ql}(u) + \mathrm{ql}(v).$$

Предположим теперь, что u' имеет длину > 0, а длина v' равна 0 (двойственный случай, когда длина u' равна 0, а длина v' больше 0, разбирается аналогично). Так как в этом случае $wv' \in G$, а подслова u' и v_{p-i+2} одного знака, то

$$\mathrm{ql}(uv) = \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{ql}(u_j) + \mathrm{ql}(u'wv'v_{p-i+2}) + \sum_{j=p-i+3}^{q} \mathrm{ql}(v_j)$$

и

$$|\mathrm{ql}(u'wv'v_{p-i+2}) - \mathrm{ql}(u') - \mathrm{ql}(v_{p-i+2})| \le 3.$$

Следовательно,

$$\left|\mathrm{ql}(uv) - \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{ql}(u_j) - \mathrm{ql}(u') - \mathrm{ql}(v_{p-i+2}) - \sum_{j=p-i+3}^{q} \mathrm{ql}(v_j)\right| \leq 3. \tag{5}$$

Так как

$$|\mathrm{ql}(u'u'') - \mathrm{ql}(u') - \mathrm{ql}(u'')| \leq 3$$

и

$$\mathrm{ql}(v''v') = \mathrm{ql}(v''),$$

то формулы (4) можно переписать в виде

$$\left|\mathrm{ql}(u) - \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{ql}(u_j) - \mathrm{ql}(u') - \mathrm{ql}(u'') - \sum_{j=i+1}^{p} \mathrm{ql}(u_j)\right| \leq 3,$$

$$\mathrm{ql}(v) = \sum_{j=1}^{p-i} \mathrm{ql}(v_j) + \mathrm{ql}(v'') + \sum_{j=p-i+2}^{q} \mathrm{ql}(v_j).$$

Отсюда, ввиду равенств

$$\mathrm{ql}(w_1) = \mathrm{ql}(u'') + \sum_{j=i+1}^{p} \mathrm{ql}(u_j),$$

$$\mathrm{ql}(w_2) = \sum_{j=1}^{p-i} \mathrm{ql}(v_j) + \mathrm{ql}(v''),$$

получаем окончательные оценки для $\mathrm{ql}(u)$ и $\mathrm{ql}(v)$:

$$\left|\mathrm{ql}(u) - \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{ql}(u_j) - \mathrm{ql}(u') - \mathrm{ql}(w_1)\right| \leq 3,$$

$$\mathrm{ql}(v) = \mathrm{ql}(w_2) + \sum_{j=p-i+2}^{q} \mathrm{ql}(v_j).$$

Отсюда и из равенства $\mathrm{ql}(w_1) + \mathrm{ql}(w_2) = 0$ следует, что

$$\left|\mathrm{ql}(u) + \mathrm{ql}(v) - \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{ql}(u_j) - \mathrm{ql}(u') - \sum_{j=p-i+2}^{q} \mathrm{ql}(v_j)\right| \leq 3,$$

а потому, ввиду (5),

$$|\mathrm{ql}(uv) - \mathrm{ql}(u) - \mathrm{ql}(v)| \leq 6,$$

т. е. требуемое утверждение справедливо и в этом случае.

Пусть, наконец, оба слова u' и v' имеют длину > 0 . Так как u' и v' — однородные подслова разных знаков, $w \in G$, то

$$\mathrm{ql}(uv) = \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{ql}(u_j) + \mathrm{ql}(u') + \mathrm{ql}(v') + \sum_{j=p-i+2}^{q} \mathrm{ql}(v_j). \tag{6}$$

Оценим значения $\mathrm{ql}(u)$ и $\mathrm{ql}(v)$. По определению,

$$\mathrm{ql}(u) = \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{ql}(u_j) + \mathrm{ql}(u'u'') + \sum_{j=i+1}^{p} \mathrm{ql}(u_j),$$

$$\mathrm{ql}(v) = \sum_{j=1}^{p-i} \mathrm{ql}(v_j) + \mathrm{ql}(v''v') + \sum_{j=p-i+2}^{q} \mathrm{ql}(v_j).$$

