УДК 515.162.8 + 512.543.14

# МНОГОЧЛЕНЫ ВЕЙЕРШТРАССА СИНГУЛЯРНЫХ КОС И ЗАЦЕПЛЕНИЙ [1]

В. Г. Бардаков, А. Ю. Веснин (г. Новосибирск)

**Аннотация**

Строятся многочлены Вейерштрасса для классических и сингулярных кос и зацеплений. Приводится алгоритм, позволяющий описать все $n$-листные неразветвленные накрытия окружности. При этом в каждом классе эквивалентных накрытий выбирается некоторый канонический представитель. Описываются $n$-листные разветвленные накрытия окружности, имеющие конечное число точек ветвления второго порядка.

## Введение

В силу основной теоремы алгебры, всякий многочлен от одной переменной с комплексными коэффициентами имеет $n$ комплексных корней, где $n$ — степень многочлена. Отсюда, в частности, следует, что всякий такой многочлен степени $> 1$ вполне приводим над полем комплексных чисел. Одно их направлений обобщения этого результата связано с рассмотрением многочленов от одной переменной, коэффициентами которых являются непрерывные комплекснозначные функции, определенные на некотором множестве $X$. Такие многочлены называются *многочленами Вейерштрасса.* Они естественным образом возникают в теории неявных функций при доказательстве подготовительной теоремы Вейерштрасса (см. [1, гл. 4, § 5]).

Р.С. Кантриман [2] изучал вопрос об описании компактов $X \subseteq \mathbb{C}$ на которых для любого уравнения вида

$$z^n + a_1(x)z^{n-1} + \dots + a_n(x) = 0, \quad \text{где} \quad a_i(x) \in C(X) \tag{1}$$

существует решение в классе $C(X)$ непрерывных комплекснозначных функций. Он доказал, что такой компакт $X$ должен удовлетворять очень жестким топологическим условиям. В частности, он не может содержать подкомпактов, гомеоморфных окружности.

Е.А. Горин и В.Я. Лин [3] рассматривали такие уравнения вида (1), что при каждом $x_0 \in X$ соответствующее уравнение с числовыми коэффициентами не имеет кратных корней. Были получены условия на компакт $X$, гарантирующие их полную разрешимость (полная разрешимость означает наличие по крайней мере $n$ различных непрерывных решений). В [3] доказано, что полная разрешимость всех уравнений вида (1), принадлежащих указанному классу, эквивалентна отсутствию нетривиальных гомоморфизмов фундаментальной группы $\pi_1(X)$ в группу кос Артина $\mathcal{B}_n$.

В работе Ю.В. Зюзина и В.Я. Лина [4] предпринята попытка построения теории разрешимости в радикалах, аналогичной классической теории Галуа, уравнений вида (1) с коэффициентами из коммутативной банаховой алгебры.

Более подробно отмеченные результаты обсуждаются в обзоре В.Я. Лина [5], где также приведена обширная библиография.

С несколько иной точки зрения многочлены Вейерштрасса рассматривались в работах В.Л. Хансена [6, 7]. Пусть $X$ — связное топологическое пространство. С каждым полиномом Вейерштрасса степени $n$ с коэффициентами из класса $C(X)$ связывается $n$-листное полиномиальное накрывающее пространство над $X$ и формулируется критерий эквивалентности накрытий в терминах гомоморфизмов группы $\pi_1(X)$ в группу подстановок $S_n$. Используя эту технику, дается критерий полной приводимости многочлена Вейерштрасса без кратных корней, отличный от критерия, полученного в [3].

В работе [7] изучаются многочлены Вейерштрасса для случая $X = S^1$ и доказывается, что всякое $n$-листное неразветвленное накрытие окружности $S^1$ является полиномиальным и соответствует

[1]Работа выполнена при поддежке РФФИ.

замыканию некоторой $n$-нитиевой косы. Кроме того, приводится критерий эквивалентности таких $n$-листных накрытий.

В настоящей работе строится алгоритм, позволяющий описать все $n$-листные накрывающие отображения окружности $S^1$ с точностью до эквивалентности. С этой целью в § 2 для каждой $n$-нитиевой косы $\beta$ задается ее параметрическое представление в $\mathbb{C} \times S^1$ по которому строится многочлен Вейерштрасса, корни которого находятся во взаимно-однозначном соответствии с точками косы $\beta$. Поскольку по теореме Александера всякое зацепление в $S^3$ может быть получено замыканием некоторой косы, каждому зацеплению соответствует некоторый (вообще говоря, не единственный) многочлен Вейерштрасса. Идея такого представления фактически содержится в работе [7]. Изучаются некоторые свойства построенных многочленов.

В § 3 рассматриваются сингулярные косы и сингулярные зацепления, активно изучаемые в последние годы в связи с появлением инвариантов Васильева [8, 9]. Каждому сингулярному зацеплению в $S^3$ сопоставлется многочлен Вейерштрасса, который, в отличие от случая классических зацеплений, имеет кратные корни. Такой многочлен определяет разветвленное накрытие окружности с точками ветвления второго порядка.

Авторы благодарят участников семинара “Эварист Галуа” за плодотворные обсуждения результатов работы.

## §1. Определения и вспомогательные утверждения

Напомним некоторые известные факты из теории кос (см., например, [5, 10]). Рассмотрим *конфигурационное* пространство

$$E_n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \quad | \quad z_i \neq z_j \quad \text{при} \quad i \neq j\}.$$

Его фундаментальная группа $\pi_1(E_n)$ называется группой *крашенных кос* на $n$ нитях и обозначается через $\mathcal{P}_n$. На пространстве $E_n$ естественным образом действует группа подстановок $S_n$ по правилу:

$$(z_1, \dots, z_n)^\sigma = (z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, \dots, z_{\sigma(n)}), \quad \sigma \in S_n.$$

Фундаментальная группа $\pi_1(E_n/S_n)$ факторпространства пространства $E_n$ по действию группы $S_n$ называется *группой кос Артина* на $n$ нитях и обозначается $\mathcal{B}_n$. Заметим, что каноническая проекция $E_n \to E_n/S_n$ является регулярным накрывающим отображением. Напомним, что группа кос $\mathcal{B}_n$ имеет представление с порождающими $\sigma_1$, $\sigma_2$, … , $\sigma_{n-1}$ и определяющими соотношениями

$$\begin{gathered}\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \dots, n-2,\\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \quad \text{при} \quad |i-j| \geq 2.\end{gathered}$$

Пусть $X$ — связное топологическое пространство. *Многочленом Вейерштрасса* степени $n \geq 1$ над $X$ называется непрерывное семейство унитарных комплексных многочленов степени $n$, или полиномиальных отображений $P = P(x; z) : X \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ вида

$$P(x; z) = z^n + a_1(x)z^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x)z + a_n(x), \tag{2}$$

где $a_1, \dots, a_n : X \to \mathbb{C}$ — непрерывные функции. Многочлен $P(x; z)$ называется *сепарабельным*, если ни при каком фиксированном $x \in X$ он не имеет кратных корней. Множество сепарабельных многочленов Вейерштрасса степени $n$ обозначим через $U_n(X)$.

