УДК 512.54

ОБ АВТОМОРФНОМ ВХОЖДЕНИИ В ПОДГРУППЫ СВОБОДНОЙ ГРУППЫ

В. Г. Бардаков

В ноябре 1997 г. на Мальцевских чтениях В. Н. Безверхний сформулировал следующий

Вопрос. Пусть $G = A_n$ — свободная абелева группа конечного ранга n, $n \in \mathbb{N}$, или $G = F_n$ — свободная группа конечного ранга $n > 1$, H — ее собственная подгруппа, а $w \in G \setminus H$. Существует ли автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}\ G$ такой, что $\varphi(w) \in H$?

В предлагаемой работе для $G = A_n$ дается критерий, позволяющий по элементу $w \in G$ решить вопрос о существовании такого автоморфизма φ из $\mathrm{Aut}\ G$, что $\varphi(w) \in H$. Для группы $G = F_n$ также получены некоторые частные результаты.

Прежде чем сформулировать основной результат, введем необходимые обозначения и напомним некоторые известные факты.

Хорошо известно (см., например, [1, § 86]), что если R — коммутативное евклидово кольцо с единицей, M — свободный левый R–модуль ранга n, $n \in \mathbb{N}$, а H — его нетривиальный подмодуль, то H является свободным R–модулем ранга k, $1 \leq k \leq n$, и существует такой базис $u_1, u_2, \ldots, u_n$ в M и такой базис $v_1, v_2, \ldots, v_k$ в H, что

$$v_i = m_i u_i, \quad m_{i+1} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ m_i),$$

для некоторых элементов m_i из R. Такие базисы будем называть *согласованными*. Обозначим $m(H) = m_1$. Заметим, что значение $m(H)$ определяется с точностью до умножения на обратимый элемент из R и, в этом смысле, является инвариантом подмодуля H.

Основным результатом настоящей работы является

Теорема. *Пусть R — коммутативное евклидово кольцо с единицей, M — свободный левый R–модуль ранга n, $n \in \mathbb{N}$, H — его нетривиальный подмодуль, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ и $v_1, v_2, \ldots, v_k$ — согласованные базисы в M и H соответственно. Для элемента $w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n \in M$, $\lambda_i \in R$, найдется такой автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}\ M$, что $\varphi(w) \in H$ тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель* НОД$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ *делится на $m(H)$.*

Так как свободная абелева группа A_n ранга n является свободным левым модулем над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, то из этой теоремы получается требуемый критерий.

Следствие 1. *Пусть A_n — свободная абелева группа ранга n, $n \in \mathbb{N}$, H — ее собственная подгруппа, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ и $v_1, v_2, \ldots, v_k$ — согласованные базисы в A_n*

и H соответственно. Для элемента $w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n \in A_n$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, найдется такой автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}\ A_n$, что $\varphi(w) \in H$ тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель НОД$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ *делится на $m(H)$.*

Доказательство теоремы. Прежде всего заметим, что элемент $w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n$, $\lambda_i \in R$, принадлежит подмодулю H тогда и только тогда, когда $m_1|\lambda_1$, $m_2|\lambda_2$,..., $m_k|\lambda_k$, $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \ldots = \lambda_n = 0$. В частности, $m(H) = m_1$ делит НОД$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\ M$ модуля M изоморфна группе невырожденных матриц $\mathrm{GL}_n(R)$, которая порождается трансвекциями $t_{ij}(\mu)$, $\mu \in R$, $1 \le i, j \le n$, $i \neq j$, и диагональными матрицами $d_i = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1, \varepsilon, 1, \ldots, 1)$, $1 \le i \le n$, где ε стоит на i–м месте и является обратимым элементом кольца R. В дальнейшем будем называть такие матрицы *элементарными.* Легко заметить, что если $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R^n$, то умножение α справа на элементарную матрицу индуцирует элементарное преобразование вектора α. Действительно,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) d_i = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \varepsilon\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n),$$

т. е. i–я компонента вектора α умножается на ε;

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) t_{ij}(\mu) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_j + \mu\alpha_i, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n),$$

т. е. i–я компонента вектора α умножается на μ и прибавляется к j–й компоненте. Сопоставим элементу w вектор $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Очевидно, что автоморфизм φ, переводящий w в подмодуль H существует тогда и только тогда, когда существует такая последовательность векторов из R^n:

$$\lambda = \lambda^0, \lambda^1, \ldots, \lambda^s,$$

что λ^{i+1} получается из λ^i элементарным преобразованием, а последний вектор λ^s соответствует элементу, лежащему в H.