Далее, по свойству квазилогарифма,

$$|\mathrm{ql}(u'u'') - \mathrm{ql}(u') - \mathrm{ql}(u'')| \leq 3,$$

$$|\mathrm{ql}(v''v') - \mathrm{ql}(v'') - \mathrm{ql}(v')| \leq 3.$$

Используя эти неравенства, получим искомые оценки

$$\left|\mathrm{ql}(u) - \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{ql}(u_j) - \mathrm{ql}(u') - \mathrm{ql}(u'') - \sum_{j=i+1}^{p} \mathrm{ql}(u_j)\right| \leq 3,$$

$$\left|\mathrm{ql}(v) - \sum_{j=1}^{p-i} \mathrm{ql}(v_j) - \mathrm{ql}(v'') - \mathrm{ql}(v') - \sum_{j=p-i+2}^{q} \mathrm{ql}(v_j)\right| \leq 3.$$

Далее, учитывая, что

$$\mathrm{ql}(w_1) = \mathrm{ql}(u'') + \sum_{j=i+1}^{p} \mathrm{ql}(u_j),$$

$$\mathrm{ql}(w_2) = \sum_{j=1}^{p-i} \mathrm{ql}(v_j) + \mathrm{ql}(v'')$$

и $\mathrm{ql}(w_1) + \mathrm{ql}(w_2) = 0$, получаем

$$\left|\mathrm{ql}(u) + \mathrm{ql}(v) - \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{ql}(u_j) - \mathrm{ql}(u') - \mathrm{ql}(v') - \sum_{j=p-i+2}^{q} \mathrm{ql}(v_j)\right| \leq 6.$$

Следовательно, ввиду равенства (6),

$$|\mathrm{ql}(uv) - \mathrm{ql}(u) - \mathrm{ql}(v)| \leq 6.$$

Последний случай рассмотрен, и лемма доказана.

Таким образом, функция ql квазигомоморфна на HNN–расширениях.

Фиксируем теперь натуральное число $s \geq 2$. Построим на HNN–расширении G^* функцию, которая аннулирует s–е степени и является квазигомоморфной.

Пусть $\sigma = (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)$ — сигнатура, $p_k(\sigma)$ — число ее "плюс-участков"

$$- \underbrace{+ \dots +}_{k} -$$

длины k, $m_k(\sigma)$ — число "минус-участков"

$$+ \underbrace{- \ldots -}_{k} +$$

длины k и $d_k(\sigma) = p_k(\sigma) - m_k(\sigma)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Если $g \in G^*$, то положим соответственно $p_k(g) = p_k(\sigma)$, $m_k(g) = m_k(\sigma)$, $d_k(g) = d_k(\sigma)$ где $\sigma = \mathrm{sqn} g$. Так как $\mathrm{sqn} g^{-1} = (\mathrm{sqn} g)^{-1}$, то

$$p_k(g^{-1}) = m_k(g), \quad d_k(g^{-1}) = -d_k(g)$$

для любого $g \in G^*$.

Введем следующие обозначения: если φ_k, ψ_k, ξ_k — функции, индексированные параметром k, принимающим целые неотрицательные значения, то запись $\varphi_k \underset{p}{=} \psi_k$ означает, что $\varphi_k = \psi_k$ для всех значений параметра k, за исключением не более чем p значений. Очевидно, что если $\varphi_k \underset{p}{=} \psi_k$ и $\psi_k \underset{q}{=} \xi_k$, то $\varphi_k \underset{p+q}{=} \xi_k$; если $\varphi_k \underset{p}{=} \varphi'_k$ и $\psi_k \underset{q}{=} \psi'_k$, то $\varphi_k + \psi_k \underset{p+q}{=} \varphi'_k + \psi'_k$.