Для многочлена $P(x; z) \in U_n(X)$ проекция $\pi : E \to X$ множества его нулей

$$E = \{(x; z) \in X \times \mathbb{C} \quad | \quad P(x; z) = 0\}$$

является $n$–листным накрывающим отображением которое называется *полиномиальным* накрытием, а само пространство $E$ называется $n$-листным *полиномиальным* накрывающим пространством над $X$.

Обозначим через $\Delta_n(a_1,\dots,a_n)$ дискриминант многочлена Вейерштрасса $P(x;z)$ вида (2). Положим

$$G_n = \{(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{C}^n \quad | \quad \Delta_n(a_1,\dots,a_n)\neq 0\}.$$

Тогда в каждой точке $a\in G_n$ функция $z=z(a)$, определенная из условия $P(x;z)=0$, принимает ровно $n$ различных значений. Таким образом, определена проекция $p: E_n\to G_n$, задаваемая формулами Виета:

$$p_i(z) = (-1)^i\, s_i(z), \quad i=1,\dots,n,$$

где через $s_i(z)$ обозначен $i$-й элементарный симметрический многочлен. Из теоремы о неявных функциях следует, что отображение $p$ представляет собой $n!$-листное регулярное накрытие.

Поскольку каждый сепарабельный многочлен $P(x;z)\in U_n(X)$ можно отождествить с непрерывным отображением $\rho: X\to G_n$, то определен гомоморфизм $\rho_*:\pi_1(X)\to\mathcal{B}_n$.

Рассмотрим $n$-листное накрывающее отображение $\pi: E\to X$. Для любого упорядочения $n$ точек в слое $\pi^{-1}(x_0)$ над $x_0\in X$, поднятие путей индуцирует гомоморфизм $\chi(\pi):\pi_1(X)\to S_n$. Известно, что $\chi(\pi)$ определяется отображением $\pi$ с точностью до сопряжения. Класс сопряженности гомоморфизма $\chi(\pi)$ называется *характеристическим* классом $n$-листного накрывающего отображения $\pi$. Два $n$-листных накрывающих отображения $\pi: E\to X$ и $\pi': E'\to X$ эквивалентны тогда и только тогда, когда индуцированные ими гомоморфизмы $\chi(\pi):\pi_1(X)\to S_n$ и $\chi(\pi'):\pi_1(X)\to S_n$ сопряжены.

По теореме Александера (см., например, [10, гл. 2]) всякое зацепление $L$ в трехмерной сфере $S^3$ получается замыканием некоторой косы. В работе [7] для накрывающих пространств установлена следующая версия этой теоремы. Всякое $n$-листное накрывающее отображение $\pi: E\to S^1$ является полиномиальным и соответствует замыканию некоторой $n$-нитиевой косы $\beta$ вокруг оси в $S^3$ и подходящей проекцией на окружность, ортогональную оси. При этом две косы $\beta,\beta'\in\mathcal{B}_n$ представляют эквивалентные $n$-листные накрывающие отображения $\pi: E\to S^1$ и $\pi': E'\to S^1$ тогда и только тогда, когда подстановки, индуцированные косами $\beta$ и $\beta'$, сопряжены в $S_n$.

## § 2. Многочлены Вейерштрасса классических узлов и зацеплений

Рассмотрим пространство $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$. Для произвольного натурального числа $n\geq 2$ в плоскости $\mathbb{C}\times\{0\}$ выберем $n$ точек $q_1,\dots,q_n$ и, аналогично, в плоскости $\mathbb{C}\times\{2\pi\}$ выберем $n$ точек $q'_1,\dots,q'_n$, положив $q_{l+[n/2]+1}=(2l,0)$ и $q'_{l+[n/2]+1}=(2l,2\pi)$, где квадратные скобки означают взятие целой части, а

$$l\in I_n=\{-k,-k+1,\dots,-1,0,1,\dots,k\},$$

если $n=2k+1$, и

$$l\in I_n=\{-k,-k+1,\dots,-1,0,1,\dots,k-1\},$$

если $n=2k$. Набор из $n$ попарно непересекающихся кусочно гладких путей в $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$, соединяющих точки $q_1,\dots,q_n$ с точками $q'_1,\dots,q'_n$, соответственно, называется *$n$-нитиевой косой*, если для каждого $t$, $0\leq t\leq 2\pi$, плоскость $\mathbb{C}\times\{t\}$ пересекает эти $n$ путей в $n$ различных точках.

С каждым порождающим $\sigma_j^{\varepsilon}$, $\varepsilon=\pm1$, $j=1,\dots,n-1$, группы кос $\mathcal{B}_n$ свяжем $n$–нитиевую элементарную косу

$$\begin{aligned}\lambda(\sigma_j^{\varepsilon})(t) = \quad & \big((-2k,t),(-2(k-1),t),\dots,(-2(k-j+2),t),(-2(k-j)-1-e^{i\varepsilon t/2},t),\\ & (-2(k-j)-1+e^{i\varepsilon t/2},t),(-2(k-j-1),t),\dots,(2(k-\gamma),t)\big),\ 0\leq t\leq 2\pi,\end{aligned}$$

где $k=[\frac{n}{2}]$ и

$$\gamma=\begin{cases}0 & \text{при} \quad n\equiv 1 \,(\operatorname{mod} 2),\\ 1 & \text{при} \quad n\equiv 0\,(\operatorname{mod} 2).\end{cases}$$

Умножение $n$-нитиевых кос определяется следующим образом. Если $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ — две косы, то их произведением $(\lambda_1 \cdot \lambda_2)(t)$ назывется $n$-нитиевая коса, определенная равенством:

$$(\lambda_1 \cdot \lambda_2)(t) \ = \begin{cases} \lambda_1(2t) & \text{при} \quad 0 \le t \le \pi, \\ \lambda_2(2t) & \text{при} \quad \pi \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

Используя определенные выше элементарные косы $\lambda(\sigma_j^\varepsilon)$ и эту операцию умножения, мы можем для всякого слова $\beta$ в алфавите $\{\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}\}$ построить соответствующую ему $n$-нитиевую косу $\lambda(\beta)$.