Если пара векторов λ^i и λ^{i+1} связана элементарным преобразованием, то наибольший общий делитель компонент вектора λ^i совпадает с точностью до умножения на обратимый элемент из R с наибольшим общим делителем компонент вектора λ^{i+1}. Следовательно, наибольший общий делитель компонент вектора λ совпадает с точностью до умножения на обратимый элемент кольца R с наибольшим общим делителем компонент вектора λA для всякой матрицы A из $\mathrm{GL}_n(R)$. А потому, если для элемента $w \in M$ найдется такой автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}\ M$, что $\varphi(w) \in H$, то НОД$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ делится на $m(H)$.

Обратно. Предположим, что элементу w из M соответствует такой вектор $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in R^n$, что наибольший общий делитель его компонент делится на $m(H)$. Тогда его можно представить в виде

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = m(H) \cdot q \cdot (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n), \quad q, \mu_i \in R, \quad \text{НОД}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) = 1.$$

Используя алгоритм Евклида и тот факт, что для любых элементов a и b из R найдутся элементы x и y из R такие, что

$$ax + by = \text{НОД}(a, b),$$

легко указать последовательность элементарных преобразований, переводящих вектор λ в вектор $(m(H) \cdot q, 0, 0, \ldots, 0) \in R^n$, который, очевидно, соответствует элементу, лежащему в H. Следовательно, найдется такой автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}\ M$, что $\varphi(w) \in H$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь свободную группу F_n ранга $n > 1$. Так как свободная абелева группа A_n является ее гомоморфным образом и этот гомоморфизм индуцирует гомоморфизм $\mathrm{Aut}\ F_n$ на $\mathrm{Aut}\ A_n \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, то из следствия 1 получаем

Следствие 2. *Пусть $\pi : F_n \longrightarrow F_n/F_n' \cong A_n$ — канонический гомоморфизм, H — собственная подгруппа группы F_n, $w \in F_n$. Если для элемента w найдется такой автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}\ F_n$, что $\varphi(w) \in H$, то для элемента $\pi(w) \in A_n$ найдется автоморфизм $\psi \in \mathrm{Aut}\ A_n$ такой, что $\psi(\pi(w)) \in \pi(H)$.*

Для подмножества $T \subseteq F_n$ символом AT будем обозначать орбиту множества T при действии группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\ F_n$, т. е.

$$AT = \{\psi(t) \mid t \in T, \psi \in \mathrm{Aut}\ F_n\}.$$

Справедливо

Предложение 1. *Пусть H — подгруппа свободной группы F_n и $w \in F_n$. Тогда равносильны следующие утверждения*:

1) *найдется автоморфизм $\varphi \in Aut\ F_n$ такой, что $\varphi(w) \in H$,*

2) *элемент w лежит в орбите AH подгруппы H,*

3) *пересечение подгруппы H с орбитой Aw элемента w непусто.*

Непосредственно из этого предложения вытекает

Следствие 1. *Если H — автоморфно допустимая подгруппа группы F_n и $w \in F_n \setminus H$, то ни для какого автоморфизма $\varphi \in Aut\ F_n$ элемент $\varphi(w)$ не лежит в H.*

С другой стороны, предложение 1 сводит вопрос В. Н. Безверхнего для группы F_n к описанию орбиты элемента w. В некоторых случаях такое описание известно. Например, в свободной группе F_2 со свободными порождающими a и b орбита элемента $w = [a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ состоит из элементов, сопряженных с элементом $w^{\pm 1}$ в группе F_2 ([2, теорема 3.9]). Поэтому из предложения 1 получаем

Следствие 2. *Пусть F_2 — свободная группа со свободными порождающими a и b, H — ее подгруппа, $w = [a, b]$. Существует автоморфизма $\varphi \in Aut\ F_n$ такой, что $\varphi(w) \in H$ тогда и только тогда, когда H содержит элемент, сопряженный с w.*

Напомним [2, с. 114], что *примитивным элементом* группы F_n называется такой элемент, который можно дополнить до множества свободных порождающих группы F_n. Легко устанавливается

Предложение 2. *Пусть w является примитивным элементом группы F_n. Если H содержит хотя бы один примитивный элемент группы F_n, то найдется автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}\ F_n$ такой, что $\varphi(w) \in H$.*

В заключение сформулируем следующий

Вопрос. Пусть F — свободная группа некоторого многообразия, H — ее собственная подгруппа, $w \in F$. Найти необходимые и достаточные условия для существования автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}\ F$ такого, что $\varphi(w) \in H$.

Полученные в настоящей работе результаты дают исчерпывающий ответ на этот вопрос в случае, когда F — конечно порожденная группа, являющаяся свободной в многообразии абелевых групп. Интересно было бы исследовать этот вопрос в многообразиях нильпотентных и разрешимых групп. Возможно, в этих многообразиях удастся получить исчерпывающий ответ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Л. ван дер Варден, Алгебра, М.: Наука, 1979.

2. В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитер, Комбинаторная теория групп, М.: Наука, 1974.

3. М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, Основы теории групп, 4–е изд., М.: Наука, 1996.