В. Г. Бардаков

К ТЕОРИИ ГРУПП КОС

Доказывается, что в группе кос B_n при $n \geqslant 3$ всякая собственная вербальная подгруппа $V(B_n)$, определенная конечным множеством слов V, имеет бесконечную ширину относительно V. Кроме того, доказывается, что в группе крашеных кос извлечение корней однозначно, а элемент, сопряженный со своим обратным, — это только единица.

Библиография: 13 названий.

Напомним, что группа кос B_n на n нитях задается порождающими элементами σ_1, σ_2, ..., σ_{n-1} и определяющими соотношениями

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \dots, n-2,$$
$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \quad \text{при} \quad |i-j| \geq 2.$$

В предлагаемой работе исследуется главным образом ширина вербальных подгрупп группы кос B_n. Под шириной $\mathrm{wid}(G, V)$ вербальной подгруппы $V(G)$, определенной в группе G множеством слов V, относительно этого V понимается наименьшее $m \in \mathbb{N} \bigcup \{+\infty\}$ такое, что всякий элемент подгруппы $V(G)$ записывается в виде произведения $\leqslant m$ значений слов из V.

В § 2 мы покажем, что ширина $\mathrm{wid}(G, V)$, вообще говоря, зависит от множества V, а не только от подгруппы $V(G)$. Затем мы докажем, что при $n \geqslant 3$ всякая собственная вербальная подгруппа группы кос B_n, определенная конечным множеством слов, имеет бесконечную ширину относительно этого множества (под собственной мы понимаем подгруппу, отличную от единичной и всей группы). Конечность множества V существенна, т. е. для всякой вербальной подгруппы $V(G)$ можно построить такое множество слов W, вообще говоря, бесконечное, что $W(G) = V(G)$ и $\mathrm{wid}(G, V) = 1$.

Ширина несобственной вербальной подгруппы группы B_n всегда конечна — для единичной подгруппы это очевидно, а для самой B_n мы докажем это в § 2.

Результаты, касающиеся ширины вербальных подгрупп, являются завершением ряда исследований, начатых в связи с вопросом 6.22, записанных Г. С. Маканиным в "Коуровскую тетрадь" [2]: "Построить косу, принадлежащую коммутанту группы кос и не являющуюся коммутатором". Ю. С. Семенов [3] указал в B_3 элемент, равный произведению двух коммутаторов и не сводящийся к одному коммутатору. Н. Н. Репин [4] показал, что относительно слова $[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$ коммутанты групп B_3 и B_4 имеют бесконечную ширину, а затем В. Г. Дурнев и В. К. Шалашов [6] установили, что и любая собственная вербальная подгруппа этих групп, определенная конечным множеством слов (или, что равносильно, одним словом), имеет бесконечную ширину. Их доказательство основано на том, что группы B_3 и B_4 допускают гомоморфизм на свободное произведение $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$, а всякая собственная вербальная подгруппа свободного произведения $A * B$, $|A| \geqslant 2$, $|B| \geqslant 3$, определенная одним словом, имеет бесконечную ширину [7]. При $n \geqslant 5$ гомоморфизма группы B_n на такое свободное произведение не существует [5], поэтому необходимы существенно иные соображения.

Мы построим для каждой собственной вербальной подгруппы группы $B_n (n \geqslant 3)$, определенной конечным множеством слов V, некоторую функцию $F : B_n \longrightarrow \mathbb{Q}$ и последовательность элементов $a_1, a_2, \ldots$, принадлежащих $V(B_n)$, такие, что последовательность значений $|F(a_1)|$, $|F(a_2)|, \ldots$, неограниченно возрастает. С другой стороны, покажем существование для всяких натуральных чисел p, n константы C, зависящей только от p, n и такой, что если b — произведение p значений слов из V на группе B_n, то $|F(b)| \leqslant C$. Отсюда и последует, что $\mathrm{wid}(B_n, V) = \infty$.

Этот результат анонсирован в [1] (заметим, что в формулировке теоремы там упущено предположение, что вербальная подгруппа и ее ширина рассматриваются относительно конечного множества слов).

Наконец, в § 5 мы исследуем некоторые свойства группы крашеных кос. Напомним, что группой крашеных кос P_n называется ядро гомоморфизма группы B_n на группу подстановок S_n, отображающего порождающий σ_1 в транспозицию $(i, i+1)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Так как группа крашеных кос получается из свободной группы несколькими последовательными расширениями посредством свободных групп (подробнее см. в § 1), то естественно ожидать, что некоторые свойства свободной группы должны сохраняться и в группе крашеных кос. В частности, в свободной группе извлечение корней однозначно и два взаимно обратных элемента сопряжены тогда и только тогда, когда они оба равны единице. В предлагаемой работе мы покажем, что оба эти свойства справедливы и в группе крашеных кос P_n. Кроме того, мы построим примеры, показывающие, что оба эти свойства перестают быть справедливыми при переходе к самой группе кос $B_n (n \geqslant 3)$. Эти результаты дают положительное решение вопросов Г. С. Маканина 11.54 и 11.55 из “Коуровской тетради” [2].

Автор благодарит своего научного руководителя Ю. И. Мерзлякова за постоянное внимание к работе.

§ 1 Группы кос

Нам потребуется нормальная форма элементов группы кос, введенная А. А. Марковым [9], [10]. Напомним ее.

Обозначим через ν упоминавшийся гомоморфизм группы B_n на группу подстановок S_n, переводящий σ_i в $(i, i+1)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Ядро этого гомоморфизма называется *группой крашеных кос* и обозначается P_n. Группа P_n порождается элементами $a_{i,j}$, определенными для $1 \leqslant i < j \leqslant n$ и выражающимися через порождающие группы B_n следующим образом

$$a_{i-1,i} = \sigma_{i-1}^2,$$

$$a_{i,j} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\dots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\dots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}.$$

Кроме того, P_n разлагается в полупрямое произведение P_{n-1} и свободной группы U_n, порожденной множеством свободных порождающих $a_{1,n}$, $a_{2,n}$, $\dots$, $a_{n-1,n}$ и нормальной в P_n. Аналогично, P_{n-1} разлагается в полупрямое произведение P_{n-2} и свободной группы U_{n-1} со свободными порождающими $a_{1,n-1}$, $a_{2,n-1}$, $\dots$, $a_{n-2,n-1}$ и т. д. Следовательно, всякий элемент $u \in P_n$ можно единственным образом представить в виде

$$u = u_2 u_3 \dots u_n, \quad u_i \in U_i.$$

В P_n выполняются следующие соотношения (при $\varepsilon = \pm 1$)

$$a_{ik}^{-\varepsilon} a_{kj} a_{ik}^{\varepsilon} = (a_{ij}a_{kj})^{\varepsilon} a_{kj} (a_{ij}a_{kj})^{-\varepsilon}, \tag{1}$$

$$a_{km}^{-\varepsilon} a_{kj} a_{km}^{\varepsilon} = (a_{kj}a_{mj})^{\varepsilon} a_{kj} (a_{kj}a_{mj})^{-\varepsilon}, \quad m < j, \tag{2}$$

$$a_{im}^{-\varepsilon} a_{kj} a_{im}^{\varepsilon} = [a_{ij}^{-\varepsilon}, a_{mj}^{-\varepsilon}]^{\varepsilon} a_{kj} [a_{ij}^{-\varepsilon}, a_{mj}^{-\varepsilon}]^{-\varepsilon}, \quad i < k < m, \tag{3}$$

$$a_{im}^{-\varepsilon} a_{kj} a_{im}^{\varepsilon} = a_{kj}, \quad k < i, m < j \ \text{ или } \ m < k. \tag{4}$$

Положим $m_{i,j} = \sigma_{i-1}\sigma_{i-2}\dots\sigma_j$ для $j < i$ и $m_{i,j} = 1$ в противном случае. Тогда множество

$$\Lambda_n = \left\{ \prod_{k=2}^{n} m_{k,j_k} \ \mid \ 1 \leqslant j_k \leqslant k \right\}$$

образует шрайерову систему представителей смежных классов группы B_n по подгруппе P_n, и всякий элемент $g \in B_n$ имеет единственную нормальную форму

$$g = u_2 u_3 \dots u_n \alpha, \quad u_i \in U_i, \quad \alpha \in \Lambda_n.$$

В самой группе B_n справедливы следующие формулы сопряжения

$$\sigma_k^{-\varepsilon} a_{i,j} \sigma_k^{\varepsilon} = a_{i,j}, \quad k \neq i-1, i, j-1, j, \quad \varepsilon = \pm 1, \tag{5}$$

$$\sigma_i^{-\varepsilon} a_{i,i+1} \sigma_i^{\varepsilon} = a_{i,i+1}, \tag{6}$$

$$\sigma_{i-1}^{-1} a_{i,j} \sigma_{i-1} = a_{i-1,j}, \tag{7}$$

$$\sigma_{i-1} a_{i,j} \sigma_{i-1}^{-1} = a_{i,j}^{-1} a_{i-1,j} a_{i,j}, \tag{8}$$

$$\sigma_i^{-1} a_{i,j} \sigma_i = a_{i,j} a_{i+1,j} a_{i,j}^{-1}, \quad j \neq i+1, \tag{9}$$

$$\sigma_i a_{i,j} \sigma_i^{-1} = a_{i+1,j}, \quad j \neq i+1 \tag{10}$$

$$\sigma_{j-1}^{-1} a_{i,j} \sigma_{j-1} = a_{i,j-1}, \tag{11}$$

$$\sigma_{j-1} a_{i,j} \sigma_{j-1}^{-1} = a_{i,j-1} (a_{i,j-1}^{-1} a_{j-1,j} a_{i,j-1}) a_{j-1,j}^{-1} = a_{i,j-1} [a_{i,j}^{-1}, a_{j-1,j}^{-1}], \tag{12}$$

$$\sigma_j a_{i,j} \sigma_j = a_{j,j+1}^{-1} a_{i,j+1} a_{j,j+1}, \tag{13}$$

$$\sigma_j a_{i,j} \sigma_j^{-1} = a_{i,j+1}, \quad 1 \leq i < j \leq n-1. \tag{14}$$

Напомним [10], что центром группы B_n является бесконечная циклическая группа, порожденная элементом

$$\Delta = a_{1,2}(a_{1,3}a_{2,3})\dots(a_{1,n}a_{2,n}\dots a_{n-1,n}).$$

Также нам потребуется

Лемма 1. *Пусть u_3 — некоторый элемент свободной группы U_3, а u_2 — элемент свободной группы U_2, имеющий вид $u_2 = a_{1,2}^m$, $m \in \mathbb{Z}$ (так как U_2 — бесконечная циклическая группа, то любой ее элемент представим в таком виде). Тогда*

$$u_2^{-1} u_3 u_2 = (a_{1,3}a_{2,3})^m u_3 (a_{1,3}a_{2,3})^{-m}.$$

Доказательство. Так как центр группы B_3 порождается элементом $\Delta = a_{1,2}(a_{1,3}a_{2,3})$, то $a_{1,2} = \Delta(a_{1,3}a_{2,3})^{-1}$ и легко заметить, что для любого целого m справедливо равенство $a_{1,2}^m = \Delta^m (a_{1,3}a_{2,3})^{-m}$. Сопряжем u_3 элементом $a_{1,2}^m$ и, воспользовавшись тем, что Δ^m лежит в центре группы B_3, получим требуемое равенство.

§ 2. Вербальные подгруппы

Напомним определение логарифма [11, с. 137]. Пусть u — слово в алфавите $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Тогда *логарифмом u по основанию $x_i \in X$* называется целое число $\log_i u$, равное сумме показателей при букве x_i в слове u. *Полным логарифмом* слова u называется число $\log u$, равное сумме логарифмов u по всем основаниям. Легко проверить, что определенный таким образом логарифм обладает свойствами обычного логарифма для элементов свободной группы. В частности, логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей.

В дальнейшем, рассматривая группу B_n, мы будем считать, что $n \geq 3$, так как при $n = 2$ группа B_n является бесконечной циклической группой, для которой все эти утверждения очевидны.

В группе B_n разрешима проблема вхождения в коммутант B_n', а точнее справедлива

Лемма 2. *Элемент группы кос принадлежит коммутанту тогда и только тогда, когда его полный логарифм равен нулю.*

Доказательство непосредственно следует из определяющих соотношений группы B_n и определения логарифма.

Легко показать, что вербальньная подгруппа свободной группы, порожденная d–ми степенями при $d \geq 1$, содержит слова, логарифмы которых по любому основанию делятся на d. Для группы кос также легко доказывается

Лемма 3. *Если некоторый элемент группы кос принадлежит вербальной подгруппе, порожденной d–ми степенями, то его полный логарифм делится на d.*

Интересно было бы найти достаточное условие вхождения косы в вербальную подгруппу, порожденную d–ми степенями.

Прежде чем переходить к исследованию ширины вербальных подгрупп группы кос, покажем, что ширина вербальной подгруппы зависит от слов, ее определяющих.

ПРИМЕР. Пусть $F_2 = F_2(\mathcal{N}_2)$ – свободная двупорожденная группа ступени нильпотентности два, т. е.

$$F_2 = \text{гр}(x, y \;\;||\;\; [y, x, x] = [y, x, y] = e)$$

и $v = x_1^2$ — слово от переменной x_1. Нетрудно проверить, что вербальная подгруппа $v(F_2)$ исчерпывается элементами

$$f = x^{2\alpha} y^{2\beta} [y, x]^{\gamma}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}.$$

Легко показать, что всякий такой элемент представим в виде произведения трех значений слова v. С другой стороны, нетрудно проверить, что элемент $g = x^4 y^4 [y, x]$, принадлежащий $v(F_2)$, не представим в виде произведения двух значений слова v. Поэтому $\mathrm{wid}(F_2, v) = 3$.

Если же мы рассмотрим слово $v_1 = x_1^2 x_2^2 x_3^2$, то нетрудно заметить (см., например, [11, п.15.1.10]), что оно определяет ту же вербальную подгруппу, что и слово v, и тем не менее легко видеть, что для него $\mathrm{wid}(F_2, v_1) = 1$.

Рассмотрим множество слов V в алфавите x_1, x_2, ..., которые являются элементами свободной группы F_∞ со свободными порождающими $x_1, x_2, \ldots$. Всякое слово v из V можно представить в виде $v(x) = v(x_1, \ldots, x_s) = x_1^{r_1} \ldots x_s^{r_s} v^*(x)$, где r_1, ..., r_s — некоторые целые числа, а $v^*(x)$ – элемент коммутанта F'_∞. Если все r_i равны 0, то $v(x)$ принадлежит коммутанту и называется *коммутаторным словом,* в противном случае, $v(x)$ называется *некоммутаторным словом.* Все множество V называется *коммутаторным,* а соответствующая ему вербальная подгруппа *коммутантной,* если V целиком состоит из коммутаторных слов. Если же V содержит хотя бы одно некоммутаторное слово, то V будем называть *некоммутаторным* множеством слов, а соответствующую вербальную подгруппу *некоммутантной.* Далее, обозначим $d(v)$ наибольший общий делитель показателей r_1, ..., r_s в слове v. Если $d(v) \neq 1$, то слово v будем называть *собственным словом,* в противном случае, назовем v *несобственным словом.* Аналогично, множество V называется *собственным*, если любое слово, полученное перемножением слов из V, является собственным словом. Если же произведение некоторых слов из V является несобственным словом, то V будем называть *несобственным* множеством слов.

Понятно, что для всякого множества слов V и для любой группы G существует эквивалентное ему (т. е. определяющее ту же вербальную подгруппу) множество слов W, относительно которого вербальная подгруппа $V(G) = W(G)$ имеет ширину 1, а именно, множество W всевозможных произведений слов из V.

Перейдем к изучению несобственных вербальных подгрупп, совпадающих с самой группой. Легко видеть, что всякое несобственное множество слов в любой группе G определяет несобственную подгруппу, что непосредственно вытекает из следующего утверждения, доказанного в работе [7, с. 574].

Лемма 4. *Если $v(x) = x_1^{r_1} \ldots x_s^{r_s} v^*(x)$, $r_i \in \mathbb{Z}$, $v^*(x) \in F'_\infty$ – некоммутаторное слово и d = н.о.д$(r_1, \ldots, r_s)$, то для любого элемента g группы G его d-я степень g^d лежит в $v(G)$ и является значением слова v.*

Ввиду лемм 2, 3, 4 всякое собственное множество слов V определяет собственную вербальную подгруппу группы кос B_n, а всякое несобственное множество слов V определяет несобственную вербальную подгруппу группы B_n. Покажем, что если V – несобственное множество слов, то $\mathrm{wid}(B_n, V)$ конечна.