Две $n$-нитиевые косы $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ называются *изотопными*, если существует непрерывное отображение

$$\Phi(t,\tau) : [0, 2\pi] \times [0,1] \to (\mathbb{C} \times \mathbb{R})^n$$

такое, что $\Phi(t,0) = \lambda_1(t)$, $\Phi(t,1) = \lambda_2(t)$ и для каждого $\tau \in [0,1]$ отображение $\Phi(t,\tau)$ определяет $n$-нитиевую косу. Класс эквивалентности изотопных $n$–нитиевых кос содержащий косу $\lambda_1(t)$ будем обозначать символом $[\lambda_1(t)]$. Определим произведение изотопических классов равенством $[\lambda_1(t)] \cdot [\lambda_2(t)] = [(\lambda_1 \cdot \lambda_2)(t)]$. В результате получим группу, изоморфную группе кос $\mathcal{B}_n$, где изоморфизм задается соответствием:

$$\sigma_j^\varepsilon \to [\lambda(\sigma_j^\varepsilon)(t)], \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Итак, произвольному слову $\beta$, представляющему некоторый элемент группы кос $\mathcal{B}_n$, можно сопоставить $n$-нитиевую косу $\lambda(\beta)(t)$, а затем, воспользовавшись формулами Виета, построить многочлен Вейерштрасса $P_\beta(t;z)$. При этом корни многочлена $P_\beta(t;z)$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с точками косы $\lambda(\beta)$. Другой подход заключается в том, чтобы построить многочлен Вейерштрасса для каждого из порождающих $\sigma_j^{\pm 1}$ и научиться по многочленам $P_{\beta_1}(t;z)$ и $P_{\beta_2}(t;z)$, отвечающим $n$-нитиевым косам $\beta_1$ и $\beta_2$, строить многочлен $P_{\beta_1\beta_2}(t;z)$, отвечающий произведению $\beta_1\beta_2$. Ниже мы реализуем этот подход: будут введены многочлены Вейерштрасса для порождпающих группы кос и определена операция композиции многочленов, соответствующая операции умножения слов в группе кос.

Напомним, что элементарные симметрические многочлены зависящие от $k$ переменных $x_1, \dots, x_k$ определяются как

$$s_j(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_j} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_j}.$$

Единичному элементу $e$ группы $\mathcal{B}_n$ сопоставим многочлен

$$P_e(t;z) = \prod_{l \in I_n} (z - 2l) = z^n + a_0^1 z^{n-1} + \dots + a_0^n.$$

Чтобы найти коэффициенты $a_0^i$ заметим, что

$$P_e(t;z) = \begin{cases} z \prod_{j=1}^{k} (z^2 - 4j^2) & \text{при} \quad n = 2k+1, \\ z(z+2k) \prod_{j=1}^{k-1} (z^2 - 4j^2) & \text{при} \quad n = 2k. \end{cases}$$

Следовательно, при $n = 2k+1$ все коэффициенты при четных степенях переменной $z$ многочлена $P_e$ равны нулю, а коэффициенты при нечетных степенях находятся по формулам

$$a_0^{2j} = (-1)^j \, s_j(2^2, 4^2, \dots, (2k)^2), \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Чтобы найти коэффициенты многочлена $P_e$ при $n = 2k$, мы можем разделить многочлен, соответствующий единичному элементу группы $\mathcal{B}_{n+1}$ на $(z - 2k)$. Обозначим символом $s_j^0$, $j = 1, \dots, k$, значение элементарного симметрического многочлена $s_j$ в точке $(2^2, \dots, (2k)^2)$ и положим $s_0^0 = 1$. Имеет место следующее утверждение.

**Лемма 1** *Многочлен Вейерштрасса, соответствующий единичному элементу группы $\mathcal{B}_n$, имеет вид*

$$P_e(t;z) = a_0^0 z^n + a_0^1 z^{n-1} + \cdots + a_0^{n-1} z,$$

*где*

$$a_0^{2j} = \begin{cases} (-1)^j \, s_j^0 & \text{при} \quad n = 2k+1, \\ \sum_{l=0}^{j} n^{2l} (-1)^{j-l} \, s_{j-l}^0 & \text{при} \quad n = 2k, \end{cases}$$

*и*

$$a_0^{2j+1} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n = 2k+1, \\ n \sum_{l=0}^{j} n^{2l} (-1)^{j-l} s_{j-l}^0 & \text{при} \quad n = 2k, \end{cases}$$

*для* $j = 0, 1, \ldots, [\frac{n-1}{2}]$.

Пример 1. При малых значениях $n$ единичному элементу группы $\mathcal{B}_n$ соответствуют следующие многочлены Вейерштрасса: если $n = 3$, то $P_e(t;z) = z^3 - 4z$; если $n = 4$, то $P_e(t;z) = z^4 + 4z^3 - 4z^2 - 16z$; а если $n = 5$, то $P_e(t;z) = z^5 - 20z^3 + 64z$.

Теперь для каждого порождающего $\sigma_j$, $j = 1, \ldots, n-1$, группы $\mathcal{B}_n$ построим многочлен Вейерштрасса $P_{\sigma_j}(t;z)$, который при каждом фиксированном $t \in [0, 2\pi]$ имеет ровно $n$ различных корней. Эти корни определяются пересечением плоскости $\mathbb{C} \times \{t\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ и $n$-нитиевой косы $\lambda(\sigma_j)$. Тогда

$$P_{\sigma_j}(t;z) = \left(z - (2(j-k) - 1 - e^{it/2})\right) \left(z - (2(j-k) - 1 + e^{it/2})\right) \prod_{l \in I_n \setminus \{j-k-1, j-k\}} (z - 2l).$$

Преобразуя правую часть этого равенства, получим

$$\begin{aligned} P_{\sigma_j}(t;z) &= P_e(t;z) + (1 - e^{it}) \prod_{l \in I_n \setminus \{j-k-1, j-k\}} (z - 2l) \\ &= P_e(t;z) + (1 - e^{it}) \, \frac{P_e(t;z)}{(z - 2(j-k-1))(z - 2(j-k))}. \end{aligned}$$