ЛЕММА 9. *Для любых элементов $g, h \in G^*$ справедливо соотношение*

$$d_k(gh) \underset{6}{=} d_k(g) + d_k(h),$$

где левая и правая части понимаются естественным образом как функции на $G^* \times G^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим: $\sigma = \mathrm{sqn} g$, $\tau = \mathrm{sqn} h$. Тогда, по лемме 4, $\sigma = \sigma_1 \rho$, $\tau = \rho^{-1} \tau_1$, $|\rho| = r \geq 0$ и

$$\mathrm{sqn} gh = \sigma[r]\tau = \sigma_1 \tau_1.$$

Очевидно, что если φ_k обозначает функцию p_k или m_k, то

$$\varphi_k(\alpha\beta) \underset{1}{=} \varphi_k(\alpha) + \varphi_k(\beta)$$

для любых сигнатур α, β, так как плюс–участки (минус–участки) сигнатуры $\alpha\beta$ — это плюс–участки (минус–участки) сигнатур α, β и не более чем один новый плюс–участок (минус–участок) на стыке α и β. В частности,

$$\varphi_k(gh) = \varphi_k(\sigma_1 \tau_1) \underset{1}{=} \varphi_k(\sigma_1) + \varphi_k(\tau_1).$$

Далее,

$$\varphi_k(g) = \varphi_k(\sigma_1 \rho) \underset{1}{=} \varphi_k(\sigma_1) + \varphi_k(\rho),$$

$$\varphi_k(h) = \varphi_k(\rho^{-1} \tau_1) \underset{1}{=} \varphi_k(\rho^{-1}) + \varphi_k(\tau_1).$$

Следовательно,

$$\varphi_k(gh) \underset{3}{=} \varphi_k(g) - \varphi_k(\rho) + \varphi_k(h) - \varphi_k(\rho^{-1}).$$

Вспоминая определение функции d_k и учитывая, что $p_k(\rho^{-1}) = m_k(\rho)$, получим утверждение леммы.

Определим теперь на группе G^* функцию $\gamma_s(x)$ как число значений k, для которых $d_k(x) \not\equiv 0 \pmod{s}$. Из леммы 9 непосредственно вытекает, что функция $\gamma_s(x)$ является квазигомоморфной. Покажем, что она аннулирует s–е степени.

ЛЕММА 10. *Для всякого $g \in G^*$ справедлива оценка*

$$\gamma_s(g^s) \leq 14.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $g \in G$, то утверждение леммы очевидно. Предположим, что длина приведенного слова, представляющего элемент g, больше 0. Если g не является циклически приведенным, то его можно представить в виде $g = h^{-1}g'h$, где слово g' циклически приведено. Следовательно, элемент g^s представим в виде $g^s = h^{-1}(g')^s h$ и слово $(g')^s$ циклически приведено.

Если $(g')^s$ представляет элемент из G, то $p_k((g')^s) = m_k((g')^s) = 0$ для всех k. Если $(g')^s \notin G$, $\sigma = \mathrm{sqn} g'$, а φ_k обозначает функцию p_k или m_k, то

$$\varphi_k((g')^s) = \varphi_k(\sigma^s) \underset{1}{=} s\varphi_k(g'),$$

так как каждый плюс–участок (минус–участок) сигнатуры σ повторяется в сигнатуре σ^s ровно s раз и, кроме того, в произведении $\sigma\sigma$ может возникнуть новый плюс–участок (минус–участок), который в σ^s повторяется $s-1$ раз. Значение k, равное длине этого участка, мы и не контролируем. Следовательно,

$$d_k((g')^s) \underset{2}{=} sd_k(g').$$

Далее, ввиду предыдущей леммы,

$$d_k(g^s) \underset{12}{=} d_k(h^{-1}) + d_k((g')^s) + d_k(h).$$

Учитывая, что $d_k(h^{-1}) + d_k(h) = 0$, получим

$$d_k(g^s) \underset{14}{=} sd_k(g'),$$

но, по определению функции γ_s, это и означает, что $\gamma_s(g^s) \leq 14$.

§ 4. ПОСТРОЕНИЕ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Будем считать, что в HNN–расширении $G^* = (G, t \mid\mid \ t^{-1}At = B, \ \varphi)$ подгруппы A и B отличны от G. Для каждого конечного множества слов V построим бесконечную последовательность элементов $a_1, a_2, \dots$ из $V(G^*)$ такую, что если V — коммутаторное множество слов, то последовательность чисел $|\mathrm{ql} a_1|, |\mathrm{ql} a_2|, \dots$, неограниченно возрастает; если V — некоммутаторное множество слов, эквивалентное множеству $W = \{x_1^s, \ u_j | j \in J, \ u_j \in F_n', \ s > 1\}$, то последовательность чисел $\gamma_s(a_1), \gamma_s(a_2), \dots$ также неограниченно возрастает. Так как, ввиду лемм 5 и 6, функции ql и γ_s являются V–слойно–ограниченными, для соответствующих множеств V, то ввиду леммы 7, это и будет означать, что G^* не имеет собственных вербальных подгрупп конечной ширины. А так как G^* богата вербальными подгруппами, то отсюда и последует теорема 1.