Действительно, так как V – несобственное множество слов, то в нем найдутся слова $v_1, \ldots, v_k$ такие, что их произведение $v_1 v_2 \ldots v_k$ – несобственное слово. Следовательно, $v(B_n) = V(B_n) = B_n$. Кроме того, ввиду леммы 4, всякий элемент g из B_n является значением слова v и поэтому $\mathrm{widB_n, V} \leqslant k$. Таким образом, нами доказана

Лемма 5. *Если множество слов V определяет несобственную вербальную подгруппу группы B_n, то ее ширина относительно V конечна.*

Переходим к изучению собственных вербальных подгрупп группы B_n, которые, как уже отмечалось, определяются собственным множеством слов V.

§ 3. Некоммутантнные вербальные подгруппы

В этом параграфе мы докажем, что если V – конечное некоммутаторное множество слов, то определенная им вербальная подгруппа группы B_n, $n \geq 3$ имеет бесконечную ширину относительно V.

Пусть F_2 — свободная двупорожденная группа со свободными порождающими x, y и a — некоторое приведенное слово из F_2. Тогда a может быть представлено в виде $a = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} \ \ldots \ x^{\alpha_s} y^{\beta_s}$, где все α_i и β_i являются ненулевыми, за исключением, возможно, α_1 и β_s, целыми числами. Будем называть некоторое вхождение порождающего x в слово a *положительным* (*отрицательным*) вхождением, если x имеет положительный (отрицательный) показатель степени. Например, если $a = x^3 y^2 x^{-1} y^4$, то первое вхождение x является положительным, а второе – отрицательным.

Далее подслово слова a между двумя соседними положительными (отрицательными) вхождениями x будем называть *x–промежутком* (*x^{-1}–промежутком*). На множестве приведенных слов группы F_2 определим следующие функции:

$\delta_k(a)$ — число x–промежутков длины $2k+1$ в слове a,

$\delta_k^*(a)$ — число x^{-1}–промежутков длины $2k+1$ в слове a,
где под длиной промежутка понимается слоговая длина свободного произведения $F_2 = \text{гр}(x) * \text{гр}(y)$ (см. [12, с. 192]). Пусть, например, $a = x^{-1} y^3 x^2 y^{-4} x^3 y x y^{-2} x^{-3}$. В этом случае мы имеем два x–промежутка длины 1 (y^{-4} и y) и один x^{-1}–промежуток $y^3 x^2 y^{-4} x^3 y x y^{-2}$ длины 7. Следовательно, $\delta_0(a) = 2$, $\delta_3^*(a) = 1$ и $\delta_k(a) = \delta_k^*(a) = 0$ для всех остальных k.

Положим еще $\theta_k(a) = \delta_k(a) - \delta_k^*(a)$.

Очевидно, для любого приведенного слова $a \in F_2$ выполняется равенство

$$\delta_k(a) = \delta_k^*(a^{-1}), \tag{1}$$

и, следовательно,

$$\theta_k(a) + \theta_k(a^{-1}) = 0. \qquad (2)$$

Функции, подобные введенным, использовал Ремтулла [7, с. 574]. Но так как он не исключал элементы конечного порядка, то под x–промежутком (x^{-1}–промежутком) слова a он понимает подслово a между двумя соседними слогами x^α и x^β, для которых $\alpha = \beta = 1$ ($\alpha = \beta = -1$).

Введем, далее, следующие обозначения: если φ_k, ψ_k, ω_k — функции, зависящие от параметра k, принимающего целые неотрицательные значения, то запись $\varphi_k =_p \psi_k$ означает, что $\varphi_k = \psi_k$ для всех значений параметра k, за исключением не более, чем p значений. Очевидно, что если $\varphi_k =_p \psi_k$ и $\psi_k =_q \omega_k$, то $\varphi_k =_{p+q} \omega_k$, и если $\varphi_k =_p \varphi'_k$ и $\psi_k =_q \psi'_k$, то $\varphi_k + \psi_k =_{p+q} \varphi'_k + \psi'_k$. В этих обозначениях справедлива

Лемма 6. *Если a и b — слова в группе F_2, то*

$$\theta_k(ab) =_9 \theta_k(a) + \theta_k(b).$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.11 из работы Ремтуллы [7].

Из леммы 6 легко вытекает

Лемма 7. *Если a и b — элементы группы F_2, то*

$$\theta_k(a^{-1}ba) =_{18} \theta_k(b).$$

Для доказательства достаточно дважды применить предыдущую лемму, а затем воспользоваться равенством (2).

Рассмотрим далее возведение в степень элементов группы F_2. Справедлива

Лемма 8. *Если b — приведенный элемент из F_2, а m — некоторое целое, то $\theta_k(b^m) =_{20} m\theta_k(b')$, где b' — циклически приведенное слово сопряженное с b в F_2.*

Доказательство. Представим элемент b^m в виде $b^m = a^{-1}(b')^m a$, где $b' = b_1 b_2 \dots b_r$ — циклически приведенное слово, причем b_1 и b_r не лежат одновременно в $X = \text{гр}(x)$ или $Y = \text{гр}(y)$ и не равны единице. Из предыдущей леммы

$$\theta_k(b^m) =_{18} \theta_k(b')^m) \qquad (3)$$

Предположим вначале, что $m \geq 0$. Если слоговая длина b' равна 1, то $\theta_k(b'^m) = \theta_k(b') = 0$ для всех k и утверждение леммы справедливо. Поэтому можно считать, что слоговая длина b' больше 1. Тогда каждый x–отрезок слова b' в произведении b'^m будет повторяться ровно m раз. Кроме того, в произведении $b'b'$ может возникнуть новый x–отрезок, повторяющийся в слове b'^m ровно $m-1$ раз. Так как других x–отрезков не возникает, то

$$\delta_k(b'^m) =_1 m\delta_k(b'),$$

где исключается значение k, соответствующее новому x–отрезку. Аналогично, для x^{-1}–отрезков:

$$\delta_k^*(b'^m) =_1 m\delta_k^*(b').$$

Следовательно,

$$\theta_k(b'^m) =_2 m\theta_k(b').$$

Отсюда ввиду (3) получаем требуемое равенство.

Пусть далее $m < 0$. По предыдущему случаю

$$\theta_k(b^m) =_{20} (-m)\theta_k(b'^{-1})$$

и воспользовавшись равенством

$$\theta_k(b'^{-1} = -\theta_k(b'),$$

легко выводимым из (2), получим требуемое равенство. Лемма доказана.

Пусть φ — сопряжение группы F_2 элементом $(xy)^{-1}$. Рассмотрим в голоморфе Hol F_2 подгруппу $\tilde{F}_2 = \text{гр}(\varphi)F_2$ и определим на ней функции δ_k, δ_k^* и θ_k следующим образом: если $h = \varphi^l a$, $l \in \mathbb{Z}$, $a \in F_2$, то положим $\delta_k(h) = \delta_k(a)$, $\delta_k^*(h) = \delta_k^*(a)$ и $\theta_k(h) = \delta_k(h) - \delta_k^*(h)$. Если, далее G — произвольная группа с фиксированным гомоморфизмом $\chi : G \longrightarrow \tilde{F}_2$, то определим δ_k, δ_k^*, θ_k на G, полагая $\delta_k(g) = \delta_k(g^\chi)$, $\delta_k^*(g) = \delta_k^*(g^\chi)$ и $\theta_k(g) = \delta_k(g) - \delta_k^*(g)$ для $g \in G$. Для произвольного элемента u из G равенство (2), вообще говоря, перестает быть справедливым, но можно доказать следующий его аналог.

Лемма 9. *Если G — группа с фиксированным гомоморфизмом $\chi : G \longrightarrow \tilde{F}_2$, то $\theta_k(u) + \theta_k(u^{-1}) =_{18} 0$ для любого $u \in G$.*

Доказательство. Пусть $u^\chi = \varphi^l a$, $l \in \mathbb{Z}$, $a \in F_2$. Тогда

$$(u^{-1})^\chi = a^{-1}\varphi^{-l} = \varphi^{-1}(xy)^{-l}a^{-1}(xy)^l$$

и из определения функции θ_k, получим

$$\theta_k(u) + \theta_k(u^{-1}) = \theta_k(u^\chi) + \theta_k(u^{-\chi}) = \theta_k(a) + \theta_k((xy)^{-l}a^{-1}(xy)^l). \tag{4}$$

Ввиду леммы 7,

$$\theta_k((xy)^{-l}a^{-1}(xy)^l) =_{18} \theta_k(a^{-1}).$$

Подставим это равенство в (4). Имеем

$$\theta_k(u) + \theta_k(u^{-1}) =_{18} \theta_k(a) + \theta_k(a^{-1}).$$

Так как a лежит в F_2, то вследствие (2) правая часть этого равенства равна нулю. Лемма доказана.

Для произведения элементов группы G справедливо утверждение, аналогичное лемме 6.

Лемма 10. *Если G — группа с фиксированным гомоморфизмом $\chi : G \longrightarrow \tilde{F}_2$, то для любых $u, v \in G$ справедливо равенство*

$$\theta_k(uv) =_{27} \theta_k(u) + \theta_k(v).$$

Доказательство. Допустим, что $u^\chi = \varphi^l a$, $v^\chi = \varphi^p b$, где $l, p \in \mathbb{Z}$, $a, b \in F_2$. Тогда их произведение

$$(uv)^\chi = u^\chi v^\chi = \varphi^l a \varphi^p b = \varphi^{l+p}(xy)^p a (xy)^{-p} b.$$

По определению, $\theta_k(uv) = \theta_k((xy)^p a (xy)^{-p} b)$. Трижды применяя лемму 6, получим

$$\theta_k(uv) =_{27} \theta_k((xy)^p) + \theta_k(a) + \theta_k((xy)^{-p}) + \theta_k(b). \tag{5}$$

Ввиду равенства (2),

$$\theta_k((xy)^p) + \theta_k((xy)^{-p}) = 0,$$

а по определению функции θ_k на элементах группы G:

$$\theta_k(u) = \theta_k(a), \quad \theta_k(v) = \theta_k(b).$$

Подставим эти равенства в (5), получим утверждение леммы.

В качестве следствия легко получается

Лемма 11. *Если $u, v \in G$, то $\theta_k(v^{-1}uv) =_{72} \theta_k(u)$.*

Для доказательства дважды воспользовавшись предыдущей леммой, получим

$$\theta_k(v^{-1}uv) =_{54} \theta_k(v^{-1}) + \theta_k(u) + \theta_k(v).$$

По лемме 9, $\theta_k(v^{-1}) + \theta_k(v) =_{18} 0$. Подставив это равенство в предыдущее, получим требуемое утверждение.

Далее, рассмотрим возведение в степень. Справедлива

Лемма 12. *Если G — группа с фиксированным гомоморфизмом $\chi : G \longrightarrow \tilde{F}_2$ и u из G, то для всякого целого числа m найдется элемент a' из F_2 такой, что справедливо равенство*

$$\theta_k(u^m) =_{102} m\theta_k(a').$$

Доказательство. Пусть опять $u^\chi = \varphi^l a$, $l \in \mathbb{Z}$, $a \in F_2$. Возводя в m–ю степень, имеем

$$u^m = \varphi^m a^{(xy)^{-l(m-1)}} a^{(xy)^{-l(m-2)}} \ldots a = \varphi^{lm}(xy)^{l(m-1)}(a(xy)^{-l})^{m-1}a.$$

Таким образом, если $u_0 \in G$ — некоторый прообраз элемента φ при гомоморфизме χ, то

$$(u_0^{-l} u^m u_0^l)^\chi = \varphi^{lm}(xy)^{lm}(a(xy)^{-l})^m.$$

Воспользовавшись леммой 11, получим

$$\theta_k(u^m) =_{72} \theta_k(u_0^{-l} u^m u_0^l), \tag{6}$$

где

$$\theta_k(u_0^{-l} u^m u_0^l) = \theta_k((xy)^{lm}(a(xy)^{-l})^m). \tag{7}$$

Применим лемму 6 к правой части последнего равенства:

$$\theta_k((xy)^{lm}(a(xy)^{-l})^m) =_9 \theta_k((xy)^{lm}) + \theta_k((a(xy)^{-l})^m). \tag{8}$$

Легко проверить, что

$$\theta_k((xy)^{lm}) = \begin{cases} \operatorname{siqn}(lm)(|lm|-1) & \text{при} \quad k=0, \\ 0 & \text{при} \quad k \neq 0, \end{cases}$$

где функция $\operatorname{siqn}(z)$ определяет знак числа z, т. е.

$$\operatorname{siqn}(z) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad z<0, \\ 0 & \text{при} \quad z=0, \\ 1 & \text{при} \quad z>0. \end{cases}$$

Следовательно, исключив значение $k = 0$, из равенства (7) ввиду леммы 6, получим

$$\theta_k((xy)^{lm}(a(xy)^{-l})^m) =_{10} \theta_k((a(xy)^{-l})^m). \tag{9}$$

Воспользовавшись леммой 8, имеем

$$\theta_k((a(xy)^{-l})^m) =_{20} m\theta_k(a'), \tag{10}$$

где a' — циклически приведенное слово, сопряженное в группе F_2 слову $a(xy)^{-l}$. На основании цепочки равенств (6)–(10) получаем требуемое равенство.

Для группы крашеных кос P_n при $n \geq 3$ определим отображение $\chi : P_n \longrightarrow \tilde{F}_2$ действием на порождающих

$$\begin{aligned} a_{1,2}^{\chi} &= \varphi, \\ a_{1,3}^{\chi} &= x, \\ a_{2,3}^{\chi} &= y, \\ a_{i,j}^{\chi} &= e, \quad \text{при} \quad j \geqslant 4. \end{aligned}$$

Так как ввиду леммы 1

$$a_{1,2}^{-l} u_3 a_{1,2}^{l} = (a_{1,3}a_{2,3})^l u_3 (a_{1,3}a_{2,3})^{-l},$$

где $l \in \mathbb{Z}$ и u_3 — элемент свободной группы U_3гр$(a_{1,3}, a_{2,3})$, то легко проверить, что отображение χ определяет гомоморфизм группы крашеных кос на группу $\tilde{F}_2$.

Пусть теперь $v(x) = x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_s^{r_s} v^*(x)$ — собственное некоммутаторное теоретико–групповое слово, т. е. элемент свободной группы F_∞, у которого не все показатели r_1, r_2, …, r_s обращаются в нуль, а $v^*(x)$ — произведение коммутаторов. Обозначим через d наибольший общий делитель показателей r_1, r_2, …, r_s. Очевидно, что d отлично от нуля и, кроме того, мы можем считать, что $d \neq 1$ (случай $d = 1$ разобран в § 2). Построим основную функцию F, упоминавшуюся во введении.

Пусть g — произвольный элемент группы кос B_n. Представим его в нормальной форме: $g = u\alpha$, где u лежит в P_n, а α — представитель смежного класса группы B_n по подгруппе P_n. Положим

$$\Delta_k(g) = \sum_{\lambda \in \Lambda_n} \theta_k(u^\lambda),$$

где суммирование ведется по всем элементам множества Λ_n, определенному в § 1. Определим $F_d(g)$ как число значений k, для которых $(1/(n-3)!)\Delta_k(g)$ не делится нацело на d. При $n = 3$ полагаем $0! = 1$ (легко проверить, что функция $(1/(n-3)!)\Delta_k(g)$ принимает только целые значения, так как для всякого представителя $\lambda \in \Lambda_n$ найдется $s = (n-3)! - 1$ различных представителей λ_1, λ_2, …, λ_s из Λ_n, для которых

$$\theta_k(u^\lambda) = \theta_k(u^{\lambda_1}) = \ldots = \theta_k(u^{\lambda_s})).$$

В дальнейшем мы фиксируем некоторое целое $d > 1$ и будем писать просто $F(g)$.

Всякий элемент $g \in B_n$ можно представить в форме $g = w(g)\overline{g}$, где $w(g) \in P_n$, $\overline{g} \in \Lambda_n$. Будем называть $w(g)$ *фактором элемента* g. Рассмотрим некоторые множества факторов. Пусть P — множество факторов произведений $\alpha\beta$, где α и β независимо пробегают все множество Λ_n. Далее, как отмечалось в § 1, для всякого представителя $\alpha \in \Lambda_n$ существует его гомоморфный образ в группе S_n. Обозначим через $|\alpha|$ порядок образа элемента α при этом гомоморфизме. Нетрудно заметить, что элемент $\alpha^{|\alpha|}$ лежит в группе P_n. Обозначим через S множество всех факторов $w(\alpha^i)$, где i пробегает множество $\{-1, 0, 1, \ldots, |\alpha|\}$ для всех представителей α из Λ_n. Очевидно, что P и S — конечные множества. Для всех факторов $w \in P \bigcup S$ вычислим $\Delta_k(w)$ и наибольшее число значений k, при которых $\Delta_k(w) \neq 0$, обозначим через c. Очевидно, что $F(w) \leq c$ для всех $w \in P \bigcup S$.

Лемма 13. *Для любой пары g, h элементов группы B_n справедливы соотношения*:

1) $\Delta_k(gh) =_{c_1} \Delta_k(g) + \Delta_k(h)$,

2) $F(gh) \leq F(g) + F(h) + c_1$ при $c_1 = 126n! + c$.

