УДК 512.54

ПОСТРОЕНИЕ РЕГУЛЯРНО ИСЧЕРПЫВАЮЩЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В ГРУППАХ СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РОСТА [1]

В. Г. Бардаков

В теории двумерных римановых многообразий хорошо известно понятие регулярно исчерпываемого многообразия (см., например [1, гл. 10, § 2]). Введем аналогичное понятие для групп. Пусть группа G порождается конечным множеством $A = \{a_1^{\pm 1}, \ldots, a_m^{\pm 1}\}$. Последовательность конечных подмножеств L_k, $k = 1, 2, \ldots$, из G назовем *регулярно исчерпывающей*, если она удовлетворяет следующим условиям

1) $L_k \subset L_{k+1}$ для всех $k \geq 1$;

2) $G = \bigcup\limits_{k \geq 1} L_k$;

3) $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{|\partial L_k|}{|L_k|} = 0$, где $\partial L_k = \{g \in G \setminus L_k \mid$ существует $a \in A$ такой, что $ga \in L_k\}$ — граница множества L_k.

Группу, обладающую регулярно исчерпывающей последовательностью, назовем *регулярно исчерпываемой*. Класс регулярно исчерпываемых групп обозначим символом RG. Если регулярно исчерпывающая последовательность $\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет следующему условию:

4) существуют константы $c \geq 0$ и $d \geq 1$ такие, что $|L_k| \leq ck^d$ для всех чисел $k \geq 1$,

то будем называть ее *регулярно исчерпывающей последовательностью полиномиального роста*. Класс групп, обладающих регулярно исчерпывающей последовательностью полиномиального роста, обозначим символом RPG.

Напомним определение и некоторые свойства аменабельных групп (см. [2, гл. 1, § 1; 3, гл. 3, § 7]). Пусть $L_\infty(G)$ — пространство всех ограниченных вещественнозначных функций на группе G с нормой $||f|| = \sup_{g \in G}|f(g)|$. Линейный функционал μ на $L_\infty(G)$ называется *левоинвариантным средним*, если $\mu(f(hg)) = \mu(f(g))$ для всех $h \in G$, $f \in L_\infty(G)$, и $f \geq 0$ влечет $\mu(f) \geq 0$, а $\mu(\mathbf{1}_G) = 1$, где $\mathbf{1}_G$ — функция, принимающая значение 1 на любом элементе из G. Дискретная группа G называется *аменабельной*, если на ней существует хотя бы одно левоинвариантное среднее. Класс аменабельных групп обозначают AG.

Е. Фелнер [4] установил, что группа G аменабельна тогда и только тогда, когда существует последовательность F_k, $k = 1, 2, \ldots$, конечных подмножеств из G удовлетворяющая условиям:

а) $F_k \subset F_{k+1}$ для всех $k \geq 1$;

б) $G = \bigcup\limits_{k \geq 1} F_k$;

в) $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{|gF_k \triangle F_k|}{|F_k|} = 0$ для всякого g из G, где $X \triangle Y = (X \setminus Y) \bigcup (Y \setminus X)$ — симметрическая разность множеств X и Y.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №98–01–00699).

Последовательность $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условиям а)–в), называют *фелнеровской* последовательностью.

Как установлено в [5, теорема 3.39] классы AG и RG совпадают.

Для группы G, порожденной конечным множеством $A = \{a_1^{\pm 1}, \dots, a_m^{\pm 1}\}$, символом $l(g)$ будем обозначать длину элемента g относительно системы порождающих A, т. е. длину n его кратчайшего представления

$$g = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}, \quad a_{i_j} \in A.$$

Определим на G левоинвариантную метрику $\rho(g,h)$, $g, h \in G$, по формуле $\rho(g,h) = l(g^{-1}h)$. Тогда (G, ρ) превращается в метрическое пространство. Пусть

$$B_r = \{g \in G \mid l(g) \le r\}$$

— шар радиуса r с центром в единичном элементе,

$$S_r = \{g \in G \mid l(g) = r\}$$

— сфера радиуса r с центром в единичном элементе.

Функция роста группы G относительно системы порождающих A определяется равенством

$$\gamma(r) = \gamma_{G,A}(r) = |B_r|.$$

На множестве функций роста вводится отношение эквивалентности: $\gamma_1(r) \sim \gamma_2(r)$, если найдется натуральное число C такое, что $\gamma_1(r) \le \gamma_2(Cr)$, $\gamma_2(r) \le \gamma_1(Cr)$, $r = 1, 2, \dots$. Класс эквивалентности $[\gamma(r)]$ функции $\gamma(r)$ уже не зависит от выбора системы порождающих и называется *степенью роста* группы G. Если $\gamma(r) \sim 2^r$, то G называется *группой экспоненциального роста*; если $\gamma(r) \sim r^d$ для некоторого натурального d, то G называется *группой полиномиального роста*. Класс групп полиномиального роста обозначается PG. Если функция роста группы G не эквивалентна никакой показательной функции, то G называется *группой субэкспоненциального роста*. Класс групп субэкспоненциального роста обозначается SG. Если функция роста группы G не эквивалентна никакой показательной функции и не эквивалентна никакой степенной функции, то G называется *группой промежуточного роста*.