Пусть вначале V — конечное коммутаторное множество слов и $v(x) = v(x_1, \dots, x_m)$ — некоторое нетривиальное слово из V. Так как G^* содержит свободную неабелеву подгруппу, то она содержит и свободную подгруппу с m свободными порождающими $y_1, \dots, y_m$. Причем, ввиду построения порождающих свободной подгруппы (см. конец § 1), можно считать, что все порождающие y_i имеют t-длину > 0. Следовательно, элемент $v(y) = v(y_1, \dots, y_n)$ не равен единице в G^*, содержится в коммутанте $(G^*)'$ и длина его приведенной формы ≥ 2, т.е.

$$v(y) = g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 \dots t^{\varepsilon_n} g_n, \quad n \geq 2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

Запишем это слово в виде произведения квазислогов:

$$v(y) = w_1 \dots w_p.$$

Очевидно, что $p > 1$. Используя, если надо, сопряжение (которое не выведет нас из вербальной подгруппы $V(G^*)$), можно считать, что w_1 и w_p имеют разные знаки и слово $v(y)$ циклически приведено. Следовательно, для всякого натурального $i \geq 1$, i-я степень $v^i(y)$ слова $v(y)$ также будет циклически приведенным словом. Ввиду свойства функции ql, будем иметь

$$\mathrm{ql}(v^i(y)) = i\mathrm{ql}(v(y)), \quad i = 1, 2, \dots.$$

Если значение $\mathrm{ql}(v(y))$ отлично от нуля, то в качестве искомой последовательности возьмем последовательность

$$a_i = v^i(y), \quad i = 1, 2, \dots.$$

Очевидно, что она удовлетворяет всем необходимым условиям. Если $\mathrm{ql}(v(y)) = 0$, то выберем целое число α так, что если последний квазислог w_p является положительным (отрицательным), то и α возьмем положительным (соответственно, отрицательным). Кроме того, если значение $\mathrm{ql}(w_p) \neq 1$, то в качестве α возьмем такое число, что значение $\mathrm{ql}(w_p t^\alpha)$ равно 1; если же $\mathrm{ql}(w_p) = 1$, то выберем α так, что $\mathrm{ql}(w_p t^\alpha) = -1$. Положим, далее,

$$b_1 = t^{-\alpha} v(y) t^\alpha, \;\; b_i = t^{-\alpha} b_{i-1} v(y) t^\alpha = t^{-\alpha i}(v(y)t^\alpha)^i, \quad i = 2, 3, \dots$$

Очевидно, что все b_i лежат в вербальной подгруппе $v(G^*) \leq V(G^*)$. В качестве искомой последовательности возьмем последовательность

$$a_j = b_{3j}, \quad j = 1, 2, \dots.$$

Легко проверить, что значение $\mathrm{ql}(v(y)t^\alpha) \neq 0$. Так как слово $v(y)t^\alpha$ циклически приведено и знак его первого квазислога отличен от знака последнего квазислога, то

$$\mathrm{ql}((v(y)t^\alpha)^i) = i\mathrm{ql}(v(y)t^\alpha).$$

А так как

$$\mathrm{ql}(t^{-3\alpha j}(v(y)t^\alpha)^{3j}) = \mathrm{ql}((v(y)t^\alpha)^{3j} = 3j\mathrm{ql}(v(y)t^\alpha),$$

то последовательность $a_j, \; j = 1, 2, \dots$, действительно является искомой.