Доказательство. Пусть $g = u\alpha$, $h = v\beta$, где $u, v \in P_n$, $\alpha, \beta \in \Lambda_n$. Тогда

$$gh = uv^{\alpha^{-1}} w(\alpha\beta)\overline{\alpha\beta}.$$

По определению

$$\Delta_k(gh) = \sum_{\lambda \in \Lambda_n} \theta_k((uv^{\alpha^{-1}} w(\alpha\beta))^\lambda).$$

Чтобы вычислить эту сумму дважды применим лемму 10 к каждому слагаемому. Получим

$$\theta_k((uv^{\alpha^{-1}} w(\alpha\beta))^\lambda) =_{54} \theta_k(u^\lambda) + \theta_k(v^{\alpha^{-1}\lambda} + \theta_k((w(\alpha\beta))^\lambda).$$

Далее, по лемме 11

$$\theta_k(v^{\alpha^{-1}\lambda} =_{72} \theta_k(v^{\overline{\alpha^{-1}\lambda}}).$$

Учитывая, что мощность множества Λ_n равна $n!$, на основании двух последних равенств имеем

$$\Delta_k(gh) =_{126n!} \sum_{\lambda\Lambda_n} \left(\theta_k(u^\lambda) + \theta_k(v^{\overline{\alpha^{-1}\lambda}} + \theta_k((w(\alpha\beta))^\lambda)\right).$$

Так как представитель $\overline{\alpha^{-1}\lambda}$ пробегает все множество Λ_n, если λ пробегает все Λ_n, то

$$\Delta_k(gh) =_{126n!} \Delta_k(g) + \Delta_k(h) + \Delta_k(w(\alpha\beta)).$$

По выбору c значение $\Delta_k(w(\alpha\beta))$ отлично от нуля не более чем для значений k. Исключая эти значения, получим

$$\Delta_k(gh) =_{c_1} \Delta_k(g) + \Delta_k(h), \quad \text{где } \ c_1 = 126n! + c.$$

т. е. первое равенство доказано. Неравенство 2) непосредственно следует из 1) и определения функции F.

Аналогично доказывается

Лемма 14. *Для всякого элемента g из B_n справедливы соотношения*:

1) $\Delta_k(g) + \Delta_k(g^{-1}) =_{c_2} 0$,

2) $F(g^{-1}) \le F(g) + c_2$, где $c_2 = 117n! + c$.

Доказательство. Пусть опять $g = u\alpha$, $u \in P_n$, $\alpha \in \Lambda_n$ и

$$g^{-1} = (u^{-1})^{\alpha} w(\alpha^{-1})\overline{\alpha^{-1}}.$$

Из определения функции Δ_k имеем

$$\Delta_k(g) + \Delta_k(g^{-1}) = \sum_{\lambda\in\Lambda_n} \theta_k(u^{\lambda}) + \sum_{\lambda\in\Lambda_n} \left(\theta_k((u^{-1})^{\alpha\lambda}(w(\alpha^{-1}))^{\lambda}\right). \tag{11}$$

Преобразуем каждое слагаемое, стоящее во второй сумме, по лемме 10. Получим

$$\theta_k\left((u^{-1})^{\alpha\lambda}(w(\alpha^{-1}))^{\lambda}\right) =_{27} \theta_k\left((u^{-1})^{\alpha\lambda})\right) + \theta_k\left((w(\alpha^{-1}))^{\lambda}\right)$$

и, далее, по лемме 11

$$\theta_k\left((u^{-1})^{\alpha\lambda}\right) =_{72} \theta_k\left((u^{-1})^{\overline{\alpha\lambda}}\right).$$

Воспользовавшись двумя последними равенствами, перепишем (11) в виде

$$\Delta_k(g) + \Delta_k(g^{-1}) =_{99n!} \sum_{\lambda\in\Lambda_n} \left(\theta_k(u^{\lambda}) + \theta_k((u^{-1})^{\overline{\alpha\lambda}})\right) + \sum_{\lambda\in\Lambda_n} \left(\theta_k((w(\alpha^{-1}))^{\lambda})\right).$$

Так как $\overline{\alpha\lambda}$ пробегает все множество представителей Λ_n, если λ пробегает Λ_n, то перегруппировав слагаемые соответствующим образом, получим

$$\Delta_k(g) + \Delta_k(g^{-1}) =_{99n!} \sum_{\lambda\in\Lambda_n} \left(\theta_k(u^{\lambda}) + \theta_k(u^{-\lambda}0\right) + \Delta_k(w(\alpha^{-1})).$$

По лемме 9

$$\theta_k(u^{\lambda}) + \theta_k(u^{-\lambda}) =_{18} 0$$

для каждого $\lambda \in \Lambda_n$. Подставим это выражение в предыдущее равенство:

$$\Delta_k(g) + \Delta_k(g^{-1}) =_{117n!} \Delta_k(w(\alpha^{-1})).$$

Правая часть этого равенства равна нулю за исключением не более c значений k. Исключив эти значения, получим требуемое соотношение 1). Неравенство 2) следует из 1) и определения функции F. Лемма полностью доказана.

Рассмотрим далее возведение в степень элементов группы B_n. Справедлива

Лемма 15. *Для любого элемента $g \in B_n$ и любого целого числа d_1 значение $F(g^{dd_1})$ ограничено некоторой константой, зависящей только от n и d.*

Доказательство. Пусть опять $g = u\alpha$, $u \in P_n$, $\alpha \in \Lambda_n$. Так как $F(e) = 0$, то можно считать, что d_1 отлично от нуля. Предположим вначале, что $d_1 > 0$ и представим d_1 в виде $d_1 = |\alpha|q + r$, где $|\alpha|$ — порядок образа α в симметрической группе S_n, q и r — целые числа, причем $0 \leq r < |\alpha|$. Тогда $g^{dd_1} = g^{d|\alpha|q} g^{qr}$. Ясно, что $g^{|\alpha|} \in P_n$.

Оценим значение $F(g^{d|\alpha|q})$. Для этого обозначим $v = g^{|\alpha|}$. Тогда

$$\Delta_k(v^{dq}) = \sum_{\lambda \in \Lambda_n} (\theta_k(v^\lambda))^{dq}.$$

По лемме 12

$$\theta_k((v^\lambda)^{dq}) =_{102} 0 \pmod{d}.$$

Следовательно,

$$\Delta_k(v^{dq}) =_{102n!} 0 \pmod{d}.$$

Отсюда, по определению функции F,

$$F(g^{d|\alpha|q}) = F(v^{dq}) \leq 102n! \tag{12}$$

Далее, оценим значение $F(g^{rd})$. Для этого представим g^r в виде $g^r = v_1\beta$, где $v_1 \in P_n$, а $\beta = \overline{\alpha^r} \in \Lambda_n$. Тогда

$$g^{rg} = v_1 v_1^{\beta^{-1}} \dots v_1^{\beta^{-d+1}} w(\beta^d)\overline{\beta^\alpha}$$

и по лемме 13

$$F(g^{rd}) \leq F(v_1 v_1^{\beta^{-1}} \dots v_1^{\beta^{-d+1}}) + F(w(\beta^d)) + c_1. \tag{13}$$

Обозначим через $v_2 = v_1 v_1^{\beta^{-1}} \dots v_1^{\beta^{-d+1}}$ и оценим

$$\Delta_k(v_2) = \sum_{\lambda \in \Lambda_n} \left(\theta_k(v_1^\lambda v_1^{\beta^{-1}\lambda} \dots v_1^{\beta^{-d+1}\lambda}) \right).$$

Для этого к каждому слагаемому применим $d-1$ раз лемму 10, получим $\theta_k(v_1^\lambda) + \theta_k(v_1^{\beta^{-1}\lambda} + \ldots + \theta_k(v_1^{\beta^{-d+1}\lambda})$ за исключением не более $27(d-1)$ значений k. Ввиду леммы 11, последнее выражение равно

$$\theta_k(v_1^\lambda) + \theta_k(v_1^{\overline{\beta^{-1}\lambda}} + \ldots + \theta_k(v_1^{\overline{\beta^{-d+1}\lambda}})$$

за исключением не более $72(d-1)$ значений k.

Опять замечаем, что каждый из представителей $\overline{\beta^{-1}\lambda}$, …, $\overline{\beta^{-d+1}\lambda}$ пробегает все множество Λ_n, если λ пробегает все Λ_n. Сгруппировав слагаемые соответствующим образом, получим

$$\Delta_k(v_2) =_{c_3} d \left(\sum_{\lambda \in \Lambda_n} (\theta_k(v_1^\lambda)) \right) \quad \text{при} \quad c_3 = 99(d-1)n!$$

Следовательно,

$$F(v_2) \leq 99(d-1)n! \tag{14}$$

Нам осталось оценить значение $F(w(\beta^d))$. Здесь возможны два случая. Либо d не превосходит $|\beta|$; тогда $F(w(\beta^d) \leq c$. Либо $d > |\beta|$; тогда положим $d = |\beta| q_1 + r_1$, где q_1, r_1 — целые числа и $0 \leq r_1 < |\beta|$, $q_1 < d$. В этом случае

$$w(\beta^d) = w(\beta^{|\beta| q_1 + r_1}) = (w(\beta^{|\beta|}))^{q_1} w(\beta^{r_1}).$$

Так как $F(w(\beta^{|\beta|})) \leq c$ и $F(w(\beta^{r_1})) \leq c$, то по лемме 13

$$F(w(\beta^d)) \leq (126n! + c)q_1 + c(q_1 + 1).$$

Учитывая, что $q_1 < d$, имеем

$$F(w(\beta^d)) \leq (126n! + 2c)d + c. \tag{15}$$

Из оценки (13), на основании (14) и (15), получаем

$$F(g^{rd}) \leq (225d + 27)n! + 2c(d + 1).$$

А так как

$$F(g^{dd_1}) \leq F(g^{d|\alpha|q}) + F(g^{dr}) + (126n! + c),$$

то из (12) окончательно получаем

$$F(g^{dd_1}) \leq (225d + 255)n! + (2d + 3)c.$$

Если же $d_1 < 0$, то по лемме 14 из предыдущего неравенства

$$F(g^{dd_1}) \leq F(g^{-dd_1}) + c_2 \leq (225d + 372)n! + 2(d + 2)c.$$

Лемма доказана.

Из этой леммы и леммы 13 легко выводится

Следствие 1. *Для любых элементов g_1, g_2, …, g_s группы B_n и целых чисел r_1, r_2, …, r_s, делящихся нацело на d, справедлива оценка:*

$$F(g_1^{r_1} g_2^{r_2} \dots g_s^{r_s}) \leq c_4,$$

где c_4 зависит только от n, d и s и не зависит от элементов g_1, g_2, …, g_s.

Рассмотрим теперь коммутаторы группы B_n.

Лемма 16. *Если слово $v^*(x_1, \dots, x_s)$ равно произведению l коммутаторов, то $F(v^*(g_1, \dots, g_s)) \leq c_5$ для любых элементов $g_1, \dots, g_s$ группы кос B_n, причем, c_5 зависит только от n и l.*

Доказательство. Рассмотрим коммутатор $[g, h]$, $g, h \in B_n$. Для него после трехкратного применения леммы 10, получим

$$\Delta_k([g, h]) =_{3c_1} \Delta_k(g^{-1}) + \Delta_k(h^{-1}) + \Delta_k(g) + \Delta_k(h).$$

Из леммы 14

$$\Delta_k(g^{-1}) + \Delta_k(g) =_{c_2} 0, \quad \Delta_k(h^{-1}) + \Delta_k(h) =_c 0.$$

Следовательно, $\Delta_k([g, h]) = 0$ за исключением не более $3c_1 + 2c_2$ значений k.

В случае $l > 1$ применим $l - 1$ раз лемму 10, получим

$$\Delta_k(v^*(g_1, \dots, g_s) =_{c_5} 0, \text{ где } c_5 = 2l(2c_1 + c_2) - c_1.$$

Следовательно, для любых элементов $g_1, \ldots, g_s$ из B_n

$$F(v^*(g_1, \ldots, g_s)) \leq c_5.$$

Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть слово* $v(x_1, \ldots, x_s) = x_1^{r_1} \ldots x_s^{r_s} v^*(x)$ *таково, что все показатели* $r_1, \ldots, r_s$ *делятся нацело на* d, *а* $v^*(x)4$ *— произведение* l *коммутаторов. Тогда для любых элементов* $g_1, \ldots, g_s$ *из* B_n *значение* $F(v(g_1, \ldots, g_s)) \leq c_6$, *где* c_6 *— некоторая постоянная, зависящая лишь от* n *и* v *и не зависящая от элементов* $g_1, \ldots, g_s$.

Доказательство. По лемме 10

$$F(v(g_1, \ldots, g_s)) \leq F(g_1^{r_1} \ldots g_s^{r_s}) + F(v^*(g_1, \ldots, g_s)) + c_1.$$

Воспользовавшись следствием леммы 15 и леммой 16, получим оценку

$$F(v(g_1, \ldots, g_s)) \leq c_4 + c_5 + c_1,$$

и в качестве c_6 достаточно взять сумму $c_1 + c_4 + c_5$.

Таким образом, мы построили функцию F такую, что для всякого собственного некоммутаторного слова v, функция F на значениях слова v в группе B_n принимает лишь значения, ограниченные константой c_6, которая зависит только от n и v.

Построим теперь последовательность элементов $a_1, a_2, \ldots$, принадлежащих вербальной подгруппе $v(B_n)$ и такую, что последовательность чисел $F(a_1), F(a_2, \ldots$ неограниченно возрастает. Для этого положим

$$a_i = bf^2bf^3 \ldots bf^{i+1}b, \quad i = 1, 2, \ldots, \quad \text{где} \quad b = (a_{1,3}a_{2,3})^d, \quad f = (a_{1,3}^{-2}a_{2,3})^d.$$

Так как по лемме 4 $b, f \in v(B_n)$, то и все $a_i \in v(B_n$.

В дальнейшем будем рассматривать функции δ_k и δ_k^* только при условии $k > 0$.

Предположим вначале, что $n = 3$ и вычислим

$$\Delta_k(a_i) = \sum_{\lambda \in \Lambda_3} \theta_k(a_i^\lambda), \quad \text{где} \quad \theta_k(x) = \delta_k(x) - \delta_k^*(x).$$

Нетрудно проверить следующие равенства:

$$\begin{array}{ll} \delta_d(a_i) = 0, & \delta_d^*(a_i) = i - 1, \\ \delta_{2d}(a_i) = 1, & \delta_{2d}^*(a_i) = 0, \\ \delta_{3d}(a_i) = 1, & \delta_{3d}^*(a_i) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \delta_{(i+1)d}(a_i) = 1, & \delta_{(i+1)d}^*(a_i) = 0 \end{array}$$

и $\delta_k(a_i) = \delta_k^*(a_i) = 0$ для всех остальных k. Рассмотрим множество слов

$$a_i^{\sigma_1} = bf_1^2bf_1^3 \ldots bf_1^{i+1}b, \quad \text{где} \quad f_1 = (a_{1,3}a_{2,3}^{-2})^d.$$

Для всех $i = 1, 2, \ldots$, значения $\delta_k(a_i^{\sigma_1}) = \delta_k^*(a_i^{\sigma_1}) = 0$ при всех значениях $k > 0$. Далее,

$$a_i^{\sigma_2} = a_{1,2}^{l_1} b^{l_1} a_{2,3}^{-1} a_{1,3}^{-d} a_{2,3} (f_2^{2d-1} b_2 f_2^{3d-1} \ldots b_2 f_2^{(i+1)d-1} b_2),$$

где $f_2 = a_{1,3}a_{2,3}a_{1,3}a_{2,3}^2$, $b_2 = (a_{1,3}a_{2,3})^2 a_{1,3}^{-d} a_{2,3}$, $l_1 = (-i^2 - 2i + 1)d$, и для них

$$\begin{array}{ll} \delta_d(a_i^{\sigma_2}) = i-1, & \delta_d^*(a_i^{\sigma_2}) = 0, \\ \delta_{4d}(a_i^{\sigma_2}) = 0, & \delta_{4d}^*(a_i^{\sigma_2}) = 1, \\ \delta_{6d}(a_i^{\sigma_2}) = 0, & \delta_{6d}^*(a_i^{\sigma_2}) = 1, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \delta_{2(i+1)d}(a_i^{\sigma_2}) = 0, & \delta_{2(i+1)d}^*(a_i^{\sigma_2}) = 1 \end{array}$$

и $\delta_k(a_i\sigma_2) = \delta_k^*(a_i\sigma_2) = 0$ для всех остальных k.