Найдем коэффициенты многочлена

$$\frac{P_e(t;z)}{(z - 2(j-k-1))(z - 2(j-k))} = c_j^0 z^{n-2} + c_j^1 z^{n-3} + \cdots + c_j^{n-2}.$$

Введем обозначения: $p_j = 2(2k - 2j + 1)$, $q_j = 4(k - j + 1)(k - j)$. Тогда коэффициенты $c_j^1, c_j^2, \ldots, c_j^{n-2}$ определяются из следующего равенства многочленов

$$P_e(t;z) = (z^2 + p_j z + q_j) \, (c_j^0 z^{n-2} + c_j^1 z^{n-3} + \cdots + c_j^{n-2}).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $z$, получим следующие рекуррентные соотношения:

$$c_j^0 = 1, \quad c_j^1 = a_0^1 - p_j c_j^0, \quad c_j^l = a_0^l - p_j c_j^{l-1} - q_j c_j^{l-2}, \quad l = 2, \ldots, n-2, \tag{3}$$

где $a_0^l$ — введенные выше коэффициенты многочлена $P_e(t;z)$ и $c_j^l = 0$ при $l > n-2$. Таким образом, установлена

**Лемма 2** *Порождающим $\sigma_j$, $j=1,\dots,n-1$, группы кос $\mathcal{B}_n$ соответствуют следующие многочлены Вейерштрасса:*

$$P_{\sigma_j}(t;z) = z^n + a_0^1 z^{n-1} + (a_0^2 + c_j^0 - c_j^0 e^{it})z^{n-2} + \dots + (a_0^{n-1} + c_j^{n-3} - c_j^{n-3}e^{it})z + a_0^n + c_j^{n-2} - c_j^{n-2}e^{it},$$

*где коэффициенты $c_j^i$ определяются равенствами (3), а*

$$p_j = \begin{cases} 2(n-2j) & \text{при} \quad n \equiv 1 \pmod 2, \\ 2(n-2j+1) & \text{при} \quad n \equiv 0 \pmod 2, \end{cases}$$

*и*

$$q_j = \begin{cases} (n-2j-1)(n-2j+1) & \text{при} \quad n \equiv 1 \pmod 2, \\ (n-2j)(n-2j+2) & \text{при} \quad n \equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

Пример 2. При малых значениях $n$ порождающим группы $\mathcal{B}_n$ соответствуют следующие многочлены Вейерштрасса: если $n=3$, то

$$P_{\sigma_1}(t;z) = z^3 - (3+e^{it})z - 2(1-e^{it}),$$
$$P_{\sigma_2}(t;z) = z^3 - (3+e^{it})z + 2(1-e^{it});$$

если $n=4$, то

$$P_{\sigma_1}(t;z) = z^4 + 4z^3 - (3+e^{it})z^2 + 2(-9+e^{it})z,$$
$$P_{\sigma_2}(t;z) = z^4 + 4z^3 - (3+e^{it})z^2 - 2(7+e^{it})z - 8(1-e^{it}),$$
$$P_{\sigma_3}(t;z) = z^4 + 4z^3 - (3+e^{it})z^2 - 2(5+3e^{it})z + 8(1-e^{it});$$

а если $n=5$, то

$$P_{\sigma_1}(t;z) = z^5 - (19+e^{it})z^3 - 6(1-e^{it})z^2 + 8(9-e^{it})z,$$
$$P_{\sigma_2}(t;z) = z^5 - (19+e^{it})z^3 - 2(1-e^{it})z^2 + 16(3+e^{it})z + 32(1-e^{it}),$$
$$P_{\sigma_3}(t;z) = z^5 - (19+e^{it})z^3 + 2(1-e^{it})z^2 + 16(3+e^{it})z - 32(1-e^{it}),$$
$$P_{\sigma_4}(t;z) = z^5 - (19+e^{it})z^3 + 6(1-e^{it})z^2 - 8(9-e^{it})z.$$

Из определения $n$-нитиевой косы $\lambda(\sigma_j^{-1})$ и построения многочлена $P_{\sigma_j}$ следует

**Лемма 3** *Элементам $\sigma_j^{-1}$, $j=1,\dots,n-1$, обратным к порождающим группы $\mathcal{B}_n$, соответствуют следующие многочлены Вейерштрасса:*

$$P_{\sigma_j^{-1}}(t;z) = P_{\sigma_j}(-t;z).$$

Пусть $\beta = \sigma_{j_1}^{\varepsilon_1}\sigma_{j_2}^{\varepsilon_2}\dots\sigma_{j_s}^{\varepsilon_s}$, где $j_i \in \{1,2,\dots,n-1\}$ и $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, — некоторое слово в алфавите $\{\sigma_1^{\pm 1},\dots,\sigma_{n-1}^{\pm 1}\}$. Сопоставим слову $\beta$ следующую *композицию* многочленов Вейерштрасса элементарных кос:

$$P_\beta(t;z) = P_{\sigma_{j_1}^{\varepsilon_1}} \vee P_{\sigma_{j_2}^{\varepsilon_2}} \vee \dots \vee P_{\sigma_{j_s}^{\varepsilon_s}} = z^n + a_\beta^1 z^{n-1} + \dots + a_\beta^n, \tag{4}$$

где коэффициенты $a_\beta^\ell$ определяются по коэффициентам многочленов

$$P_{\sigma_{j_i}^{\varepsilon_i}} = z^n + a^1_{\sigma_{j_i}^{\varepsilon_i}} z^{n-1} + \dots + a^n_{\sigma_{j_i}^{\varepsilon_i}}$$

следующим образом:

$$a^\ell_\beta = \begin{cases} a^\ell_{\sigma^{\varepsilon_1}_{j_1}} & \text{при} \quad 0 \le t \le \dfrac{2\pi}{s}, \\ a^\ell_{\sigma^{\varepsilon_2}_{j_2}} & \text{при} \quad \dfrac{2\pi}{s} \le t \le \dfrac{3\pi}{s}, \\ \quad \dots & \\ a^\ell_{\sigma^{\varepsilon_s}_{j_s}} & \text{при} \quad \dfrac{2(s-1)\pi}{s} \le t \le 2\pi, \end{cases} \tag{5}$$

где $\ell = 1, 2, \dots, n$.