Пусть теперь V — некоммутаторное множество слов. Как отмечалось ранее, множество V эквивалентно множеству слов $W = \{x_1^s, \; u_j | j \in J, \; u_j \in \in F_n', \; s > 1\}$. Покажем, что множество $G \setminus (A \cup B)$ непусто. Действительно, по предположению, сделанному в начале параграфа, подгруппы A и B отличны от G. Предположим, что их объединение совпадает с G. Выберем элементы $a \in G \setminus B$ и $b \in G \setminus A$. По предположению, $a \in A$, $b \in B$. Рассмотрим их произведение ab. Так как $G = A \cup B$, то ab попадает либо в A, либо в B. Если $c = ab \in A$, то $b = a^{-1}c$ также должен лежать в A и тогда $G = A$. Если же $c = ab \in B$, то аналогично,

$G = B$. Полученное противоречие показывает, что множество $G \setminus (A \cup B)$ непусто. Выберем в этом множестве элемент g и определим последовательность

$$a_j = (gt)^s (gt^{-1})^{2s} (gt)^s (gt^{-1})^{3s} (gt)^s \dots (gt^{-1})^{js} (gt)^s, \quad j = 2, 3, \dots .$$

Так как, по лемме 2, s–я степень любого элемента из G^* лежит в вербальной подгруппе $V(G^*)$, то и все a_j лежат в этой вербальной подгруппе. Вычислим значения $\gamma_s(a_j)$. Для этого нам надо знать $p_k(a_j)$ и $m_k(a_j)$. Легко проверить, что

$$p_s(a_j) = j - 2, \quad p_{2s}(a_j) = \dots = p_{js}(a_j) = 0,$$

$$m_s(a_j) = 0, \quad m_{2s}(a_j) = \dots = m_{js}(a_j) = 1$$

и $p_k(a_j) = m_k(a_j) = 0$ для всех остальных значений k. В частности,

$$d_s(a_j) = j - 2, \quad d_{2s}(a_j) = \dots = d_{js}(a_j) = -1.$$

Так как, по определению, $\gamma_s(x)$ — число значений k, для которых $d_k(a_j) \not\equiv 0 \pmod{s}$, то $\gamma_s(a_j) \geq j - 1$. Таким образом, последовательность $a_2, a_3, \dots$ является искомой и нами доказана

ТЕОРЕМА 1. *Пусть в* HNN*–расширении*

$$G^* = (G, t \mid\mid t^{-1}At = B, \ \varphi)$$

связанные подгруппы A, B отличны от базовой группы G. Тогда всякая вербальная подгруппа $V(G^*)$, определённая конечным собственным множеством слов V, имеет бесконечную ширину относительно V.

Вопрос о ширине вербальных подгрупп HNN–расширений, в случае когда хотя бы одна из связанных подгрупп A или B совпадает с базой G, остается открытым. Примеры, построенные в § 5 показывают, что эта ширина зависит от соответствующей ширины группы G.

Следующим шагом в изучении групп, не имеющих собственных вербальных подгрупп конечной ширины, может быть исследование свободных произведений с объединением $G = A \underset{U}{*} B$. Как мы заметили ранее, если $|A : U| \geq 3$ и $|B : U| \geq 2$, то G содержит свободную неабелеву подгруппу.

Вопрос 6. Пусть $G = A \underset{U}{*} B$ — свободное произведение с объединением, причем, $|A : U| \geq 3$ и $|B : U| \geq 2$, V — конечное собственное множество слов. Верно ли, что ширина вербальной подгруппы $V(G)$ относительно множества V бесконечна ?.

Справедливо следующее утверждение

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть $G = A \underset{U}{*} B$, $|A : U| \geq 3$ и $|B : U| \geq 2$, причем, $U \triangleleft A$ и $U \triangleleft B$, V — конечное собственное множество слов. Тогда ширина вербальной подгруппы $V(G)$ относительно множества V бесконечна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим гомоморфизм группы G на свободное произведение $A_1 * B_1$, где $A_1 = A/U$, $B_1 = B/U$. Так как при гомоморфизме ширина вербальной подгруппы не увеличивается и образ подгруппы $V(G)$ является собственной вербальной подгруппой в свободном произведении $A_1 * B_1$, то требуемое утверждение следует из теоремы Ремтуллы о ширине вербальных подгрупп свободных произведений.

После изучения свободных произведений с объединением естественно переходить к исследованию более общих групповых конструкций, таких как древесное произведение, а также — фундаментальная группа графа групп.

Сформулируем еще два вопроса, связанные с проблемами аппроксимируемости.