Аналогично,

$$a_i^{\sigma_1\sigma_2} = a_{1,2}^{l_2} b^{l_2-1} a_{1,3}^{-d} (f_3^{2d-1} b_3 f_3^{3d-1} \dots b_3 f_3^{(i+1)d-1} b_3) a_{1,3}^{-1} a_{2,3},$$

где $f_3 = a_{2,3}^{-3} a_{1,3}^{-1}$, $\quad b_3 = a_{2,3}^{-3} a_{1,3}^{-d-1}$;

$$a_i^{\sigma_2\sigma_1} = a_{1,2}^{l_1} b^{l_1} a_{2,3}^{-d} (f_4^{2d-1} b_4 f_4^{3d-1} \dots b_4 f_4^{(i+1)d-1} b_4),$$

где $f_4 = ((a_{1,3}a_{2,3})^2 a_{1,3})^{2d-1}$, $b_4 = (a_{1,3}a_{2,3})^2 a_{1,3} a_{2,3}^{-d}$;

$$a_i^{\sigma_1\sigma_2\sigma_1} = a_{1,2}^{l_2} a_{1,3} (a_{2,3}a_{1,3})^{l_2} a_{2,3}^{-d} (f_5^{2d-1} b_5 f_5^{3d-1} \dots b_5 f_5^{(i+1)d-1} b_5) a_{2,3}^{-d},$$

где $f_5 = a_{1,3}^{-3} a_{2,3}^{-1}$, $b_5 = a_{1,3}^{-3} a_{2,3}^{-d-1}$ и показатель $l_2 = (i(i+5)/2 + 1)d$. На всех этих элементах функции δ_k и δ_k^* обращаются в нуль при всех $i = 1, 2, \dots$.

Для вычисления функции F на элементах a_i введем следующие обозначения: для каждого номера $i = 1, 2, \dots$ обозначим K_i^1 — множество всех нечетных чисел в интервале $[3, i+1]$ при $i \geq 2$ и $K_1^1 = \emptyset$; K_i^2 — множество всех четных чисел из интервала $[i+3, 2(i+1)]$ при $i \geq 1$. Из определения функции Δ_k и предыдущих вычислений

$$\Delta_k(a_i = \begin{cases} i-1 & \text{при} \;\; k = 1, \\ 1-i & \text{при} \;\; k = d, \\ 1 & \text{при} \;\; k = jd \;\; \text{и} \;\; j \in K_i^1 \bigcup \{2\}, \\ -1 & \text{при} \;\; k = jd \;\; \text{и} \;\; j \in K_i^2, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следовательно, для всех j, принадлежащих множеству $K_i = \{2\} \bigcup K_i^1 \bigcup K_i^2$, справедливо неравенство $\Delta_{jd}(a_i) \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ d)$. Тогда, по определению функции F для всех i справедлива оценка $F(a_i) \geq |K_i|$. Легко вычислить, что мощность множества K_i равна $|K_i| = 2(i + 1 - [(i+1)/2]) > i$, где квадратные скобки означают взятие целой части. Из этой оценки следует, что последовательность $F(a_1$, $F(a_2$, … неограниченно возрастает.

Мы разобрали случай $n = 3$. Перейдем теперь к случаю $n > 3$. Напомним, что всякий представитель смежного класса группы B_n по подгруппе P_n имеет вид $\prod_{i=1}^n m_{i,j}$, $1 \leq j \leq i$, где

$$m_{i,j} = \sigma_{i-1}\sigma_{i-2} \dots \sigma_j$$

при $j < i$ и $m_{i,j} = 1$ в противном случае. Обозначим через L_n множество представителей, сопряжения которыми индуцируют автоморфизмы группы P_3. Очевидно, что $\Lambda_3 \subseteq L_n$; кроме того, представители $m_{i,j}$ при $j \geq 4$ также лежат в

L_n. С другой стороны, если представитель $\beta = \prod_{i=1}^{n} m_{i,j}$, содержит некоторый элемент $m_{k,l} \in \Lambda_3$ или у которого $l \leq 4 < k$, то $a_{1,3}^{\beta}$, $a_{2,3}^{\beta} \notin U_3$, и для него $\theta_k(a_i^{\beta} = 0$. Следовательно, учитывая, что $|L_n| = |\Lambda_3|(n-3)!$, получаем

$$\Delta_k(a_i) = (n-3)! \sum_{\lambda \in \Lambda_3} \theta_k(a_i^{\lambda}), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

уже в произвольной группе $B_n (n \geq 3)$. Таким образом, по определению функции F значение $F(a_i)$ в произвольной группе B_n равно значению $F(a_i)$ в группе B_3. Следовательно, последовательность a_1, a_2, … является искомой.

Пусть теперь $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ — некоммутаторное множество слов, и $d = d(V) =$ н.о.д.$(d(v_1, \ldots, d(v_m)) > 1$. Тогда построенная последовательность слов a_1, a_2, … принадлежит вербальной подгруппе $V(B_n)$. Для каждого слова v, являющегося произведением $\leq p$ слов из V, функция F ограничена константой $c_6(v)$ на всех значениях слова v на группе B_n. Так как таких слов v конечное число, то отсюда получаем, что найдется константа C, для которой $F(b) \leq C$ для всех элементов $b \in V(B_n)$, представимых в виде произведения $\leq p$ значений слов из V. С другой стороны, так как последовательность $F(a_1)$, $F(a_2)$, … неограниченно возрастает, то отсюда следует основное утверждение настоящего параграфа.

Лемма 17. *Если V — конечное некоммутаторное множество слов, определяющее собственную вербальную подгруппу группы B_n, то относительно него вербальная подгруппа $V(B_n)$ при $n \geq 3$ имеет бесконечную ширину, т. е.* $\mathrm{wid}(B_n, V) = \infty$.

Отметим, что если V — конечное коммутаторное множество слов, то функция F также ограничена на всех элементах из $V(B_n)$, представимых в виде произведения $\leq p$ значений слов из V. Но построить последовательность a_1, a_2, …, обладающую указанными выше свойствами, не удается. Поэтому приходится выбирать иной путь.

§ 4. Коммутантные вербальные подгруппы

Прежде чем построить основную функцию, введем некоторые вспомогательные.

Для каждого целого числа m определим его *след* или, точнее, 3–*след* tr m, полагая

$$\mathrm{tr}\ m = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3), \\ 1 & \text{при} \quad m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3), \\ -1 & \text{при} \quad m \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 3). \end{cases}$$

В дальнейшем для сокращения записи будем использовать обозначение $a \equiv b$, что означает: число a сравнимо с b по модулю 3.

Заметим, что для любых целых чисел m и n имеют место равенства

$$\mathrm{tr}\ (m+n) = \begin{cases} \mathrm{tr}\ m + \mathrm{tr}\ n - 3 & \text{при} \ \ m \equiv n \equiv 1, \\ \mathrm{tr}\ m + \mathrm{tr}\ n + 3 & \text{при} \ \ m \equiv n \equiv -1, \\ \mathrm{tr}\ m + \mathrm{tr}\ n & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

так что всегда

$$\mathrm{tr}\ m + \mathrm{tr}\ n - 3 \leq \mathrm{tr}\ (m+n) \leq \mathrm{tr}\ m + \mathrm{tr}\ n + 3. \tag{1}$$

Пусть $F_2 = F_2(x,y)$ — свободная группа степени свободы 2 с базой x, y. Определим *квазилогарифм* $\mathrm{ql} : F_2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ полагая

$$\mathrm{ql}\ (u) = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{tr}\ \alpha_i + \sum_{i=1}^{s} \mathrm{tr}\ \beta_i,$$

если

$$u = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} \dots x^{\alpha_s} y^{\beta_s},$$

где α_i, β_i — целые числа, отличные от нуля, за исключением, возможно, α_1 и β_s. Название функции ql объясняется следующим ее свойством

Лемма 18. *Для всяких u, v выполняются соотношения*

$$\mathrm{ql}\ (u) + \mathrm{ql}\ (v) - 3 \leq \mathrm{ql}\ (uv) \leq \mathrm{ql}\ (u) + \mathrm{ql}\ (v) + 3, \tag{2}$$

$$\mathrm{ql}\ (u^{-1}) = -\mathrm{ql}\ (u). \tag{3}$$

Доказательство. Второе сразу следует из равенства $\mathrm{tr}\ (-m) = -\mathrm{tr}\ (m)$ и определения квазилогарифма. Докажем первое соотношение. Можно считать,что $u \neq e$, $v \neq e$. Если слово u оканчивается, а слово v начинается степенями различных букв x, y, то по определению квазилогарифма, $\mathrm{ql}\ (uv) = \mathrm{ql}\ (u) + \mathrm{ql}\ (v)$. Если же, скажем, $u = u_1 x^m w$, $v = w^{-1} x^n v_1$, где явно выделены первые несократимые слоги произведения uv, то, по предыдущему,

$$\mathrm{ql}\ (uv) \leq \mathrm{ql}\ (u_1 x^{m+n} v_1) = \mathrm{ql}\ (u_1 x^{m+n}) + \mathrm{ql}\ (v_1)$$

и остается опять воспользоваться определением функции ql и формулой (1).

Для всяких k, l, j с условием $1 \leq k < l < j$ рассмотрим (k,l,j)–гомоморфизм $\varphi_{klj} : U_j \longrightarrow F_2(x,y)$, отображающий $a_{k,j}$ $a_{l,j}$ на x, y соответственно, а остальные порождающие $a_{i,j}$ посылающий в единицу. Определим теперь функцию $\mathrm{ql} : U_j \longrightarrow \mathbb{Q}$, полагая

$$\mathrm{ql}\ (u) = \mathrm{tr}\ m \ \ \text{при} \ \ u = a_{1,2}^m,$$

$$\mathrm{ql}\ (u) = \frac{2}{(j-1)(j-2)} \sum_{\substack{k,l=1, \\ k<l}}^{j-1} \mathrm{ql}\ (u^{(k,l,j)}) \ \ \text{при} \ \ u \in U_j, \ \ j \geq 3,$$

где $u^{(k,l,j)}$ обозначает (k,l,j)–образ элемента u, т. е. его образ относительно (k,l,j)–гомоморфизма (одно и то же обозначение ql для функций на F_2 и U_j не приведет к недоразумениям, так как всякий раз будет ясно, откуда берется аргумент.

Рассмотрим некоторые свойства функции ql. Покажем, что лемма 18 справедлива для произвольной группы U_j. Действительно, для группы U_2 неравенство (2) непосредственно следует из (1), а равенство (3) вытекает из равенства tr $(-m) + -$tr (m) и определения функции ql. Для группы U_3 требуемые соотношения следуют из самой леммы 18 и того факта, что группы U_3 и F_2 изоморфны.

Пусть, наконец, $j > 3$ и $u, v \in U_j$. Рассмотрим некоторый (k,l,j)–образ слов u, v, uv. Для него справедливы неравенства (2), т. е.

$$\text{ql } (u^{(k,l,j)}) + \text{ql } (v^{(k,l,j)}) - 3 \leq \text{ql } ((uv)^{(k,l,j)}) \leq \text{ql } (u^{(k,l,j)}) + \text{ql } (v^{(k,l,j)}) + 3. \qquad (4)$$

Всего для группы U_j мы можем построить $(j-1)(j-2)/2$ различных (k,l,j)–гомоморфизмов. Суммируя почленно неравенства (4) по всем (k,l,j)–образам, получим

$$\sum_{\substack{k,l=1,\\ k<l}}^{j-1} (\text{ql } (u^{(k,l,j)}) + \text{ql } (v^{(k,l,j)})) - \frac{3}{2}(j-1)(j-2) \leq \sum_{\substack{k,l=1,\\ k<l}}^{j-1} \text{ql } ((uv^{(k,l,j)}))$$

$$\leq \sum_{\substack{k,l=1,\\ k<l}}^{j-} (\text{ql } (u^{(k,l,j)}) + \text{ql } (v^{(k,l,j)}))\frac{3}{2}(j-1)(j-2).$$

Домножая эти неравенства на $2/((j-1)(j-2))$ и вспоминая определение функции ql, получим неравенство (2).

Равенство (3) легко выводится из определения функции ql. Следовательно, мы показали, что соотношения (2) и (3) справедливы для всех элементов из группы U_j.

С помощью этих соотношений легко доказывается

Лемма 19. *Для произвольных элементов $u, v \in U_j$, $j = 2, 3, \ldots$, справедливы неравенства*

$$\text{ql } (u) - 6 \leq \text{ql } (u^v) \leq \text{ql } (u) + 6.$$

Для доказательства правого неравенства воспользуемся правой частью неравенства (2), тогда

$$\text{ql } (u^v) \leq \text{ql } (v^{-1}u) + \text{ql } (v) + 3$$

и

$$\text{ql } (v^{-1}u) \leq \text{ql } (v^{-1}) + \text{ql } (u) + 3.$$

Из этих неравенств

$$\text{ql } (u^v) \leq \text{ql } (v^{-1}) + \text{ql } (u) + \text{ql } (v) + 6.$$

Учитывая, что ql (v^{-1}) + ql $(v) = 0$, получим требуемое неравенство. Левое неравенство доказывается аналогично.

Пусть теперь $u \in P_n$ имеет следующую нормальную форму

$$u = u_2 u_3 \dots u_n, \quad u_i \in U_i.$$

Распространим квазилогарифм $\mathrm{ql} : U_i \longrightarrow \mathbb{Q}$ до квазилогарифма $\mathrm{ql} : P_n \longrightarrow \mathbb{Q}$ полагая

$$\mathrm{ql}\ (u) = \sum_{i=2}^{n} \mathrm{ql}\ (u_i).$$

Если $v = v_2 v_3 \dots v_n$ — другой элемент из P_n, то произведение

$$uv = (u_2 v_2)(u_3^{v_2} v_3) \dots (u_n^{v_2 \dots v_n} v_n).$$

И чтобы научиться вычислять квазилогарифм от uv, мы должны знать, как устроен элемент $u_j^{v_2}$. Оказывается, что если мы перейдем к (k,l,j)–образу, то этот элемент будет равен $\overline{u}_j^w$, где $\overline{u}_j$ — (k,l,j)–образ элемента u_j, а w лежит в группе F_2, а точнее — справедлива

Лемма 20. *Пусть $u \in U_j$, $v \in P_{j-1}$, $j \geq 3$ и через $\overline{u}$ обозначим (k,l,j)–образ слова u. Тогда (k,l,j)–образом слова u^v является слово*

$$(xy)^m \overline{u} (xy)^{-m},$$

где m — сумма показателей при порождающем $a_{k,l}$ в нормальной форме слова v.

Для доказательства введем гомоморфизм группы U_j на свободную группу $\text{гр}(a_{k,j}, a_{l,j}$, который оставляет порождающие $a_{k,j}$ и $a_{l,j}$ на месте, а остальные порождающие посылает в единицу. Легко заметить, что этот гомоморфизм является как бы "промежуточным" (k,l,j)–гомоморфизмом. Будем в дальнейшем так его и называть. Найдем вначале образ элемента u^v при промежуточном (k,l,j)–гомоморфизме.

Обозначим через u_0 образ u при промежуточном (k,l,j)–гомоморфизме. Из основного свойства гомоморфизма очевидно, что достаточно рассмотреть два частных случая:

1) $u = a_{i,j}$ при $i = k$ или $i = l$ и

2) $u = a_{i,j}$ при $i \neq k, l$.

Пусть вначале $u = u_0 = a_{k,j}$. Сопряжения в группе P_n задаются равенствами (1)–(4) § 1. Рассмотрим , какой вид примут эти равенства при промежуточном (k,l,j)–гомоморфизме. В правой части равенства (1) порождающий $a_{i,j}$ не может быть равен $a_{l,j}$, так как, в противном случае, в левой части стоял бы элемент $a_{l,k}$, но мы рассматриваем (k,l,j)–гомоморфизмы, где $k < l$, а элемент $a_{l,k}$ определяется при условии $l < k$. Следовательно, промежуточным (k,l,j)–образом равенства (1) будет

$$a_{i,k}^{-\varepsilon} a_{k,j} a_{i,k}^{\varepsilon} = a_{k,j}.$$

Аналогично, при промежуточном (k,l,j)–гомоморфизме соотношение (2) превращается в соотношение

$$a_{k,m}^{-\varepsilon}a_{k,j}a_{k,m}^{\varepsilon}=\begin{cases} a_{k,j} & \text{при}\quad m\neq l,\\ (a_{k,j}a_{l,j})^{\varepsilon}a_{k,j}(a_{k,j}a_{l,j})^{-\varepsilon} & \text{при}\quad m=l,\end{cases}$$

Далее, если в соотношении (3) $i\neq k,l$ или $m\neq k,l$, то при промежуточном (k,l,j)–гомоморфизме оно примет вид

$$a_{i,m}^{-\varepsilon}a_{k,j}a_{i,m}^{\varepsilon}=a_{k,j}.$$

Случай $i=l$ и $m=k$ невозможен из определения $a_{i,m}$. Случай $i=k$ и $m=l$ также невозможен, так как соотношение (3) справедливо при условии $i<k$.