Обозначим через $P(\mathcal{B}_n)$ множество многочленов Вейерштрасса, соответствующих всем словам, представляющим элементы группы $\mathcal{B}_n$. Отметим некоторые свойства этого семейства.

**Предложение 1** *Для любых $P_{\beta_1}(t;z)$ и $P_{\beta_2}(t;z)$ из $P(\mathcal{B}_n)$ их коэффициенты при $z^{n-1}$ совпадают.*

Доказательство. Если длина слов $\beta_1$ и $\beta_2$ не превосходит 1, утверждение следует из лемм 1 – 3. Общий случай вытекает из определения композиции многочленов Вейерштрасса (см. [4, 5]). □

**Предложение 2** *Коэффициенты многочлена $P_\beta(t;z) \in P(\mathcal{B}_n)$ являются непрерывными комплекснозначными функциями определенными на окружности.*

Доказательство. Следует из того, что каждый коэффициент зависит от $x = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, т. е. $x \in S^1$. □

**Предложение 3** *Пусть $n \ge 3$. Коэффициенты $a^3_{\sigma_1}, a^3_{\sigma_2}, \dots, a^3_{\sigma_{n-1}}$ при степенях $z^{n-3}$ многочленов $P_{\sigma_1}, \dots, P_{\sigma_{n-1}} \in P(\mathcal{B}_n)$ соответственно попарно различны.*

Доказательство. В силу леммы 2 имеем равенство

$$a^3_{\sigma_j} = a^3_j = a^3_0 + c^1_j - c^1_j e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Предположим, что $a^3_j = a^3_i$. Тогда $c^1_j = c^1_i$. Из определения $c^1_j$ следует, что $i = j$. □

Любой коэффициент многочлена из $P(\mathcal{B}_n)$ можно рассматривать как замкнутый путь в плоскости $\mathbb{C}$ заданный отображением окружности $S^1$ в $\mathbb{C}$. В силу предложения 3, каждый коэффициент $a^3_\beta$, где $\beta$ — слово в алфавите $\{\sigma^\pm_1, \dots, \sigma^\pm_{n-1}\}$, определяет замкнутый путь на букете из $n-1$ окружностей, имеющих общую точку $a^3_0$. Введем отношение эквивалентности «$\sim$» на коэффициентах $a^3_\beta$. Будем считать что $a^3_{\beta_1} \sim a^3_{\beta_2}$ тогда и только тогда, когда существует гомотопия $h(t,\tau)$, $t \in [0, 2\pi]$, $\tau \in [0,1]$, такая, что $h(t,0) = a^3_{\beta_1}$, $h(t,1) = a^3_{\beta_2}$, и $h(t,\tau)$ определяет замкнутый путь на букете из $n-1$ окружностей при фиксированном $\tau \in [0,1]$. Так как фундаментальная группа букета из $n-1$ окружностей изоморфна свободной группе $F_{n-1}$ ранга $n-1$, то классы гомотопных коэффициентов $[a^3_\beta]$ образуют группу, изоморфную $F_{n-1}$. Отсюда, в частности, следует

**Предложение 4** *Каждый многочлен Вейерштрасса $P_\beta$ из $P(\mathcal{B}_n)$ однозначно восстанавливается по коэффициенту $a^3_\beta$.*

Введенное выше отношение эквивалентности на коэффициентах $a^3_\beta$ легко распространить на коэффициенты при любой другой степени $z$. Положим $P_{\beta_1} \sim P_{\beta_2}$ тогда и только тогда, когда $a^3_{\beta_1} \sim a^3_{\beta_2}$. Это отношение эквивалентности разбивает все множество $P(\mathcal{B}_n)$ на классы. Вводя естественным образом операцию композиции «$\vee$» на классах по правилу

$$[P_{\beta_1}] \vee [P_{\beta_2}] = [P_{\beta_1} \vee P_{\beta_2}],$$

получим

**Предложение 5** *Множество классов эквивалентности $P(\mathcal{B}_n)/_\sim$ с операцией «$\vee$» образует группу, изоморфную свободной группе $F_{n-1}$.*

До сих пор мы рассматривали $n$-нитиевую косу $\beta$ не как элемент группы кос $\mathcal{B}_n$, а как некоторое слово в алфавите $\{\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}\}$. Напомним, что слова $\beta_1$ и $\beta_2$ определяют один и тот же элемент группы кос $\mathcal{B}_n$ тогда и только тогда, когда соответствующие этим словам $n$-нитиевые косы изотопны. Если рассматривать полином Вейерштрасса $P(t;z) = z^n + a^1(t)z^{n-1} + \dots + a^n(t)$ как отображение $P : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^n$ определяемое равенством $P(t) = (a^1(t), \dots, a^n(t))$, то изотопическая эквивалентность кос индуцирует гомотопическую эквивалентность многочленов Вейерштрасса. Действительно, если косы $\lambda(\beta_1)$ и $\lambda(\beta_2)$ изотопны, то существует гомотопия $\Phi(t,\tau) : [0, 2\pi] \times [0,1] \to (\mathbb{C} \times \mathbb{R})^n$ такая, что $\Phi(t, 0) = \lambda(\beta_1)$, $\Phi(t, 1) = \lambda(\beta_2)$ и для каждого фиксированного $\tau$ отображение $\Phi(t,\tau) = ((\varphi_1(t,\tau), t), \dots, (\varphi_n(t,\tau), t))$ определяет $n$-нитиевую косу. Рассмотрим отображение $F(t,\tau) : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{C}^n$ определенное формулами Виета:

$$F_k(t,\tau) \quad = \quad (-1)^k \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \varphi_{i_1}(t,\tau)\varphi_{i_2}(t,\tau)\cdots\varphi_{i_k}(t,\tau).$$

Легко убедиться, что $F(t, 0) = P_{\beta_1}$, $F(t, 1) = P_{\beta_2}$ и при каждом $\tau \in [0, 1]$ отображение $F(t,\tau)$ определяет сепарабельный многочлен Вейерштрасса (который, вообще говоря, не принадлежит семейству $P(\mathcal{B}_n)$). На множестве многочленов из $P(\mathcal{B}_n)$ определим отношение эквивалентности «$\approx$» полагая $P_{\beta_1}(t,z) \approx P_{\beta_2}(t,z)$ если и только если отображения $P_{\beta_1}$ и $P_{\beta_2}$ гомотопны. На классах эквивалентности естественно определена операция композиции «$\vee$». Таким образом, имеет место