Пусть G — группа, у которой ширина вербальной подгруппы $V(G)$ относительно множества слов V бесконечна. Будем называть такую группу V–*широкой*. Назовем V–широкую группу G V–*сужаемой*, если для всякого натурального n найдется группа G_n, являющаяся эпиморфным образом группы G и такая, что ширина $\mathrm{wid}(G_n, V) = n$. В частности, если V состоит из одного слова $[x, y]$, то будем называть G *коммутаторно сужаемой*.

Вопрос 7. Является ли свободная неабелева группа коммутаторно сужаемой?

Вопрос 8. Всякая ли V–широкая группа является V–сужаемой?

В классе всех конечно порожденных групп можно выделить группы, не имеющие собственных вербальных подгрупп конечной ширины. К ним относятся свободные неабелевы группы, большинство свободных произведений, многие из HNN–расширений и др. На другом полюсе находятся группы, у которых все вербальные подгруппы имеют конечную ширину. К ним относятся нильпотентные группы, метабелевы, алгебраические группы матриц и др. Интересно было бы изучить вербальные подгруппы бесконечных периодических групп. Особый интерес представляют коммутант и подгруппа, порожденная s–ми степенями.

Вопрос 9. Пусть G — конечно порожденная бесконечная p-группа. Какова ширина $\mathrm{wid}(G, v)$, если *а*) $v = [x, y]$, *б*) $v = x^s$, $s > 1$?

§ 5. ГРУППЫ С ОДНИМ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ СООТНОШЕНИЕМ

Предположим, что в группе

$$G^* = (G, t \mid\mid t^{-1}At = B,\ \varphi)$$

хотя бы одна из подгрупп A или B совпадает с G. Не уменьшая общности, можно считать, что $A = G$. В противном случае, обозначим $\tau = t^{-1}$, перейдём к представленю

$$G^* = (G, \tau \mid\mid \tau^{-1}B\tau = A,\ \varphi^{-1})$$

и переобозначим A и B. Справедлива

ЛЕММА 11. *В* HNN–*расширении*

$$G^* = (G, t \mid\mid t^{-1}Gt = B,\ \varphi)$$

всякий элемент $g \in G^*$ *представим в виде*

$$g = t^k a t^{-l}, \quad a \in G, \quad k, l \in \mathbf{N} \cup \{0\},$$

причём, $k - l = \log_t g$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем смотреть на определяющие соотношения группы G^*, содержащие проходную букву t, как на соотношения квазикоммутативности, переписав их в виде

$$at = ta^{\varphi}, \tag{1}$$

$$t^{-1}a = a^{\varphi}t^{-1}, \tag{2}$$

где $a \in G$, $a^{\varphi} \in B$. Эти соотношения позволяют перебросить символ t^{-1} через произвольный элемент из G слева направо, а символ t — через произвольный элемент из G справа налево.

Пусть $g \in G^*$. Представим этот элемент в виде произведения квазислогов

$$g = w_1 \dots w_q$$

и проведём доказательство леммы индукцией по q, т. е. по числу квазислогов, входящих в это разложение. Предположим вначале, что $q = 1$. Тогда $g = w_1$ представлен либо положительным, либо отрицательным словом. Если w_1 — положительное слово, то

$$g = g_0 t g_1 t \dots t g_n, \quad g_i \in G,\ i = 0, \dots, n.$$

Используя соотношения (1), перенесём все символы t влево, получим

$$g = t^n \left(\dots \left(g_0^{\varphi} g_1\right)^{\varphi} \dots g_{n-1}\right)^{\varphi} g_n.$$

Если w_1 — отрицательное слово, то $g = g_0 t^{-1} g_1 t^{-1} \dots t^{-1} g_m$ и, используя соотношения (2), перенесём все символы t^{-1} вправо, получим

$$g = g_0 \left(g_1 \dots \left(g_{m-1} g_m^{\varphi}\right)^{\varphi} \dots\right)^{\varphi} t^{-m}.$$

Таким образом, основание индукции установлено.