Следовательно, в промежуточном (k,l,j)–образе справедливы следующие равенства

$$a_{k,l}^{-\varepsilon}a_{k,j}a_{k,l}^{\varepsilon}=(a_{k,j}a_{l,j})^{\varepsilon}a_{k,j}(a_{k,j}a_{l,j})^{-\varepsilon},$$

и

$$a_{i,m}^{-\varepsilon}a_{k,j}a_{i,m}^{\varepsilon}=a_{k,j}$$

при условии: $i\neq k$ или $m\neq l$. Аналогично разбирается случай $u=a_{l,j}$ и проверяются равенства

$$a_{k,l}^{-\varepsilon}a_{l,j}a_{k,l}^{\varepsilon}=(a_{k,j}a_{l,j})^{\varepsilon}a_{l,j}(a_{k,j}a_{l,j})^{-\varepsilon},$$

$$a_{i,m}^{-\varepsilon}a_{l,j}a_{i,m}^{\varepsilon}=a_{l,j},\quad i\neq k\quad\text{или}\quad m\neq l.$$

Для случая $u=a_{i,j}$ при $i\neq k,l$ из тех же соотношений (1)–(4) легко вывести, что $a_{i,j}^{v}=a_{i,j}^{w}$, где w лежит в группе U_j и при (k,l,j)– гомоморфизме w перейдет в единицу.

Легко проверить, что элементы $a_{k,l}$ и $(a_{k,j}a_{l,j})$ перестановочны. Следовательно, уже для произвольного целого m и $i=k$ или $i=l$ справедливы соотношения

$$a_{k,l}^{-m}a_{i,j}a_{k,l}^{m}=(a_{k,j}a_{l,j})^{m}a_{i,j}(a_{k,j}a_{l,j})^{-m}.$$

Из всего сказанного легко выводится, что для произвольного слова u при промежуточном (k,l,j)– гомоморфизме

$$u^{v}=(a_{k,j}a_{l,j})^{m}u_0(a_{k,j}a_{l,j})^{-m}$$

и перейдя к (k,l,j)–образу, получим требуемое равенство. Лемма доказана.

Легко заметить связь этой леммы с леммой 1. Оказывается, что если мы определим отображение:

$$a_{k,l}\longmapsto a_{1,2},\quad a_{k,j}\longmapsto a_{1,3},\quad a_{l,j}\longmapsto a_{2,3},$$

то оно будет осуществлять изоморфизм группы P_3 и группы гр$(a_{k,l},a_{l,j},a_{k,j}$, рассматриваемой как подгруппу P_n.

Рассмотрим теперь произведение элементов группы P_n. Справедлив следующий аналог леммы 18.

Лемма 24. *Если u и v — произвольные элементы группы P_n, то справедливы неравенства*

$$\mathrm{ql}\ (u)+\mathrm{ql}\ (v)-(9n-15)\leq\mathrm{ql}\ (uv)\leq\mathrm{ql}\ (u)+\mathrm{ql}\ (v)+(9n-15).$$

Доказательство проведем индукцией по n. При $n = 2$ группа P_n — бесконечная циклическая группа и требуемое неравенство следует из (2) леммы 18.

Предположим, что утверждение доказано для $n-1$ и докажем его для n. Пусть $u = u_0u_1$, $v = v_0v_1$, где u_0, $v_0 \in P_{n-1}$, u_1, $v_1 \in U_n$. По определению квазилогарифма

$$\mathrm{ql}\ (u) = \mathrm{ql}\ (u_0) + \mathrm{ql}\ (u_1), \quad \mathrm{ql}\ (v) = \mathrm{ql}\ (v_0) + \mathrm{ql}\ (v_1). \tag{5}$$

Представим произведение uv в нормальной форме:

$$uv = u_0v_0(u_1^{v_0}v_1).$$

Ввиду того, что U_n нормальна в P_n, произведение $u_1^{v_0}v_1$ принадлежит U_n. Следовательно,

$$\mathrm{ql}\ (uv) = \mathrm{ql}\ (u_0v_0) + \mathrm{ql}\ (u_1^{v_0}v_1). \tag{6}$$

Из леммы 18 получаем неравенство

$$\mathrm{ql}\ (u_1^{v_0}) + \mathrm{ql}\ (v_1) - 3 \le \mathrm{ql}\ (u_1^{v_0}v_1) \le \mathrm{ql}\ (u_1^{v_0}) + \mathrm{ql}\ (v_1) + 3. \tag{7}$$

Найдем значение $\mathrm{ql}\ (u_1^{v_0})$. По определению функции ql на группе U_n

$$\mathrm{ql}\ (u_1^{v_0}) = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{\substack{k,l=1,\\ k<l}}^{n-1} \mathrm{ql}\ \left((u_1^{v_0})^{(k,l,j)}\right). \tag{8}$$

Символом $\overline{u}_1$ обозначим (k,l,n)–образ слова u_1. Тогда по предыдущей лемме, (k,l,n)–образом слова $u_1^{v_0}$ будет являться слово $\overline{u}_1^{(xy)^m}$ для некоторого целого m, и для него мы можем воспользоваться леммой 19. Получим

$$\mathrm{ql}\ (\overline{u}_1) - 6 \le \mathrm{ql}\ \left((\mathrm{ql}\ (u_1^{v_0})^{(k,l,n)}\right) \le \mathrm{ql}\ (\overline{u}_1) + 6. \tag{9}$$

Всего для группы U_n существует $(n-1)(n-2)/2$ различных (k,l,n)–образов. Суммируя по ним все неравенства (9), имеем

$$\sum_{\substack{k,l=1,\\ k<l}}^{n-1} \mathrm{ql}\ (u_1)^{(k,l,n)} - 3(n-1)(n-2) \le \sum_{\substack{k,l=1\\ k<l}}^{n-1} \mathrm{ql}\ ((u_1^{v_0})^{(k,l,n)}) \le$$

$$\le \sum_{\substack{k,l=1\\ k<l}}^{n-1} \mathrm{ql}\ (u_1^{(k,l,n)}) + 3(n-1)(n-2).$$

Умножим все части этого неравенства на $2/((n-1)(n-2))$ и воспользуемся формулой (8):

$$\mathrm{ql}\ (u_1) - 6 \le \mathrm{ql}\ (u_1^{v_0}) \le \mathrm{ql}\ (u_1) + 6.$$

Из последнего неравенства и (7) получим

$$\mathrm{ql}\ (u_1) + \mathrm{ql}\ (v_1) - 9 \le \mathrm{ql}\ (u_1^{v_0}v_1) \le \mathrm{ql}\ (u_1) + \mathrm{ql}\ (v_1) + 9.$$

По предположению индукции, для произведения u_0v_0 справедливы неравенства

$$\text{ql }(u_0)+\text{ql }(v_0)-(9(n-1)-15)\leq \text{ql }(u_0v_0)\leq \text{ql }(u_0)+\text{ql }(v_0)+(9(n-1)-15).$$

Складывая почленно это неравенство с предыдущим и используя равенства (5) и (6), получим требуемую оценку.

Легко заметить, что формула (2) леммы 18 для произвольного элемента группы P_n, вообще говоря, неверна. Действительно, возьмем элемент $g=a_{1,2}(a_{1,3}^2a_{2,3})$. Для него ql $(g)=1$. С другой стороны,

$$g^{-1}=a_{1,2}^{-1}(a_{2,3}^{-1}a_{1,3}^{-1}a_{2,3}^{-1}a_{1,3}^{-1}a_{2,3})$$

и ql $(g^{-1})=-4$. Тем не менее, справедлив следующий аналог формулы (2).

Лемма 25. *Для всякого $u\in P_n$ справедливы неравенства*

$$-\text{ql }(u)-(9n-15)\leq \text{ql }(u^{-1})\leq -\text{ql }(u)+(9n-15).$$

Доказательство. Положим в лемме 24 $v=u^{-1}$. Так как ql $(e)=0$, то

$$\text{ql }(u)+\text{ql }(u^{-1})-(9n-15)\leq 0\leq \text{ql }(u)+\text{ql }(u^{-1})+(9n-15).$$

Далее, вычтем ql (u^{-1}) из всех частей этого неравенства и умножим получившиеся неравенства на -1, получим требуемую оценку.

Теперь рассмотрим сопряжение в группе P_n. Справедлива

Лемма 26. *Для произвольных элементов u,v из P_n имеют место неравенства*

$$\text{ql }(u)-3(9n-15)\leq \text{ql }(u^v)\leq \text{ql }(u)+3(9n-15).$$

Доказательство. Применим к произведению $u^v=v^{-1}uv$ лемму 24, получим

$$\text{ql }(v^{-1})+\text{ql }(uv)-(9n-15)\leq \text{ql }(u^v)\leq \text{ql }(v^{-1})+\text{ql }(uv)+(9n-15). \tag{10}$$

Опять применим ту же лемму к произведению uv. Тогда неравенства (10) примут вид

$$\text{ql }(v^{-1})+\text{ql }(u)+\text{ql }(v)-2(9n-15)\leq \text{ql }(u^v)\leq \text{ql }(v^{-1})+\text{ql }(u)+\text{ql }(v)+2(9n-15).$$

Для завершения доказательства осталось воспользоваться леммой 25.

До сих пор мы рассматривали функцию ql, определенную лишь на элементах группы P_n. Введем теперь основную функцию F, определенную на всех элементах группы кос B_n и принимающую значения из поля рациональных чисел.

Пусть опять Λ_n — множество (определенное в § 1) представителей смежных классов группы B_n по подгруппе P_n. Для произвольного элемента g из B_n, представленного в нормальной форме $g=u\alpha$, где $u\in P_n$, $\alpha\in\Lambda_n$, положим

$$F(g=\frac{1}{(n-3)!}\sum_{\lambda\in\Lambda_n}\text{ql }(u^{\lambda}),$$

где λ пробегает все множество представителей Λ_n. Из этого определения видно, что значение $F(g)$ зависит от того, в какой группе B_n оно находится, т. е. если $g\in B_n$, то g можно рассматривать и как элемент группы B_k при $k\geq n$. Понятно, что значение $F(g)$ в группе B_n может отличаться от значения $F(g)$ в B_k. Поэтому мы всегда будем оговаривать, в какой группе рассматривается функция F.

Так же как и в предыдущем параграфе обозначим через P множество всевозможных произведений $\alpha\beta$, где α и β независимо пробегают множество Λ_n. Для каждого $\gamma \in P$ найдем значение $F(\gamma)$ в группе B_n и модуль наибольшего из них обозначим через c.

Перейдем теперь к рассмотрению произведений элементов группы B_n. Если $g = u\alpha$, $h = v\beta$, где $u, v \in P_n$, α, $\beta \in \Lambda_n$, то их произведение $gh = uv^{\alpha^{-1}} w(\alpha\beta)\overline{\alpha\beta}$. Оценим значение $F(gh)$. По определению функции F:

$$F(gh) = \frac{1}{(n-3)!} \sum_{\lambda \in \Lambda_n} \mathrm{ql}\ \left(uv^{\alpha^{-1}} w(\alpha\beta))^{\lambda}\right).$$

Воспользовавшись свойством функции ql (лемма 24), для каждого λ получим оценку

$$\mathrm{ql}\ (u^{\lambda}) + \mathrm{ql}\ (v^{\alpha^{-1}\lambda} + \mathrm{ql}\ (w(\alpha\beta)^{\lambda}) - 2c_1 \leq \mathrm{ql}\ \left((uv^{\alpha^{-1}} w(\alpha\beta))^{\lambda}\right) \leq$$

$$\leq \mathrm{ql}\ (u^{\lambda}) + \mathrm{ql}\ (v^{\alpha^{-1}\lambda} + \mathrm{ql}\ (w(\alpha\beta)^{\lambda}) + 2c_1,$$

где $c_1 = 9n - 15$. Далее по лемме 26

$$\mathrm{ql}\ (v^{\overline{\alpha^{-1}\lambda}}) - 3c_1 \leq \mathrm{ql}\ (v^{\alpha^{-1}\lambda}) \leq \mathrm{ql}\ (v^{\overline{\alpha^{-1}\lambda}}) - 3c_1.$$

Из этих оценок

$$\mathrm{ql}\ (u^{\lambda}) + \mathrm{ql}\ (v^{\overline{\alpha^{-1}\lambda}} + \mathrm{ql}\ (w(\alpha\beta)^{\lambda}) - 5c_1 \leq \mathrm{ql}\ (uv^{\alpha^{-1}} w(\alpha\beta)^{\lambda}) \leq$$

$$\leq \mathrm{ql}\ (u^{\lambda}) + \mathrm{ql}\ (v^{\overline{\alpha^{-1}\lambda}}) + \mathrm{ql}\ (w(\alpha\beta)^{\lambda}) - 5c_1.$$

Учитывая, что представитель $v^{\overline{\alpha^{-1}\lambda}}$ пробегает все множество Λ_n, если λ пробегает все множество Λ_n, суммируем почленно эти неравенства для всех представителей λ. По определению функции F, получим

$$F(g) + F(h) + F(\alpha\beta) - c_2 \leq F(gh) \leq F(g) + F(h) + F(\alpha\beta) + c_2, \qquad (11)$$

при $c_2 = \frac{5c_1 n!}{(n-3)!}$ Так как $F(\alpha\beta) \leq c$ по выбору константы c, то из (11)

$$F(g) + F(h) - c_3 \leq F(gh) \leq F(g) + F(h) + c_3, \text{где} \quad c_3 = c + c_2.$$

Таким образом нами доказана

Лемма 27. *Для любых $g, h \in B_n$ справедливы неравенства*

$$F(g) + F(h) - c_3 \leq F(gh) \leq F(g) + F(h) + c_3,$$

где c_3 — некоторая постоянная, зависящая от n и не зависящая от g и h.

При помощи этой леммы легко доказывается

Лемма 28. *Для всякого g из B_n справедливы неравенства*

$$-F(g) - c_3 \leq F(g^{-1}) \leq -F(g) + c_3.$$

Доказательство. Положим в предыдущей лемме $h = g^{-1}$ и, учитывая, что $F(e) = 0$, получим

$$F(g) + F(g^{-1}) - c_3 \leq 0 \leq F(g) + F(g^{-1}) + c_3.$$

Умножим эти неравенства на -1 и прибавим ко всем частям $F(g^{-1})$, получим требуемые неравенства.

Из лемм 27 и 28 легко выводится

Лемма 29. *Для любых $g, h \in B_n$ справедливы неравенства*

$$F(g) - 3c_3 \leq F(g^h) \leq F(g) + 3c_3.$$

Эти неравенства равносильны

$$-3c_3 \leq F(g^h) - F(g) \leq 3c_3,$$

что по определению модуля означает

$$|F(g^h) - F(g)| \leq 3c_3.$$

Из неравенства треугольника

$$|F(g^h)| - |F(g)| \leq |F(g^h) - F(g)| \leq 3c_3,$$

отсюда

$$|F(g^h)| \leq |F(g)| + 3c_3. \tag{12}$$

Аналогично преобразовывая неравенства леммы 27, получим

$$|F(gh)| \leq |F(g)| + |F(h)| + c_3. \tag{13}$$

Рассмотрим теперь произведение коммутаторов в B_n. Справедлива

Лемма 30. *Пусть b — произведение l коммутаторов в B_n. Тогда справедлива оценка*

$$|F(b)| \leq c_3(6l - 1).$$

Доказательство проведем индукцией по l. Рассмотрим коммутатор $[g, h] = g^{-1}g^h$. По лемме 27

$$F(g^{-1}) + F(g^h) - c_3 \leq F([g, h]) \leq F(g^{-1}) + F(g^h) + c_3.$$

Далее, по лемме 29

$$F(g^{-1}) + F(g) - 4c_3 \leq F([g, h]) \leq F(g^{-1}) + F(g) + 4c_3$$

и, наконец, по лемме 28

$$-5c_3 \leq F([g, h]) \leq 5c_3.$$

Отсюда

$$|F([g, h])| \leq 5c_3. \tag{14}$$

Пусть теперь $b = b'[g, h]$, где явно выделен последний коммутатор, а b' является произведением $l - 1$ коммутаторов. Из (13)

$$|F(b)| \leq |F(b')| + |F([g, h])| + c_3,$$

и для завершения доказательства остается воспользоваться предположением индукции и оценкой (14).

Теперь мы можем перейти к основному утверждению настоящего параграфа. Сформулируем его.

Лемма 31. *Ширина собственной вербальной подгруппы $V(B_n)$ группы кос B_n $(n \geq 3)$ относительно конечного множества коммутаторных слов V бесконечна.*

Пусть v_1, …, v_k — всевозможные произведения $\leq p$ слов из V. Ввиду леммы 30 найдется константа C такая, что $|F(b)| \leq C$ для всякого элемента b, являющегося значением некоторого слова v_i. Следовательно, для завершения доказательства достаточно построить последовательность слов $a_1, a_2, \ldots$, лежащих в $V(B_n)$, для которой последовательность чисел $|F(a_1)|, |F(a_2)|, \ldots$, неограниченно возрастает. Приступим к построению этой последовательности.