**Предложение 6** *Множество классов эквивалентности $P(\mathcal{B}_n)/_\approx$ с операцией «$\vee$» образуют группу, изоморфную группе кос $\mathcal{B}_n$.*

Обозначая $x = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, можем считать каждый коэффициент многочлена Вейерштрасса из множества $P(\mathcal{B}_n)$ непрерывной комплекснозначной функцией, определенной на окружности. Как отмечалось в § 1, с каждым многочленом $P(x,z) \in P(\mathcal{B}_n)$ можно связать накрывающее пространство

$$E = \{(x,z) \quad | \quad P(x,z) = 0\}$$

проекция которого на первую компоненту определяет $n$-листное накрытие окружности. При этом многочлены $P_{\beta_1}$ и $P_{\beta_2}$ будут определять эквивалентные накрытия, если при каноническом отображении $\nu : \mathcal{B}_n \to S_n$ образы $\nu(\beta_1)$ и $\nu(\beta_2)$ сопряжены в группе подстановок $S_n$.

Опишем алгоритм, позволяющий перечислить все (с точностью до эквивалентности) $n$-листные накрытия окружности. В группе $S_n$ в каждом классе сопряженных элементов выберем по одному представителю. Сделать это можно следующим образом. Будем записывать подстановки из $S_n$ в виде произведения независимых циклов так, что циклы расположены в порядке невозрастания длин. Две подстановки в $S_n$ сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковое цикловое строение [11, с. 34]. Поэтому, в качестве представителей возьмем все подстановки имеющие различное цикловое строение и такие, что первый цикл подстановки имеет вид $(1, 2, \dots, \gamma)$, где $\gamma$ — его длина, второй цикл имеет вид $(\gamma + 1, \gamma + 2, \dots, \gamma + \delta)$, где $\delta$ — его длина, и т. д. Обозначим множество построенных таким образом представителей классов сопряженных элементов группы $S_n$ через $M_n$. По этому множеству построим множество элементов $\widetilde{M_n} \subset \mathcal{B}_n$ такое, что $\nu(\widetilde{M_n}) = M_n$ и $|M_n| = |\widetilde{M_n}|$. Предположим, что подстановка $m \in M_n$ состоит из одного нетривиального цикла $(1, 2, \dots, \gamma)$. Представим его в виде произведения транспозиций:

$$(1, 2, \dots, \gamma) = (\gamma, \gamma - 1)(\gamma - 1, \gamma - 2)\cdots(3, 2)(2, 1).$$

Тогда подстановке $m \in M_n$ сопоставим слово $\widetilde{m} \in \widetilde{M_n} \subset \mathcal{B}_n$ вида

$$\widetilde{m} = \sigma_{\gamma-1}\sigma_{\gamma-2}\cdots\sigma_2\sigma_1.$$

Пусть $m = m_1 m_2 \cdots m_\ell \in M_n$ является произведением $\ell$ нетривиальных независимых циклов. Выбрав по указанному выше правилу для каждого цикла $m_i$ прообраз $\widetilde{m_i} \in \mathcal{B}_n$, сопоставим подстановке $m$ слово $\widetilde{m} = \widetilde{m_1}\widetilde{m_2} \cdots \widetilde{m_\ell}$. В этих обозначениях справедливо

**Предложение 7** *Каждое $n$-листное накрытие окружности $S^1$ эквивалентно одному из накрытий, определенному многочленом $P_\beta(x,z)$, где $\beta \in \widetilde{M_n}$.*

Пример 3. Если $n = 3$, то в качестве представителей классов сопряженных элементов группы $S_3$ можно взять множество подстановок $M_3 = \{1, (1,2), (1,2,3)\}$. Тогда $\widetilde{M_3} = \{e, \sigma_1, \sigma_2\sigma_1\}$ и соответствующие многочлены Вейерштрасса имеют вид

$$P_e(x,z) = z^3 - 4z; \qquad P_{\sigma_1}(x,z) = z^3 - (3+x)z + 2(x-1); \qquad P_{\sigma_2\sigma_1}(x,z) = z^3 - (3+x)z + a^3_{\sigma_2\sigma_1},$$

где $x = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, и

$$a^3_{\sigma_2\sigma_1} = \begin{cases} 2(1 - e^{2it}) & \text{при} \quad 0 \le t \le \pi, \\ 2(e^{2it} - 1) & \text{при} \quad \pi \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

Если $n = 4$, то в качестве представителей классов сопряженных элементов группы $S_4$ можно выбрать множество $M_4 = \{1, (1,2), (1,2,3), (1,2,3,4), (1,2)(3,4)\}$. Тогда $\widetilde{M_4} = \{e, \sigma_1, \sigma_2\sigma_1, \sigma_3\sigma_2\sigma_1, \sigma_1\sigma_3\}$.

## § 3. Многочлены Вейерштрасса сингулярных узлов и зацеплений

В работе Дж. Бирман [8] был определен сингулярный моноид $\mathcal{S}B_n$, заданный порождающими $\sigma_1^{\pm1}, \ldots, \sigma_{n-1}^{\pm1}, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ и определяющими соотношениями

$$\sigma_i\tau_i = \tau_i\sigma_i;$$
$$\sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j, \quad \sigma_i\sigma_j\tau_i = \tau_j\sigma_i\sigma_j \quad \text{при} \quad |i-j| = 1;$$
$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \quad \sigma_i\tau_j = \tau_j\sigma_i, \quad \tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i \quad \text{при} \quad |i-j| \ge 2.$$

При этом элементы $\sigma_1^{\pm1}, \ldots, \sigma_{n-1}^{\pm1}$ порождают группу кос $\mathcal{B}_n$. С каждым порождающим $\sigma_i^{\pm1}$ можно связать $n$-нитиевую косу, а с $\tau_i$ — сингулярную $n$-нитиевую косу в соответствии с рис. 1.