Пусть теперь $q > 1$. Предположим, что утверждение леммы справедливо для всех слов имеющих квазислоговую длину $< q$. Рассмотрим представление элемента

$$g = w_1 \dots w_q, \quad q > 1,$$

в виде произведения квазислогов. По индуктивному предположению

$$w_1 \dots w_{q-1} = t^{k_1} a_1 t^{-l_1}, \quad a_1 \in G, \quad k_1, l_1 \in \mathbf{N} \cup \{0\},$$

$$k_1 - l_1 = \log_t(w_1 \dots w_{q-1}).$$

Если слово w_q положительно, то, как было установлено выше, $w_q = t^n c$, $c \in G$, $n = \log_t w_q$. Следовательно

$$g = t^{k_1} a_1 t^{-l_1 + n} c.$$

если при этом $-l_1 + n$ положительно, то используя соотношения (1), перенесём t^{-l_1+n} влево, получим

$$g = t^{k_1 - l_1 + n} a_2 c, \quad a_2 \in G.$$

Так как $\log_t g = \log_t(w_1 \dots w_{q-1}) + \log_t w_q = k_1 - l_1 + n$, то в этом случае лемма установлена. Если же $-l_1 + n \leq 0$, то из соотношения (2),

$$g = t^{k_1} a_1 c_1 t^{-(l_1 - n)}, \quad c_1 \in G, \quad \log_t g = k_1 - (l_1 - n).$$

Пусть далее, w_q — отрицательное слово. Тогда, по доказанному ранее,

$$w_q = c t^{-m}, \quad c \in G,\ m \in \mathbf{N}.$$

Ввиду соотношений (2) элемент g можно представить в виде

$$g = t^{k_1} a_1 t^{-l_1} c t^{-m} = t^{k_1} a_1 c_2 t^{-(l_1+m)}, \quad c_2 \in G.$$

Учитывая основное свойство логарифма, получим

$$\log_t g = \log_t(w_1 \dots w_{q-1}) + \log_t w_q = k_1 - l_1 - m = k_1 - (l_1 + m).$$

Все случаи разобраны и лемма доказана.

Используя эту лемму, покажем, что теорема 1 перестаёт быть справедливой, если хотя бы одна из связанных подгрупп совпадает с базой расширения.

ПРИМЕР. Рассмотрим серию групп

$$G_n = (a, t \mid\mid t^{-1} a t = a^n), \quad n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}.$$

Хорошо известно (см., [9, гл. 2, предложение 5.25]), что группа G_n метабелева при $n \neq 1$, а G_1 — свободная абелева группа. Следовательно, всякая вербальная подгруппа группы G_n имеет конечную ширину. Более того, можно показать, что ширина коммутанта $\mathrm{wid}(G_n, [x, y])$ равна 1. Действительно, используя лемму 11 и коммутаторные тождества, легко проверить, что всякий элемент из коммутанта G_n' представим в виде $t^k a^{\alpha(n-1)} t^{-k}$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $\alpha \in \mathbf{Z}$. Ввиду следующего равенства

$$a^{\alpha(n-1)} = [t, a^{-\alpha}], \quad \alpha \in \mathbf{Z},$$

легко проверяемого непосредственно, заключаем, что всякий элемент коммутанта является коммутатором.

С другой стороны, HNN–расширение

$$G^* = (x, y, t \mid\mid t^{-1} x t = x, t^{-1} y t = y)$$

изоморфно прямому произведению $F_2 \times \mathbf{Z}$ свободной группы F_2 со свободными порождающими x, y и бесконечной циклической группы порождённой элементом t. Ввиду очевидного равенства

$$\mathrm{wid}(F_2 \times \mathbf{Z}, V) = \mathrm{wid}(F_2, V)$$

заключаем, что если V — конечное собственное множество слов, то ширина $\mathrm{wid}(G^*, V)$ бесконечна.