Пусть F_2 — свободная группа с базой x, y. Определим следующие автоморфизмы этой группы

$$\tilde{\sigma}_1 : \begin{cases} x \longmapsto xyx^{-1}, \\ y \longmapsto x, \end{cases} \qquad \tilde{\sigma}_2 : \begin{cases} x \longmapsto y^{-1}x^{-1}, \\ y \longmapsto x, \end{cases}$$

и рассмотрим множество автоморфизмов

$$\tilde{\Lambda}_3 = \{e, \tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_2\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2\tilde{\sigma}_1\}.$$

Определим теперь функцию $\tilde{F}$ на произвольном элементе u из F_2 формулой

$$\tilde{F}(u) = \sum_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_3} \mathrm{ql}\ (u^{\lambda}).$$

Пусть $v(x_1, \ldots, x_s$ — некоторое коммутаторное слово из множества V. Так как это слово лежит в коммутанте свободной группы, то оно зависит не менее чем от двух переменных, т. е. $s \geq 2$. Для всех $i = 1, 2, \ldots, s$ положим $x_i = x^{i-1}yx^{i-1}$ и рассмотрим слово

$$v(x, y) = v(y, xyx, \ldots, x^{s-1}yx^{s-1}) = x^{n_1}y^{m_1} \ldots x^{n_r}y^{m_r},$$

представленное в приведенной форме . Используя, если надо, сопряжение, можем считать, что все n_i и m_i отличны от нуля. Легко заметить, что так определенное значение слова v принадлежит вербальной подгруппе $v(F_2)$, причем, в силу того, что отображение $x_i \longmapsto x^{i-1}yx^{i-1}$ задает вложение свободной группы F_s с порождающими x_1, …, x_s в свободную группу $F_2(x, y)$, слово $v(x, y)$ равно единичному слову только если $v(x_1, \ldots, x_s)$ — единичное слово.

Назовем так определенный элемент $v(x, y)$ вербальной подгруппы $v(F_2)$ *растущим*, если последовательность

$$|\tilde{F}(v(x, y))|, \quad |\tilde{F}(v^2(x, y))|, \ldots$$

неограниченно возрастает.

Покажем, что для любого коммутаторного слова v можно построить элемент группы F_2, лежащий в подгруппе $v(F_2)$ и являющийся растущим.

Предположим, что слово $v = v(x, y) = x^{n_1}y^{m_1} \ldots x^{n_r}y^{m_r}$ не является растущим. Обозначим $v_1 = v^{x^{\beta}}$, $v_2 = v^{x^{\gamma}y^{\delta}}$, $w = [v_1, v_2]$, где β, γ, δ — некоторые целые числа, которые мы определим чуть позже. Легко заметить, что слово $\tilde{a}_1 = w^x w$ лежит в вербальной подгруппе $v(F_2)$. Покажем, что если β, γ, δ удовлетворяют системе соотношений

$$\beta < -1, \quad \beta \equiv -1, \quad |\beta| > n_1, \quad \gamma < 0, \quad \gamma \neq n_1, \quad \delta > 1, \quad \delta \equiv -1,$$

где знак $\equiv$ означает сравнимость по модулю 3, то $\tilde{a}_1$ является растущим.

Предположим, что $v_1 = x^{n_1-\beta}(y^{m_1} \dots y^{m_r})x^{\beta}$, $v_2 = y^{-\delta}x^{n_1-\gamma}(y^{m_1} \dots y^{m_r})x^{\gamma}y^{\delta}$ — приведенные формы слов v_1 и v_2 соответственно. Тогда ql $(w) =$ ql $([v_1, v_2]) = 0$ по лемме 18. Далее, слово w начинается с $x^{-\beta}$ и оканчивается на y^{δ}, причем, по выбору показателей: β, $\delta \neq 0$. Используя определение квазилогарифма для F_2, легко проверяется

Лемма 32. *Для любого приведенного слова $u = x^{\alpha_1}u_1y^{\beta_1}$ в группе F_2 при $\beta_1 \neq 0$ справедливы равенства*

$$)\text{ql }(u^x) = \begin{cases} \text{ql }(u) + 3 & \text{при } \alpha_1 \equiv -1, \\ \text{ql }(u) & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$)\text{ql }(u^{x^{-1}}) = \begin{cases} \text{ql }(u) - 3 & \text{при } \alpha_1 \equiv 1, \\ \text{ql }(u) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Ввиду того, что $-\beta \equiv 1$, из этой леммы вытекает равенство ql $(w^x) =$ ql (w). Найдем теперь квазилогарифм от $\tilde{a}_1$: ql $(\tilde{a}_1) =$ ql $(x^{-1}w)+$ql $(xw) = -3$. Отсюда, учитывая, что $\tilde{a}_1$ начинается с $x^{-1-\beta}$ и оканчивается на y^{δ}, причем $1 + \beta$ и δ не обращаются в нуль, получим

$$\text{ql }(\tilde{a}_1^k) = k\text{ql }(\tilde{a}_1) = -3k \tag{15}$$

для любого натурального k.

Вычислим теперь значение ql $\left((\tilde{a}_1^k)^{\tilde{\sigma}_1}\right) =$ ql $\left((\tilde{a}_1^{\tilde{\sigma}_1})^k\right)$. Для этого нам надо знать, как меняется значение квазилогарифма после действия на аргумент автоморфизмом $\tilde{\sigma}_1$.

Лемма 33. *Пусть $u = y^{\alpha_0}x^{\beta_1}y^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_s}y^{\beta_s}$ — приведенное слово, причем, показатели α_i, β_i не равны нулю, за исключением, возможно, α_0 и β_s. Тогда*

$$\text{ql }(u^{\tilde{\sigma}_1}) = \begin{cases} \text{ql }(u) - 3 & \text{при } (\alpha_0, \beta_s) \equiv (1, 0) \text{ или} (\alpha_0, \beta_s) \equiv (1, 1), \\ \text{ql }(u) + 3 & \text{при } (\alpha_0, \beta_s) \equiv (0, -1) \text{ или} (\alpha_0, \beta_s) \equiv (-1, -1), \\ \text{ql }(u) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

где запись $(i, j) \equiv (i_1, j_1)$ означает, что $i \equiv i_1$ и $j \equiv j_1$.

Доказательство. Достаточно заметить, что автоморфизм $\tilde{\sigma}_1$ можно рассматривать как последовательное выполнение двух автоморфизмов, первый из которых меняет местами порождающие x и y (не меняя значение ql (u)), а второй — сопрягает полученное слово элементом x^{-1} (значение ql (u) после сопряжения элементом x^{-1} определяется по формуле б) леммы 32). Лемма доказана.

Так как слово $\tilde{a}_1^k$ начинается с $x^{-1-\beta}$, где $-1 - \beta \equiv 0$, и оканчивается на y^{δ}, где $\delta \equiv -1$, то из этой леммы и равенства (15) получаем

$$\text{ql }\left((\tilde{a}_1^{\tilde{\sigma}_1})^k\right) = \text{ql }\left((\tilde{a}_1^k)^{\tilde{\sigma}_1}\right) = \text{ql }(\tilde{a}_1^k) + 3 = -3k + 3. \tag{16}$$

Несколько сложнее вычисляются значения ql $\left((\tilde{a}_1^k)^{\tilde{\sigma}_2}\right)$. Нам потребуются некоторые определения. Напомним, что запись $\log_x(u)$ означает сумму показателей при порождающем x в слове u. Аналогично, через $\mathrm{tr}_y(u)$ будем обозначать сумму следов показателей при порождающем y в слове u. Если приведенное слово u имеет вид $u = u_1 x^{\alpha_i} y^{\beta_i} x^{\alpha_{i+1}} u_2$, то будем говорить, что y^{β_i} *имеет положительное окружение*, если оба показателя α_i и α_{i+1} неотрицательны и хотя бы один из них отличен от нуля. Аналогично, будем говорить, что y^{β_i} *имеет отрицательное окружение*, если α_i и α_{i+1} неположительны и хотя бы один из них отличен от нуля. В этих обозначениях справедлива

Лемма 34. *Пусть $u = y^{\beta_0} x^{\alpha_1} y^{\beta_1} \dots x^{\alpha_s} y^{\beta_s}$ — некоторое приведенное слово в F_2, где все показатели, за исключением, возможно, β_0 и β_s отличны от нуля. Тогда справедливо равенство*

$$ql\ (u^{\tilde{\sigma}_2}) = -2\log_x(u) + tr_y(u) + 3(I - J),$$

где I — количество слогов y^{β_i}, имеющих положительное окружение, и показатель $\beta_i \equiv -1$, а J — количество слогов y^{β_i}, имеющих отрицательное окружение, и показатель $\beta_i \equiv 1$.

Доказательство проведем индукцией по слоговой длине слова u, которую будем обозначать через $\partial(u)$. При $\partial(u) = 1$ утверждение очевидно.

Предположим далее, что $\partial(u) \geq 2$ и утверждение доказано для всех слов, слоговая длина которых меньше $\partial(u)$. Рассмотрим последовательность показателей α_1, …, α_s при порождающем x в слове u. Предположим вначале, что все α_i имеют один и тот же знак. Например, $\alpha_i > 0$. Тогда

$$u^{\tilde{\sigma}_2} = y^{\beta_0}(y^{-1}x^{-1})^{\alpha_1} y^{\beta_1} \dots y^{\beta_{s-1}}(y^{-1}x^{-1})^{\alpha_s} y^{\beta_s}$$

и

$$\mathrm{ql}\ (u^{\tilde{\sigma}_2}) = \sum_{j=0}^{s-1} \mathrm{ql}\ \left(y^{\beta_j}(y^{-1}x^{-1})^{\alpha_{j+1}}\right) + \mathrm{ql}\ (y^{\beta_s}).$$

Легко заметить, что для каждого слагаемого, стоящего под знаком суммы, справедливы равенства

$$\mathrm{ql}\ \left(y^{\beta_j}(y^{-1}x^{-1})^{\alpha_{j+1}}\right) = \begin{cases} \mathrm{tr}\ (\beta_j) - 2\alpha_{j+1} + 3 & \text{при}\ \ \beta_j \equiv 1, \\ \mathrm{tr}\ (\beta_j) - 2\alpha_{j+1} & \text{при}\ \ \beta_j \not\equiv 1, \end{cases}$$

из которых вытекает, что

$$\mathrm{ql}\ (u^{\tilde{\sigma}_2}) = -2\sum_{j=1}^{s} \alpha_j + \sum_{j=0}^{s} \mathrm{tr}\ \beta_j + 3I,$$

где I — число показателей β_j, входящих в слово u и сравнимых с -1 по модулю 3.

Аналогично разбирается случай отрицательных показателей и проверяется равенство

$$\mathrm{ql}\ (u^{\tilde{\sigma}_2}) = -2\sum_{j=1}^{s} \alpha_j + \sum_{j=0}^{s} \mathrm{tr}\ \beta_j - 3J,$$

где J – число показателей β_j, сравнимых с 1 по модулю 3.

Предположим теперь, что последовательность $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ меняет знак в члене α_i, т. е. $\alpha_i > 0$, а $\alpha_{i+1} < 0$. Выделим явно этот участок слова в u, т. е. $u = u_1 x^{\alpha_i} y^{\beta_i} x^{\alpha_{i+1}} u_2$. Тогда под действием автоморфизма $\tilde{\sigma}_2$ слово u перейдет в

$$u^{\tilde{\sigma}_2} = u_1^{\tilde{\sigma}_2} (y^{-1}x^{-1})^{\alpha_i} y^{\beta_i} (xy)^{-\alpha_{i+1}} u_2^{\tilde{\sigma}_2},$$

для которого

$$\mathrm{ql}\ (u^{\tilde{\sigma}_2}) = \mathrm{ql}\ (u_1^{\tilde{\sigma}_2} (y^{-1}x^{-1})^{\alpha_i}) + \mathrm{ql}\ (y^{\beta_i}) + \mathrm{ql}\ ((xy)^{-\alpha_{i+1}} u_2^{\tilde{\sigma}_2}). \tag{17}$$

Для слов $u' = u_1^{\tilde{\sigma}_2} (y^{-1}x^{-1})^{\alpha_i}$, $u'' = (xy)^{-\alpha_{i+1}} u_2^{\tilde{\sigma}_2}$ утверждение леммы справедливо по индуктивному предположению, т. е.

$$\mathrm{ql}\ (u') = -2 \log_x (u_1 x^{\alpha_i}) + \mathrm{tr}_y (u_1 x^{\alpha_i}) + 3(I_1 - J_1)$$

и

$$\mathrm{ql}\ (u'') = -2 \log_x (x^{\alpha_{i+1}} u) + \mathrm{tr}_y (x^{\alpha_{i+1}} u) + 3(I_2 - J_2).$$

Из строения слова u видим, что

$$\log_x (u) = \log_x (u_1 x^{\alpha_i}) + \log_x (x^{\alpha_{i+1}} u_2),$$

аналогично для следов:

$$\mathrm{tr}_y (u) = \mathrm{tr}_y (u_1 x^{\alpha_i}) + \mathrm{tr}_y (y^{\beta_i}) + \mathrm{tr}_y (x^{\alpha_{i+1}} u_2).$$

А так как слог y^{β_i} имеет окружение разных знаков, то и $I = I_1 + I_2$, $J = J_1 + J_2$. Из этих равенств и формулы (17) вытекает утверждение леммы для этого случая.

Предположим далее, что $\alpha_i < 0$, а $\alpha_{i+1} > 0$, тогда

$$u^{\tilde{\sigma}_2} = u_1^{\tilde{\sigma}_2} (xy)^{-\alpha_i} y^{\beta_i} (y^{-1}x^{-1})^{\alpha_{i+1}} u_2^{\tilde{\sigma}_2}$$

и для него

$$\mathrm{ql}\ (u^{\tilde{\sigma}_2}) = \mathrm{ql}\ (u_1^{\tilde{\sigma}_2}) + \mathrm{ql}\ ((xy)^{-\alpha_i} y^{\beta_i} (y^{-1}x^{-1})^{\alpha_{i+1}}) + \mathrm{ql}\ (u_2^{\tilde{\sigma}_2}). \tag{17'}$$

Слово $(xy)^{-\alpha_i} y^{\beta_i} (y^{-1}x^{-1})^{\alpha_{i+1}}$ можно переписать в виде

$$(xy)^{-\alpha_i - 1} x y^{\beta_i} x^{-1} (y^{-1}x^{-1})^{\alpha_{i+1} - 1}$$

и вычислить

$$\mathrm{ql}\ ((x^{\alpha_i} y^{\beta_i} x^{\alpha_{i+1}})^{\tilde{\sigma}_2}) = -2(\alpha_i + 1) + \mathrm{tr}\ \beta_i - 2(\alpha_{i+1} - 1) = -2(\alpha_i + \alpha_{i+1}) + \mathrm{tr}\ \beta_i.$$

Из этого равенства и формулы (17') вытекает равенство

$$\mathrm{ql}\ (u^{\tilde{\sigma}_2}) = \mathrm{ql}\ (u_1^{\tilde{\sigma}_2}) - 2(\alpha_i + \alpha_{i+1}) + \mathrm{tr}\ \beta_i + \mathrm{ql}\ (u_2^{\tilde{\sigma}_2})$$

и для завершения доказательства осталось воспользоваться предположением индукции. Лемма доказана.