$\cdots \quad \cdots \qquad \cdots \quad \cdots \qquad \cdots \quad \cdots$

$1 \quad i{-}1 \;\; i \quad i{+}1 \;\; i{+}2 \quad n \qquad 1 \quad i{-}1 \;\; i \quad i{+}1 \;\; i{+}2 \quad n \qquad 1 \quad i{-}1 \;\; i \quad i{+}1 \;\; i{+}2 \quad n$

$\sigma_i \qquad\qquad \sigma_i^{-1} \qquad\qquad \tau_i$

*Рис. 1.*

Операция умножения сингулярных кос вводится по аналогии с операцией умножения для обычных кос. Тогда классы изотопно эквивалентных сингулярных $n$-нитиевых кос образуют моноид, изоморфный $\mathcal{S}B_n$.

Напомним, что *узлом* $K$ называется образ окружности $S^1$ при ее гладком вложении в трехмерную сферу $S^3$. *Сингулярным узлом* $K$ называется образ $S^1$ при гладком отображении $\varphi : S^1 \to S^3$. Образ объединения нескольких попарно непересекающихся окружностей при гладком отображении в $S^3$ называется *сингулярным зацеплением.* Далее будем рассматривать лишь такие сингулярные зацепления, сингулярное множество которых состоит из конечного числа двойных точек. Для таких сингулярных зацеплений справедлив аналог теоремы Александера, а именно, всякое сингулярное зацепление может быть получено замыканием некоторой сингулярной косы (см. [8]).

Каждому порождающему $\tau_i$, $i = 1, \dots, n-1$, сингулярного моноида $\mathcal{S}B_n$ сопоставим многочлен Вейерштрасса $P_{\tau_i}(t,z)$, $0 \le t \le 2\pi$, который в отличии от построенных ранее многочленов $P_{\sigma_i}(t,z)$ уже не будет сепарабельным, а именно, при $t = \pi$ один из его корней будет иметь кратность 2. Сопоставим элементу $\tau_j$, $j = 1, \dots, n-1$, сингулярную косу

$$\begin{aligned}\mu(\tau_j)(t) &= \Big((-2k,t), (-2(k-1),t), \dots, (-2(k-j+2),t), (-2(k-j)-1-e^{it/2},t),\\ &\quad (-2(k-j)-1+e^{-it/2},t), (-2(k-j-1),t), \dots, (2(k-\gamma),t)\Big),\end{aligned}$$

где $k = [\frac{n}{2}]$, $0 \le t \le 2\pi$ и

$$\gamma = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \equiv 1 \pmod 2, \\ 1 & \text{при} \quad n \equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

По этой косе построим многочлен Вейерштрасса корнями которого являются точки косы:

$$P_{\tau_j}(t,z) = \Big(z - (2(j-k)-1-e^{it/2})\Big)\Big(z - (2(j-k)-1+e^{-it/2})\Big)\prod_{l \in I_n \setminus \{j-k-1, j-k\}} (z - 2l).$$

Представим этот многочлен в следующем виде:

$$\begin{aligned}P_{\tau_j}(t,z) &= P_e(t,z) + (z - 2(j-k)+1)(e^{it/2} - e^{-it/2})\prod_{l \in I_n \setminus \{j-k-1, j-k\}} (z-2l)\\ &= P_e(t,z) + (z - 2(j-k)+1)(e^{it/2} - e^{-it/2})\frac{P_e(t,z)}{(z-2(j-k-1))(z-2(j-k))}.\end{aligned}$$

Напомним, что ранее были введены многочлены

$$P_e(t,z) = z^n + a_0^1 z^{n-1} + \dots + a_0^{n-1} z$$

и

$$\frac{P_e(t,z)}{(z-2(j-k-1))(z-2(j-k))} = c_j^0 z^{n-2} + c_j^1 z^{n-3} + \dots + c_j^{n-3} z + c_j^{n-2}.$$

Обозначая $\alpha_j = 2(j-k)-1$, получим

$$\frac{(z-\alpha_j)P_e(t,z)}{(z-2(j-k-1))(z-2(j-k))} = c_j^0 z^{n-1} + (c_j^1 - \alpha_j c_j^0) z^{n-2} + \dots + (c_j^{n-2} - \alpha_j c_j^{n-3}) z - \alpha_j c_j^{n-2}.$$

Отсюда вытекает следующее выражение для искомого многочлена

$$\begin{aligned}P_{\tau_j}(t,z) &= z^n + [a_0^1 + c_j^0(e^{it/2} - e^{-it/2})] z^{n-1} + [a_0^2 + (c_j^1 - \alpha_j c_j^0)(e^{it/2} - e^{-it/2})] z^{n-2}\\ &\quad + \dots + [a_0^{n-1} + (c_j^{n-2} - \alpha_j c_j^{n-3})(e^{it/2} - e^{-it/2})] z - \alpha_j c_j^{n-2}(e^{it/2} - e^{-it/2}).\end{aligned}$$

Воспользовавшись тем, что $e^{it/2} - e^{-it/2} = 2\,i \sin(t/2)$, получим следующий аналог леммы 2.

**Лемма 4** *Порождающим $\tau_j$, $j = 1, \dots, n-1$, моноида $\mathcal{S}B_n$ соответствуют следующие многочлены Вейерштрасса:*

$$P_{\tau_j}(t,z) = z^n + \sum_{l=1}^{n-1}\left[a_0^l + 2\,i(c_j^{l-1} - \alpha_j c_j^{l-2})\sin(t/2)\right] z^{n-l} - 2\,i\,\alpha_j c_j^{n-2}\sin(t/2),$$

*где $\alpha_j = 2(j-k)-1$, $k = [\frac{n}{2}]$, $c_j^{-1} = 0$, а остальные коэффициенты $c_j^l$ определены в (3).*

Пример 4. При малых значениях $n$ порождающим $\tau_i$ моноида $\mathcal{S}B_n$ соответствуют следующие многочлены Вейерштрасса: если $n = 3$, то

$$\begin{aligned}
P_{\tau_1}(t,z) &= z^3 + 2\,i\sin(t/2)\;z^2 + 2(-2 - \,i\sin(t/2))\;z - 4\,i\sin(t/2),\\
P_{\tau_2}(t,z) &= z^3 + 2\,i\sin(t/2)\;z^2 + 2(-2 + \,i\sin(t/2))\;z - 4\,i\sin(t/2);
\end{aligned}$$