В классе групп с одним определяющим соотношением справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Пусть G — группа с одним определяющим соотношением, имеющая по меньшей мере три порождающих, V — конечное собственное множество слов. Тогда вербальная подгруппа $V(G)$ имеет бесконечную ширину относительно множества V.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что G задана своим генетическим кодом

$$G = (t, a, b, \dots \mid\mid r),$$

где слово r циклически приведено. Не уменьшая общности, будем считать, что слово r содержит все порождающие $t, a, b, \dots$, так как в противном случае, G является свободным произведением свободной группы и группы с одним определяющим соотношением, и утверждение теоремы следует из теоремы Ремтуллы [3]. Далее, ввиду леммы 11.8 [9, гл. 5], будем считать, что сумма показателей при t в слове r равна 0. Представим G в виде HNN–расширения. Для всякого целого i положим $a_i = t^{-i}at^i$, $b_i = t^{-i}bt^i$, и т. д. Перепишем слово r в этих символах и полученное слово обозначим через r'. Обозначим также через $\mu(x)$ и $m(x)$ соответственно минимальный и максимальный индексы при порождающем x группы G входящем в r'. Положим

$$H = (a_i, b_j, \ldots, \mu(a) \le i \le m(a), \mu(b) \le j \le m(b), \ldots \ || \ r'),$$
$$A = (a_i, b_j, \ldots, \mu(a) \le i < m(a), \mu(b) \le j < m(b), \ldots),$$
$$B = (a_i, b_j, \ldots, \mu(a) < i \le m(a), \mu(b) < j \le m(b), \ldots).$$

Очевидно, что A и B являются подгруппами группы H, и в этих обозначениях

$$G = (H, t \ || \ t^{-1}At = B).$$

Также как в доказательстве теоремы 11.9 [9, гл. 5], можно показать, что в группе G найдётся такой элемент z, что

$$z^{-1}Az \cap A = 1 = B \cap zBz^{-1}.$$

Отсюда, в частности, следует, что $A \ne H \ne B$ и утверждение теоремы 2 непосредственно вытекает из теоремы 1. Теорема 2 доказана.

Заметим, что всякая группа G из теоремы 2 является SQ– универсальной, т. е. такой, что каждая счётная группа изоморфна подгруппе некоторой факторгруппы группы G (см. [9, гл. 5, теорема 11.9]). В связи с этим утверждением кажется интересным

Вопрос 10. Верно ли, что всякая SQ–универсальная группа не содержит собственных вербальных подгрупп конечной ширины?

Как следует из построенного выше примера, для произвольной группы с двумя порождающими и одним определяющим соотношением, теорема 2 неверна. Но тем не менее кажется правдоподобной

Гипотеза. Пусть G — группа с двумя порождающими и одним определяющим соотношением, содержащая свободную неабелеву подгруппу, V — конечное собственное множество слов. Тогда ширина вербальной подгруппы $V(G)$ относительно множества V бесконечна.

В последние годы активно изучаются группы, являющиеся свободным произведением циклических групп с одним определяющим соотношением. Интересно было бы исследовать ширину вербальных подгрупп в этих группах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Мерзляков, Рациональные группы, 2–е изд. М.: Наука, 1987.

2. В. Г. Бардаков, К теории групп кос, Матем. сб., 183, №6 (1992), 3–42.

3. A. H. Rhemtulla, A problem of bounded expressibility in free products, Proc. Cambridge Phil. Soc., 64, №3 (1969), 573–584.

4. A. H. Rhemtulla, Commutators of certain finitely generated solvable groups, Canad. J. Math., 21, №5 (1969), 1160–1164.

5. Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп, 12–е изд. Новосибирск, 1992.

6. В. А. Романьков, О ширине вербальных подгрупп разрешимых групп, Алгебра и логика, 21, №1 (1982), 60–72.

7. Х. С. Аламбергенов, В. А. Романьков, О произведениях коммутаторов в группах, Деп. в ВИНИТИ, 1985, №4566–В85.

8. Д. И. Молдаванский, О некоторых подгруппах групп с одним определяющим соотношением, Сиб. матем. ж., 6, №6 (1967), 1370–1384.

9. Р. Линдон, П. Шупп, Комбинаторная теория групп, М.: Мир, 1980.

10. М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, Основы теории групп, 3–е изд., М.: Наука, 1984.

11. A. Karras, D. Solitar, The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroup, Trans. Amer. Math. Soc., 150, №1 (1970), 227–255.

12. Ю. И. Мерзляков, Позитивные формулы на свободных группах, Алгебра и логика, 5, №4 (1966), 25–42.

13. J. S. Sacerdote, Almost all free products of groups have the same positive theory, J. Algebra, 27, №3 (1973), 475–485.