Используя эту лемму, покажем, что $\mathrm{ql}\ (w^{\tilde{\sigma}_2}) = 0$. Для этого вспомним, что

$$\begin{gathered} w = (x^{-\beta} y^{-m_r} x^{-n_r} \ldots y^{-m_1} x^{\beta - n_1})(y^{-\delta} x^{-\gamma} y^{-m_r} \ldots y^{-m_1} x^{\gamma - n_1} y^{\delta}) \\ (x^{n_1 - \beta} y^{m_1} \ldots y^{m_r} x^{\beta})(y^{-\delta} x^{n_1 - \gamma} y^{m_1} \ldots y^{m_r} x^{\gamma} y^{\delta}) \end{gathered} \tag{18}$$

и значение $\mathrm{ql}\ (w^{\tilde{\sigma}_2})$ определяется значениями $I(w)$ и $J(w)$ (учесть, что w является коммутатором и поэтому $\mathrm{tr}_y(w) = 0$ и $\log_x(w) = 0$). Заметим, что если некоторый слог y^{β_i} входит в v_1 или v_2, причем $\beta_i \equiv -1$ и имеет положительное окружение (т. е. вносит 1 в $I(w)$, то в v_1^{-1} или v_2^{-1} входит $y^{-\beta_i}$, который имеет отрицательное окружение и $-\beta_i \equiv 1$ (т. е. вносит 1 в $J(w)$). Тогда, если y^{β_i} не является ни началом, ни концом слова v_1 или v_2, то этот слог не вносит никакого вклада в ql $(w^{\tilde{\sigma}_2})$. Следовательно, значение ql $(w^{\tilde{\sigma}_2})$ будет определяться конечными и начальными слогами y^{β_i}, входящими в v_1 или v_2, а в слове w — не являющимися таковыми. Таких вхождений будет четыре, что видно из формулы (18). Выпишем их вместе с окружениями:

$$x^{\beta-n_1}y^{-\delta}x^{-\gamma}, \quad x^{\gamma-n_1}y^{\delta}x^{n_1-\beta}, \quad x^{\beta}y^{-\delta}x^{n_1-\gamma}, \quad x^{\gamma}y^{\delta}.$$

Так как для первой тройки по выбору показателей $-\gamma > 0$, $\beta - n_1 < 0$, то слог $y^{-\delta}$ не вносит никакого вклада ни в $I(w)$, ни в $J(w)$. Аналогично, две следующие тройки не вносят никакого вклада, так как слоги y^{δ} и $y^{-\delta}$ имеют окружения разных знаков. А так как конец слова w имеет отрицательное окружение и $\delta \equiv -1$, то и он не вносит никакого вклада и по доказанной лемме

$$\mathrm{ql}\ (w^{\tilde{\sigma}_2}) = 0.$$

Для того чтобы вычислить

$$\mathrm{ql}\ (\tilde{a}_1^{\tilde{\sigma}_2}) = \mathrm{ql}\ (xyw^{\tilde{\sigma}_2}y^{-1}x^{-1}w^{\tilde{\sigma}_2}),$$

заметим, что

$$w^{\tilde{\sigma}_2} = (y^{-1}x^{-1})^{|\beta|}y^{-m_r}\dots(xy)^{|\gamma|}y^{\delta} = (y^{-1}x^{-1})^{|\beta|}y^{-m_r}\dots(xy)^{|\gamma|-1}xy^{\delta+1}.$$

По выбору показателей $|\gamma| - 1 \neq 0$, $\delta + 1 \neq 0$, но $\delta + 1 \equiv 0$. Следовательно, значение квазилогарифма от $w^{\tilde{\sigma}_2}$ не изменится, если мы сопряжем это слово элементом $y^{-1}x^{-1}$, т. е.

$$\mathrm{ql}\ (xyw^{\tilde{\sigma}_2}y^{-1}x^{-1}) = \mathrm{ql}\ (w^{\tilde{\sigma}_2}) = 0.$$

Учитывая, что приведенной формой элемента $xyw^{\tilde{\sigma}_2}y^{-1}x^{-1}$ является слово

$$(y^{-1}x^{-1})^{|\beta|-1}y^{-m_r}\dots xy^{\delta}x^{-1},$$

получим равенство

$$\mathrm{ql}\ (\tilde{a}_1^{\tilde{\sigma}_2}) = \mathrm{ql}\ (xyw^{\tilde{\sigma}_2}y^{-1}x^{-1}) + \mathrm{ql}\ (w^{\tilde{\sigma}_2}).$$

И для всякого натурального k

$$\mathrm{ql}\ \left((\tilde{a}_1^k)^{\tilde{\sigma}_2}\right) = 0. \tag{19}$$

Аналогичными вычислениями с помощью лемм 33 и 34 получаются следующие формулы

$$\mathrm{ql}\ \left((\tilde{a}_1^k)^{\tilde{\sigma}_2\tilde{\sigma}_1}\right) = \mathrm{ql}\ \left((\tilde{a}_1^k)^{\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2}\right) = 0 \tag{20}$$

и

$$\mathrm{ql}\ \left((\tilde{a}_1^k)^{\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2\tilde{\sigma}_1}\right) = -3 \tag{21}$$

справедливые для всех $k > 0$.

Из формул (15), (16), (19)–(21) и определения функции $\tilde{F}$ на элементах группы F_2 получаем

$$\tilde{F}(\tilde{a}_1^k) = \sum_{\lambda\in\tilde{\Lambda}_3} \mathrm{ql}\ ((\tilde{a}_1^k)^{\lambda}) = -6k.$$

Таким образом, элемент $\tilde a_1$ является растущим и если мы положим $\tilde a_k = \tilde a_1^k$, $k = 1, 2, \ldots$, то последовательность $\tilde a_1$, $\tilde a_2$, $\ldots$ является искомой, т. е. по слову v мы построили последовательность элементов $\tilde a_1$, $\tilde a_2$, $\ldots$, принадлежащих подгруппе $v(F_2)$ и для которой последовательность $|\tilde F(\tilde a_1)|$, $|\tilde F(\tilde a_2)|$, $\ldots$ неограниченно возрастает.

Построим теперь последовательность, обладающую теми же свойствами в группе кос B_n. Для этого заметим, что $(1,2,3)$–гомоморфизм, ограниченный на U_3, является изоморфизмом U_3 на F_2. В качестве искомой последовательности возьмем $a_k = \tilde a_k^{\varphi}$, $k = 1, 2, \ldots$, где гомоморфизм φ переводит x в $a_{1,3}$, а y в $a_{2,3}$. Покажем, что $F(a_k) = \tilde F(\tilde a_k)$ в группе B_3. По определению

$$F(a_k) = \sum_{\lambda \in \tilde\Lambda_3} \mathrm{ql}\ ((a_k)^{\lambda}),$$

а так как все a_k принадлежат U_3, то для них по определению квазилогарифма

$$\mathrm{ql}\ (a_k^{\lambda}) = \mathrm{ql}\ \left((a_k^{\lambda})^{(1,2,3)}\right).$$

Покажем, что для каждого представителя λ из Λ_3 найдется автоморфизм $\tilde\lambda$ из множества $\tilde\Lambda_3$, для которого справедливо равенство

$$\mathrm{ql}\ \left((a_k^{\lambda})^{(1,2,3)}\right) = \mathrm{ql}\ \left((\tilde a_k)^{\tilde\lambda}\right).$$

Из формул сопряжения (7) и (9) параграфа 1

$$a_{1,3}^{\sigma_1} = a_{1,3}a_{2,3}a_{1,3}^{-1}$$

и

$$a_{2,3}^{\sigma_1} = a_{1,3}$$

Если мы сравним эти формулы с определением автоморфизма $\tilde\sigma_1$ свободной группы F_2, то заметим, что сопряжение элемента a_k представителем σ_1 с последующим переходом к $(1,2,3)$–образу эквивалентно переходу от a_k к его $(1,2,3)$–образу (получим элемент $\tilde a_k$) с последующим действием на него автоморфизма $\tilde\sigma_1$, т. е. $(a_k^{\sigma_1})^{(1,2,3)} = \tilde a_k^{\tilde\sigma_1}$. Далее, по формулам (6) и (11) из § 1 главы 3

$$a_{1,3}^{\sigma_2} = a_{1,2}, \quad a_{2,3}^{\sigma_2} = a_{2,3}.$$

Предположим, что некоторый элемент u принадлежит коммутанту U_3' и представлен в приведенной форме $u = a_{1,3}^{\alpha_1}a_{2,3}^{\beta_1}\ldots a_{1,3}^{\alpha_s}a_{2,3}^{\beta_s}$, тогда для него сумма показателей по каждому из порождающих равна нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^{s}\alpha_i = \sum_{i=1}^{s}\beta_i = 0.$$

Сопряжем этот элемент представителем σ_2. Получим

$$u^{\sigma_2} = a_{1,2}^{\alpha_1}a_{2,3}^{\beta_1}\ldots a_{1,2}^{\alpha_s}a_{2,3}^{\beta_s},$$

т. е. все порождающие $a_{1,3}$ заменяются на $a_{1,2}$. Приведем элемент u^{σ_2} к нормальной форме. Для этого воспользуемся равенством $a_{1,2} = \Delta a_{2,3}^{-1}a_{1,3}^{-1}$, где Δ — порождающий центра группы B_3. Используя это равенство, получим

$$u^{\sigma_2} = \Delta^{\sum_{i=1}^{s}\alpha_i}(a_{2,3}^{-1}a_{1,3}^{-1})^{\alpha_1}a_{2,3}^{\beta_1}\ldots(a_{2,3}^{-1}a_{1,3}^{-1})^{\alpha_s}a_{2,3}^{\beta_s}.$$

Так как $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 0$, то мы видим, что на элементах коммутанта U_3' сопряжение представителем σ_2 индуцирует автоморфизм, определенный на порождающих следующим образом

$$a_{1,3}^{\sigma_2} \longmapsto a_{2,3}^{-1} a_{1,3}^{-1}, \quad a_{2,3}^{\sigma_2} \longmapsto a_{2,3}.$$

Сравнивая эти формулы с определением автоморфизма $\tilde{\sigma}_2$ в группе F_2, замечаем, что

$$\mathrm{ql}\ \left((a_k^{\sigma_2})^{(1,2,3)}\right) = \mathrm{ql}\ \left((\tilde{a}_k)^{\tilde{\sigma}_2}\right).$$

Следовательно, $F(a_k) = \tilde{F}(\tilde{a}_k)$ для всех натуральных k, где значение функции F на элементах a_k вычисляется в группе B_3, т. е. в этой группе последовательность a_1, a_2, $\ldots$ является искомой.

Покажем, что построенная последовательность годится не только для B_3, но и для произвольной группы B_n при $n \geq 3$. Для этого нам надо научиться вычислять значения $\mathrm{ql}\ (a_k^{\lambda})$ для всех представителей λ из множества Λ_n. Введем множество

$$M_{i+1} = \{e, \sigma_i, \sigma_i\sigma_{i-1}, \ldots, \sigma_i\sigma_{i-1}\ldots\sigma_1\},$$

являющееся подмножеством Λ_{i+1}, и для натурального j, удовлетворяющего неравенствам $0 < j < i$, назовем *j–срезом* множества M_{i+1} следующее его подмножество

$$M_{i+1,j} = \{e, \sigma_i, \sigma_i\sigma_{i-1}, \ldots, \sigma_i\sigma_{i-1}\ldots\sigma_{j+1}\}.$$

Через $\overline{M}_{i+1,j}$ будем обозначать дополнение множества $M_{i+1,j}$ до множества M_{i+1}. В этих обозначениях справедлива

Лемма 35. а) *Всякий представитель m из $M_{i+1,j}$ оставляет каждый порождающий группы U_j неподвижным, т. е. $a_{k,j}^m = a_{k,j}$.* б) *Каждый представитель m из дополнения $\overline{M}_{i+1,j}$ переводит всякий элемент из U_j в группу U_{j+1}.*

Доказательство. Утверждение а) непосредственно следует из формулы (5) параграфа 1. Пусть далее $m = \sigma_i\sigma_{i-1}\ \ldots\ \sigma_{j+1}\sigma_j\ \ldots\ \sigma_s$ для некоторого $s \leq j$. Тогда по пункту а) $a_{k,j}^m = a_{k,j}^{\sigma_j\ldots\sigma_s}$. Из формулы (13) параграфа 1,

$$a_{k,j}^{\sigma_j} = a_{j,j+1}^{-1} a_{k,j+1} a_{j,j+1},$$

т. е. σ_j переводит порождающий $a_{k,j}$ в группу U_{j+1}. В то время как все элементы σ_{j-1}, σ_{j-2}, $\ldots$, σ_s, оставляют порождающие группы U_{j+1} в группе U_{j+1}, что непосредственно следует из формул (6), (7), (9) (см. § 1). Отсюда и следует б). Лемма доказана.

Множество Λ_n образует шрайерову систему представителей группы B_n по подгруппе P_n, т. е. каждое начальное подслово любого слова из Λ_n также лежит в Λ_n. Кроме того, система представителей Λ_n содержит все представители из Λ_{n-1}. Обозначим через N_n такое подмножество Λ_n, что никакое неединичное начальное подслово никакого слова из N_n не лежит в множестве Λ_3, т. е.

$$N_n = \{\sum_{k=4}^{n} m_{k,l} \mid 1 \leq l \leq k\}.$$

Из этого определения следует, что всякий представитель α, принадлежащий Λ_n, можно представить в виде произведения $\alpha = \alpha_0\alpha_1$, где $\alpha_0 \in \Lambda_3$, $\alpha_1 \in N_n$. Покажем, что если u принадлежит коммутанту U_3', то чтобы вычислить значение ql (u^α) достаточно знать соответствующий представитель α_0 из Λ_3 и номер группы U_j, в которую попадает элемент u^α. Более точно, справедлива

Лемма 36. *Пусть u — некоторый элемент из коммутанта U_3' и m — представитель группы B_n по P_n, лежащий в N_n. Тогда найдутся такие числа k, l, j, $1 \le k < l < j \le n$, что (k, l, j)–образ элемента u^m совпадает с $(1, 2, 3)$–образом u, а любой другой образ, отличный от (k, l, j)–образа, равен единице.*

Доказательство проведем индукцией по n. Для $n = 3$ утверждение очевидно. Рассмотрим случай $n = 4$. В этом случае

$$N_4 = \{e, \sigma_3, \sigma_3\sigma_2, \sigma_3\sigma_2\sigma_1\}.$$

Проверим утверждение для $m = \sigma_3\sigma_2$ (для других проверяется аналогично). Из формул сопряжения § 1

$$a_{1,3}^{\sigma_3\sigma_2} = a_{2,4}^{-1}a_{1,4}a_{2,4}, \quad a_{2,3}^{\sigma_3\sigma_2} = a_{3,4},$$

т. е. сопряжение представителем $\sigma_3\sigma_2$ и последующее взятие $(1, 3, 4)$–образа индуцирует изоморфизм $U_3' \longrightarrow F_2'$, а так как u лежит в коммутанте U_3', то из этих формул вытекает, что любой другой образ элемента $u^{\sigma_3\sigma_2}$ обращается в единицу.

Предположим, что утверждение доказано для всех представителей из множества N_{n-1} и рассмотрим представитель m, лежащий в N_n и не лежащий в N_{n-1}. Тогда его можно представить в виде

$$m = m'(\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\ldots\sigma_i), \quad m' \in N_{n-1}, \quad 1 \le i \le n-1.$$

По индуктивному предположению элементы $a_{1,3}^{m'}$ и $a_{2,3}^{m'}$ равны $a_{c,p}^v$ и $a_{d,p}^w$ соответственно, $c < d$, причем $a_{c,p}$ и $a_{d,p}$ — порождающие группы U_p, а v и w лежат в этой группе, но в своей записи не содержат порождающих $a_{c,p}$ и $a_{d,p}$, т. е. (c, d, p)–образы элементов $a_{c,p}^v$ и $a_{d,p}^w$ равны x и y соответственно. Любой другой образ элемента $u^{m'}$, отличный от (c, d, p)–образа, переводит его в единицу.

Чтобы найти элементы $a_{1,3}^m$ и $a_{2,3}^m$, мы должны вычислить $(a_{c,p}^v)^{m''}$ и $(a_{d,p}^w)^{m''}$, где $m'' = \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\ldots\sigma_i$. В зависимости от вида m'' возможны два случая: $i > p$ и $i \le p$. В первом случае из леммы 35 a) следуют равенства

$$(a_{c,p}^v)^{m''} = a_{c,p}^v = a_{1,3}^{m'}, \quad (a_{d,p}^w)^{m''} = a_{d,p}^w = a_{2,3}^{m'},$$

и утверждение леммы вытекает из предположения индукции (в качестве искомого (k, l, j)–образа возьмем (c, d, p)–образ. Во втором случае положим

$$m'' = \sigma_{n-1}\ldots\sigma_{p+1}\sigma_p\ldots\sigma_i$$

и опять из леммы 35 a)

$$(a_{c,p}^v)^{m''} = (a_{c,p}^v)^{\sigma_p\sigma_{p-1}\ldots\sigma_i}, \quad (a_{d,p}^w)^{m''} = (a_{d,p}^w)^{\sigma_p\sigma_{p-1}\ldots\sigma_i}.$$

Далее, по формуле (13) из параграфа 1

$$(a_{c,p}^v)^{\sigma_p} = (a_{c,p+1}^{v_1})^{a_{p,p+1}}, \quad (a_{d,p}^w)^{\sigma_p} = (a_{d,p+1}^{w_1})^{a_{p,p+1}},$$

где слова v_1, w_1 получаются из слов v, w заменой всех порождающих $a_{q,p}$ порождающими $a_{q,p+1}$. Причем опять v_1 и w_1 не содержат порождающих $a_{c,p+1}$ и $a_{d,p+1}$.

Пусть теперь σ_j — некоторый представитель из множества $\{\sigma_{p-1}, \sigma_{p-2}, \dots, \sigma_i\}$. Тогда его действие на порождающих группы U_{p+1} определяется формулами

$$a_{q,p+1}^{\sigma_j} = \begin{cases} a_{q,p+1} & \text{при} \quad q \neq j-1, j, \\ a_{j,p+1}a_{j+1,p+1}a_{j,p+1}^{-1} & \text{при} \quad q = j, \\ a_{j,p+1} & \text{при} \quad q = j+1. \end{cases}$$

Найдем образы элементов $a_{c,p+1}^{v_1 a_{p,p+1}}$, $a_{d,p+1}^{w_1 a_{p,p+1}}$ при сопряжении элементом $m_1 = \sigma_{p-1}\sigma_{p-2}\dots\sigma_i$. В зависимости от длины этого слова рассмотрим три случая:

1) $i \geq d+1$. Тогда $a_{c,p+1}^{m_1} = a_{c,p+1}$, $a_{d,p+1}^{m_1} = a_{d,p+1}$ и из приведенных формул сопряжения замечаем, что $(v_1 a_{p,p+1})^{m_1}$ и $(w_1 a_{p,p+1})^{m_1}$ не содержат порождающих $a_{c,p+1}$, $a_{d,p+1}$. Следовательно, утверждение леммы справедливо, если в качестве (k, l, j)–образа рассмотреть $(c, d, p+1)$–образ.