если $n = 4$, то

$$\begin{aligned}
P_{\tau_1}(t,z) &= z^4 + 2(-2 + \,i\sin(t/2))\;z^3 + 2(-2 - 3\,i\sin(t/2))\;z^2 + 4(4 - 5\,i\sin(t/2))\;z + 48\,i\sin(t/2),\\
P_{\tau_2}(t,z) &= z^4 + 2(-2 + \,i\sin(t/2))\;z^3 + 2(-2 - \,i\sin(t/2))\;z^2 + 4(4 - 5\,i\sin(t/2))\;z - 16\,i\sin(t/2),\\
P_{\tau_3}(t,z) &= z^4 + 2(-2 + \,i\sin(t/2))\;z^3 + 2(-2 + \,i\sin(t/2))\;z^2 + 4(4 - \,i\sin(t/2))\;z.
\end{aligned}$$

Если $\beta_1$ и $\beta_2$ — слова, представляющие некоторые элементы моноида $\mathcal{S}B_n$, а $P_{\beta_1}(t,z)$ и $P_{\beta_2}(t,z)$ — соответствующие им многочлены Вейерштрасса, то слову $\beta_1\beta_2$ сопоставим многочлен Вейерштрасса, являющийся следующей *композицией* многочленов:

$$P_{\beta_1\beta_2}(t,z) = P_{\beta_1}(t,z) \vee P_{\beta_2}(t,z) = z^n + a^1_{\beta_1\beta_2}(t)z^{n-1} + \cdots + a^{n-1}_{\beta_1\beta_2}(t)z + a^n_{\beta_1\beta_2}(t),$$

где для $j = 1, 2, \ldots, n$ полагаем

$$a^j_{\beta_1\beta_2}(t,z) = \begin{cases} a^j_{\beta_1}(2t) & \text{при} \quad 0 \le t \le \pi, \\ a^j_{\beta_2}(2t) & \text{при} \quad \pi \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

Пусть $T_n$ — подмоноид моноида $\mathcal{S}B_n$, порожденный набором элементов $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}$. Через $P(T_n)$ и $P(\mathcal{S}B_n)$ обозначим множества многочленов Вейерштрасса построенные по словам, представляющим элементы из $T_n$ и $\mathcal{S}B_n$ соответственно при помощи определенной выше операции композиции «$\vee$». Отметим некоторые свойства построенных многочленов.

**Предложение 8** *Для любых многочленов $P_{\beta_1}(t,z)$ и $P_{\beta_2}(t,z)$ из множества $P(T_n)$ их коэффициенты при $z^{n-1}$ равны.*

**Предложение 9** *Для каждого многочлена многочлена $P_\beta(t,z) \in P(\mathcal{S}B_n)$ его коэффициенты являются непрерывными комплекснозначными функциями, определенными на окружности $S^1$.*

Из примера 4 видно, что аналог предложения 3 для многочленов из $P(T_n)$ неверен. Тем не менее, справедливо

**Предложение 10** *Коэффициенты $a^2_{\tau_1}, a^2_{\tau_2}, \ldots, a^2_{\tau_{n-1}}$ многочленов $P_{\tau_1}, \ldots, P_{\tau_{n-1}} \in P(T_n)$ попарно различны.*

Доказательство. По лемме 4 для $j = 1, 2, \ldots, n-1$ имеем

$$a^2_{\tau_j} = a^2_0 + 2\,i\,(c^1_j - \alpha_j c^0_j)\,\sin(t/2),$$

где $\alpha_j = 2(j-k) - 1$, $c^0_j = 1$, $c^1_j = a^1_0 - p_j$, $p_j = 2(2k - 2j + 1)$, а $k = [\frac{n}{2}]$. Подставляя эти значения, получим

$$a^2_{\tau_j} = a^2_0 + 2\,i\,(a^1_0 - 2(k-j) - 1)\,\sin(t/2).$$

Отсюда очевидно, что если $a^2_{\tau_\ell} = a^2_{\tau_m}$ некоторых $\ell, m \in \{1, \ldots, n-1\}$, то $\ell = m$. $\square$

Из этого факта получаем

**Предложение 11** *Каждый многочлен Вейерштрасса из $P(T_n)$ однозначно восстанавливается по коэффициенту при $z^{n-2}$.*

Обозначая $x = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, можем считать, что каждый коэффициент многочлена из $P(\mathcal{S}B_n)$ определяет отображение окружности $S^1$ в $\mathbb{C}$. С каждым многочленом $P(t,z) \in P(\mathcal{S}B_n)$ свяжем накрывающее пространство

$$\widetilde{E} = \{(t,z) \in [0,2\pi] \times \mathbb{C} \quad | \quad P(t,z) = 0\}$$

окружности $S^1$. При этом накрывающее отображение $\varphi : \widetilde{E} \to S^1$ определяется равенством $\varphi(t,z) = e^{it}$. Справедливо следующее

**Предложение 12** *Каждый многочлен из $P(\mathcal{S}B_n)$ определяет $n$-листное разветвленное накрытие окружности $S^1$, множество точек ветвления которого конечно и порядок ветвления каждой сингулярной точки равен двум.*

## Список литературы


[1] Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 1, М.: Наука, 1967.

[2] Countryman R. S. (Jr.) On the characterization of compact Hausdorff $X$ for which $C(X)$ is algebraically closed // Pacific J. Math. 1967. V. 20. No. 3. P. 433-448.

[3] Горин Е. А., Лин В. Я. Алгебраические уравнения с непрерывными коэффициентами и некоторые вопросы алгебраической теории кос // Матем. сб. 1969. Т. 78. № 4. С. 579-610.

[4] Зюзин Ю. В., Лин В. Я. Неразветвленные алгебраические расширения коммутативных банаховых алгебр. Матем. сб. 1973. Т. 91. № 3. С. 402-420.

[5] Лин В. Я. Косы Артина и связанные с ними группы и пространства // Алгебра. Топология. Геометрия. Т.17, Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР, М. 1979. С. 159-227.

[6] Hansen V. L. Polynomial covering spaces and homeomorphisms into the braid groups // Pacific J. Math. 1979. V. 2. P. 399-410.

[7] Hansen V. L. Weierstrass polynomials for links // Contributions to Algebra and Geometry. 1998. V. 39. P. 359-365.

[8] Birman J. S. New points of view in knot theory // Bull. Amer. Math. Soc. 1993. V. 28. No. 2. P. 253-287.

[9] Васильев В. А. Топология дополнений к дискриминантам. М.: Фазис, 1997.

[10] Birman J. S. Braids, links and mapping class groups. Princeton University Press, Princeton, 1974.

[11] Каргаполов М. И. Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. 4-ое изд. М.: Наука, 1996.



Институт математики СО РАН