2) $d+1 > i \geq c+1$. Тогда

$$a_{c,p+1}^{m_1} = a_{c,p+1}, \quad a_{d,p+1}^{m_1} = a_{d,p+1}a_{d+1,p+1}a_{d,p+1}^{-1}.$$

Опять слова $(v_1 a_{p,p+1})^{m_1}$ и $(w_1 a_{p,p+1})^{m_1}$ не содержат порождающих $a_{c,p+1}$ и $a_{d+1,p+1}$ и в качестве (k, l, j)–образа достаточно взять $(c, d+1, p+1)$–образ.

3) Аналогично рассматривается последний случай: $c+1 > i$. В этом случае

$$a_{c,p+1}^{m_1} = a_{c,p+1}a_{c+1,p+1}a_{c,p+1}^{-1}, \quad a_{d,p+1}^{m_1} = a_{d,p+1}a_{d+1,p+1}a_{d,p+1}^{-1}$$

и $(c+1, d+1, p+1)$–образы слов $a_{c,p+1}^{m_1}$ и $a_{d,p+1}^{m_1}$ равны x и y соответственно, а $(c+1, d+1, p+1)$–образы слов $(v_1 a_{p,p+1})^{m_1}$ и $(w_1 a_{p,p+1})^{m_1}$ равны единице. Следовательно, в этом случае, искомым (k, l, j)–образом является $(c+1, d+1, p+1)$–образ. Лемма доказана.

Из этой леммы вытекает, что если $u \in U_3'$, $m \in N_n$, то

$$\mathrm{ql}(u^m) = \frac{2}{(j-1)(j-2)} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k<l}}^{j-1} \mathrm{ql}\left((u^m)^{(k,l,j)}\right) = \frac{2}{(j-1)(j-2)}\mathrm{ql}\left((u^m)^{(k_0,l_0,j)}\right) =$$

$$= \frac{2}{(j-1)(j-2)}\mathrm{ql}\left((u)^{(1,2,3)}\right),$$

где j — номер группы U_j, в которую попадает элемент u^m, а (k_0, l_0, j) — тот образ элемента u^m, который не обращается в единицу.

Теперь мы хотим научиться находить значения функции на элементах u из коммутанта U_3' в группе B_n, зная значение $F(u)$ в группе B_n.

Лемма 37. *Пусть $u \in U_3'$ и известно, что в группе B_3 значение функции $F(u) = q$. Тогда в группе B_n при любом $n \geq 3$ значение $F(u)$ также равно q.*

Доказательство. По определению функции F в группе B_n

$$F(u) = \frac{1}{(n-3)!} \sum_{\lambda \in \Lambda_n} \mathrm{ql}(u^\lambda).$$

Представим каждый представитель $\lambda \in \Lambda_n$ в виде $\lambda = \lambda_0\lambda_1$, где $\lambda_0 \in \Lambda_3$, $\lambda_1 \in N_n$. Как было замечено после леммы 36, справедливо равенство

$$\mathrm{ql}(u^\lambda) = \frac{2}{(j-1)(j-2)} \mathrm{ql}\ (u^{\lambda_0}),$$

где j зависит от того, в какую группу U_j попадает элемент u^λ. Следовательно,

$$F(u) = \frac{1}{(n-3)!} \sum_{\lambda \in \Lambda_n} \frac{2}{(j-1)(j-2)} \mathrm{ql}\ (u^{\lambda_0}), \tag{22}$$

где значение u^{λ_0} вычисляется уже в группе P_3, и нам остается найти число представителей λ из Λ_n, переводящих элемент u в каждую из групп U_j, $j = 3, 4, \ldots, n$.

Введем вектор $\Pi_n = ({}_3, {}_4, \ldots, {}_n)$, где каждая компонента c_i равна числу представителей из множества Λ_n, переводящих элемент u в группу U_i. Как было показано ранее: $\Pi_3 = (6)$, т. е. все представители из Λ_3 переводят u в группу U_3. Далее, при $n = 4$ всякий представитель $\alpha \in \Lambda_4$ имеет вид $\alpha = \alpha_0\alpha_1$, где $\alpha_0 \in \Lambda_3$, $\alpha_1 \in M_4$ (в данном случае множества N_4 и M_4 совпадают). По определению, 3–срез множества M_4 состоит из единичного элемента, а дополнение к нему

$$\overline{M}_{4,3} = \{\sigma_3, \sigma_3\sigma_2, \sigma_3\sigma_2\sigma_1\}.$$

Следовательно, по лемме 35 элемент u^α лежит в группе U_3, если $\alpha_1 = e$, и u^α попадает в U_4, если α_1 принадлежит $\overline{M}_{4,3}$. Поэтому 6 представителей из Λ_4 переводят u в группу U_3, а $6 \cdot 3$ — в группу U_4, т. е. $\Pi_4 = (6, 18)$.

Предположим, что в группе B_{n-1} вектор

$$\Pi_{n-1} = (c'_3, c'_4, \ldots, c'_{n-1})$$

уже найден. Каждый представитель α из Λ_n имеет вид $\alpha = \alpha_0\alpha_1$, где $\alpha_0 \in \Lambda_{n-1}$, $\alpha_1 \in M_n$. Чтобы найти число представителей, переводящих u в U_3, представим множество M_n в виде объединения 3–среза и дополнения к нему:

$$M_{n,3} = \{e, \sigma_{n-1}, \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}, \ldots, \sigma_{n-1}\ldots\sigma_4\},$$
$$\overline{M}_{n,3} = \{\sigma_{n-1}\ldots\sigma_3, \sigma_{n-1}\ldots\sigma_2, \sigma_{n-1}\ldots\sigma_1\}.$$

Опять из леммы 35 вытекает, что $u^{\alpha_0\alpha_1}$ принадлежит группе U_3, если α_1 принадлежит 3–срезу $M_{n,3}$ и α_0 переводит u в группу U_3, и принадлежит U_4, если $\alpha_1 \in \overline{M}_{n,3}$, а α_0 переводит u в U_3. Так как мощность $|M_{n,3}| = n-3$, а $|\overline{M}_{n,3}| = 3$, то $c_3 = c'_3(n-3)$ представителя из Λ_n переводят u в U_3, а $3c'_3$ представителя α переводят u из группы U_3 в U_4. Кроме того, в U_4 останутся еще $c'_4(n-4)$ элемента, попавшие туда после сопряжения представителями из Λ_{n-1} (воспользоваться предположением индукции и представлением множества M_n в виде объединения 4–среза и дополнения к нему). Следовательно, в группу U_4 будут переводить элемент u ровно $c_4 = 3c'_3(n-4)c'_4$ представителя из Λ_n, и т. д. И, наконец, учитывая, что мощность $n-1$–среза множества M_n равна единице, а дополнение к нему в M_n имеет мощность $n-1$, заметим, что в U_n из группы U_{n-1} будут переходить элементы под действием $c'_{n-1}(n-1)$ представителей. Таким образом, мы получим рекуррентные соотношения

$$\Pi_3 = (6),$$

$$\Pi_n = ((n-3)c'_3, 3c'_3+(n-4)c'_4, 4c'_4+(n-5)c'_5, \ldots, (n-2)c'_{n-2}+c'_{n-1}, (n-1)c'_{n-1}), \quad n > 3,$$

где c'_i — компоненты вектора $\Pi_{n-1} = (c'_3, c'_4, \ldots, c'_{n-1})$. Из этих соотношений нетрудно вывести формулу

$$\Pi_n = (a, 3a, 2\cdot 3a, \ldots, \frac{1}{2}(i-1)(i-2)a, \ldots, \frac{1}{2}(n-1)(n-2)a), \quad a = 6(n-3)!.$$

Ввиду этой формулы, из (22) получим

$$F(u) = \frac{1}{(n-3)!}\sum_{j=3}^{n}\left(\frac{c_j}{6}\frac{2}{(j-1)(j-2)}\sum_{\lambda\in\Lambda_3}\mathrm{ql}(u^\lambda)\right),$$

где c_j — j–я компонента вектора Π_n. Так как в группе B_3 по предположению

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_3}\mathrm{ql}(u^\lambda) = q,$$

то окончательно

$$F(u) = \frac{q}{(n-3)!}\sum_{j=3}^{n}\left(\frac{6(n-3)!(j-1)(j-2)}{6\cdot 2}\frac{2}{(j-1)(j-2)}\right) = q.$$

Лемма доказана.

Из этой леммы непосредственно следует, что построенная в группе B_3 последовательность a_1, a_2, $\ldots$ является искомой и для B_n при любом $n \geq 3$. Таким образом, лемма 31 доказана.

Суммируя утверждения лемм 4, 17 и 31, получаем основное утверждение первой части нашей работы.

Теорема 1. *Пусть V — множество теоретико–групповых слов. Если определяемая им вербальная подгруппа $V(B_n)$ группы кос B_n, $n \geq 3$, является несобственной, то ширина подгруппы $V(B_n)$ относительно V конечна. Если же $V(B_n)$ — собственная вербальная подгруппа и множество V конечно, то $V(B_n)$ относительно V имеет бесконечную ширину.*

§ 5. Группа крашеных кос

Напомним, что всякий элемент u из группы крашеных кос P_n имеет единственную нормальную форму

$$u = u_2u_3\ldots u_n, \quad u_i \in U_i,$$

где U_i — свободная группа степени свободы $i-1$. Далее, из определяющих соотношений группы P_n (см. соотношения (1)–(4) из параграфа 1) видно, что при сопряжении порождающих группы U_i, $i = 3, 4, \ldots, n$, элементами из P_{i-1} они остаются неподвижными по модулю коммутанта U'_i.

Также нам потребуется хорошо известный факт об аппроксимируемости свободной группы свободными нильпотентными группами. Это утверждение легко выводится из теоремы Магнуса [12, с. 136], которая утверждает, что во всякой свободной группе F ее ω–й централ равен единице.

Перейдем теперь к формулировке и доказательству результатов, относящихся к группе крашеных кос. Справедлива

Теорема 2. *Извлечение корней в группе крашеных кос однозначно.*

Доказательство. Пусть, напротив, для некоторых различных элементов u, v из P_n и некоторого натурального m справедливо равенство

$$u^m = v^m. \tag{1}$$

Пусть

$$u = u_2 u_3 \dots u_n, \quad v = v_2 v_3 \dots v_n, \quad u_i, v_i \in U_i$$

— нормальные формы элементов u и v соответственно. Найдем наименьший номер k, для которого компонента u_k отлична от соответствующей компоненты v_k. Ввиду существования гомоморфизма группы P_n на P_k мы будем считать, что $u = wu_n$, $v = wv_n$, где $w \in P_{n-1}$, $u_n \neq v_n$. Если $n = 2$, то P_n — бесконечная циклическая группа, в которой извлечение корней однозначно. Поэтому мы будем считать, что $n > 2$. Найдем нормальные формы элементов u^m и v^m:

$$u^m = w^m \left(u_n^{w^{m-1}} u_n^{w^{m-2}} \dots u_n^w u_n \right), \quad v^m = w^m \left(v_n^{w^{m-1}} v_n^{w^{m-2}} \dots v_n^w v_n \right),$$

где выражения, стоящие в скобках, лежат в U_n ввиду того, что U_n нормальна в P_n. Из единственности нормальной формы и равенства (1) имеем

$$u_n^{w^{m-1}} u_n^{w^{m-2}} \dots u_n^w u_n = v_n^{w^{m-1}} v_n^{w^{m-2}} \dots v_n^w v_n. \tag{2}$$

Воспользовавшись тем, что свободная группа аппроксимируется свободными нильпотентными группами, найдем наименьший номер j, для которого образы элементов u_n и v_n в фактор–группе U_n/Γ_{j+1} различны. Тогда u_n и v_n представимы в виде

$$u_n = c a_1^{\alpha_1} \dots a_l^{\alpha_l} u_n', \quad v_n = c a_1^{\beta_1} \dots a_l^{\beta_l} v_n',$$

где c — произведение базисных коммутаторов веса $< j$, a_i — базисные коммутаторы веса j, α_i, β_i — целые числа и

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \neq (\beta_1, \dots, \beta_l), \quad u_n', v_n' \in \Gamma_{j+1}.$$

Рассмотрим, как изменяются элементы u_n и v_n при сопряжении элементом w^i, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Легко заметить, что

$$u_n^{w^i} = c' \left(a_1^{\alpha_1} \dots a_l^{\alpha_l} a \right) u_n'', \quad v_n^{w^i} = c' \left(a_1^{\beta_1} \dots a_l^{\beta_l} a \right) v_n'',$$

где c' — произведение базисных коммутаторов, веса которых меньше j, a — произведение базисных коммутаторов, веса j, которые возникают при вычислении c^w; u_n'', $v_n'' \in \Gamma_{j+1}$. Далее, воспользовавшись тем, что по модулю $(j+1)$–го централа коммутаторы веса j и веса $\leq j$ перестановочны, из равенства (2) получаем

$$c'' \left(a_1^{\alpha_1 m} \dots a_l^{\alpha_l m} a' \right) = c'' \left(a_1^{\beta_1 m} \dots a_l^{\beta_l m} a' \right)$$

по модулю Γ_{j+1}, где опять c'' — произведение базисных коммутаторов, веса которых меньше j, a' – произведение базисных коммутаторов веса j. Отсюда

$$\alpha_i = \beta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, l,$$

т. е. образы элементов u_n и v_n в фактор–группе U_n/Γ_{j+1} совпадают, что противоречит нашему предположению. Таким образом, теорема доказана.

Следствие. *В группе крашеных кос P_n только единичная коса сопряжена со своей обратной.*

Первоначально автор доказал следствие рассуждениями, аналогичными доказательству теоремы 2, но как указал рецензент, его можно и прямо вывести из теоремы 2. Действительно, группа P_2 изоморфна бесконечной циклической группе, для которой утверждение очевидно. Пусть $n \geq 3$ и для некоторых элементов x, y группы P_n справедливо равенство $y^{-1}xy = x^{-1}$. Тогда $(xy)^2 = y^2$ и, ввиду теоремы 2, $xy = y$. Следовательно, $x = 1$.

Заметим, что во всей группе кос B_n утверждение следствия неверно. Действительно, пусть $u = \sigma_2^{-1}\sigma_1$, $v = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$. Тогда из соотношения группы B_3 легко следует равенство $v^{-1}uv = u^{-1}$.

Ясно, что в группе кос B_n утверждение теоремы 2 тем более не может быть верным. Нетрудно указать и конкретные примеры. Пусть $u = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$, $v = \sigma_2\sigma_1\sigma_3$ — элементы группы B_4. Можно проверить, что они различны и не лежат в P_4. В то же время

$$u^4 = v^4 = a_{1,2}a_{1,3}a_{2,3}a_{1,4}a_{2,4}a_{3,4}.$$

С другой стороны, легко заметить, что u и v сопряжены в B_4. Поэтому представляется вероятным, что положительное решение имеет и другая проблема Г. С. Маканина [2, проблема, 10.23]: “Верно ли, что извлечение корней в группе кос однозначно с точностью до сопряжения ?”

Список литературы

[1] Бардаков В. Г. О вербальных подгруппах групп кос, 9–й Всесоюзн. симп. по теории групп, УРО АН СССР, 1989, с. 10.

[2] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп, 15-е изд., Новосибирск, Ин–т матем. СО РАН, 2002.

[3] Семенов Ю. С. О коммутаторах в группах кос. 10–й Всесоюзн. симп. по теории групп. Минск, 1986, С. 207.

[4] Репин Н. Н. О коммутаторных уравнениях в группах B_3 и B_4. Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула, 1986, 114–117.

[5] Дурнев В. Г. О ширине коммутанта групп кос B_3 и B_4, Деп. в ВИНИТИ, 1987, № 4040-В87.

[6] Дурнев В. Г., Шалашов В. К. О ширине коммутанта групп кос B_3 и B_4, 19–я Всесоюзн. алгебр. конф. Львов, 1987, С. 89.

[7] Rhemtulla A. H. A problem of bounded expressibility in free products, Proc. Cambridge Phil. Soc., 64, № 3 (1969), 573–584.

[8] Дурнев В. Г. О фактор–группах кос B_n, Деп. в ВИНИТИ, 1987, № 6760-В87.

[9] Марков А. А. Основы алгебраической теории кос, Тр. МИАН, 16, (1945), 1–54.

[10] J. S. Birman, Braids, links and mapping class group, Princeton–Tokyo: Univ. press, 1974.
[11] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, Основы теории групп, 4–е изд., М.: Наука, 1996.
[12] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп, М., Наука, 1974.
[13] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп, М.: Мир, 1980.