Основным результатом настоящей работы является:

Теорема. *Справедливо включение*: SG$\subseteq$RPG, *т. е. во всякой группе субэкспоненциального роста существует регулярно исчерпывающая последовательность полиномиального роста.*

В качестве следствия этой теоремы получается отрицательный ответ на вопрос 14.27 из "Коуровской тетради" [6]. В наших обозначениях этот вопрос можно сформулировать следующим образом: "Справедливо ли включение RPG$\subseteq$PG?" Используя результаты Р. И. Григорчука [7], построившего примеры групп промежуточного роста, установим

Следствие. *Существует континуум неизоморфных двупорожденных групп, обладающих регулярно исчерпывающей последовательностью полиномиального роста и не являющихся группами полиномиального роста.*

Доказательство следствия. Пусть Ω — пространство бесконечных последовательностей $\omega = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n \dots$ элементов множества $\{0, 1, 2\}$. Выделим в пространстве Ω три подмножества Ω_0, Ω_1, Ω_2, где Ω_0 — множество последовательностей, в которые каждый из символов 0, 1, 2 входит бесконечное число раз; Ω_2 — множество последовательностей, постоянных начиная с некоторого места; $\Omega_1 = \Omega \setminus (\Omega_0 \bigcup \Omega_2)$. В работе [7] для каждого $\omega \in \Omega$ построена двупорожденная группа G_ω, являющаяся группой преобразований отрезка [0,1] с удаленными двоично рациональными точками. Если при этом $\omega \in \Omega_0 \bigcup \Omega_1$, то группа G_ω имеет промежуточный рост. Более того, для всякого $\omega^{(0)} \in \Omega$ существует не более счетного числа групп G_ω, $\omega \in \Omega$, изоморфных группе $G_{\omega^{(0)}}$. Ввиду основной теоремы всякая группа G_ω при $\omega \in \Omega_0 \bigcup \Omega_1$ лежит в классе RPG. Следствие доказано.

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма, которая по–видимому известна, но для полноты изложения дадим ее доказательство.

Лемма. *Пусть G — группа субэкспоненциального роста (т. е. $G \in \mathrm{SG}$), $B_n = \{g \in G \mid l(g) \leq n\}$, $n \in \mathbf{N}$, — последовательность шаров радиуса n с центром в единичном элементе. Тогда найдется такая подпоследовательность B_{n_k}, $n_k \in \mathbf{N}$, $n_1 < n_2 < \ldots$, для которой справедливы равенства*

а) $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|\partial B_{n_k}|}{|B_{n_k}|} = 0$,

б) $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|B_{n_{(k+1)}+1}|}{|B_{n_k}|} = 1$.

Доказательство. Пусть G порождается конечным множеством $A = \{a_1^{\pm 1}, \ldots, a_m^{\pm 1}\}$. Покажем, что для всякого натурального n справедливо включение

$$\partial B_n \subseteq \bigcup_{a\in A} (aB_n \setminus B_n).$$

Для этого заметим, что границу ∂B_n можно представить в таком виде:

$$\partial B_n = \{ga \in G \setminus B_n \mid g \in B_n, a \in A\},$$

т. е., если $ga \in \partial B_n$, то $l(ga) = n+1$, $l(g) = n$. Следовательно, $ga = a_{i_1} \ldots a_{i_n} a$, $a_{i_j} \in A$. Рассматривая элемент $g_1 = a_{i_2} \ldots a_{i_n} a$ видим, что его длина равна n, а потому $ga = a_{i_1} g_1 \in (a_{i_1} B_n \setminus B_n)$, и требуемое включение установлено.

Из этого включения следует неравенство

$$|\partial B_n| \leq \sum_{a\in A} |aB_n \setminus B_n|,$$

справедливое для всякого натурального n. Так как $aB_n \triangle B_n = (aB_n \setminus B_n) \bigcup (B_n \setminus aB_n)$, то $|aB_n \setminus B_n| \leq |aB_n \triangle B_n|$ для всякого $a \in A$. Следовательно,

$$|\partial B_n| \leq \sum_{a\in A} |aB_n \triangle B_n|.$$

Так как группа G имеет субэкспоненциальный рост, то она аменабельна [8], и из последовательности шаров $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выбрать фелнеровскую подпоследовательность $\{B_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ (см. [9]). Тогда из полученного выше неравенства имеем

$$0 \leq \frac{|\partial B_{n_k}|}{|B_{n_k}|} \leq \sum_{a\in A} \frac{|aB_{n_k} \triangle B_{n_k}|}{|B_{n_k}|}.$$

Переходя к пределу при $k \longrightarrow \infty$, из пункта в) определения фелнеровской последовательности, получаем равенство а).

Для доказательства пункта б) заметим, что так как группа G имеет субэкспоненциальный рост, то

$$\lim_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|B_n|} = 1$$

(см. [10]). Тогда для построенной в пункте а) подпоследовательности справедливо неравенство

$$\lim_{k\to\infty}\sup \sqrt[n_k]{|B_{n_k}|} \leq \lim_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|B_n|} = 1.$$

С другой стороны, в теории рядов известно следующее неравенство

$$\lim_{k\to\infty}\inf \frac{|B_{n_{(k+1)}}|}{|B_{n_k}|} \leq \lim_{k\to\infty}\sup \sqrt[n_k]{|B_{n_k}|}.$$

Так как для всех $k \geq 1$ отношение $\dfrac{|B_{n_{(k+1)}}|}{|B_{n_k}|} \geq 1$, то, выбирая, если надо, подпоследовательность, мы можем считать, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|B_{n_{(k+1)}}|}{|B_{n_k}|} = 1.$$

Из доказанного выше пункта а) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|B_{n_{(k+1)}+1}|}{|B_{n_{(k+1)}}|} = 1$, а тогда

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|B_{n_{(k+1)}+1}|}{|B_{n_k}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|B_{n_{(k+1)}+1}|}{|B_{n_{(k+1)}}|}\frac{|B_{n_{(k+1)}}|}{|B_{n_k}|} = 1$$

и требуемое равенство установлено.

Доказательство теоремы. Пусть $G = \text{гр}(a_1^{\pm1}, \ldots, a_m^{\pm1})$ — группа субэкспоненциального роста. Тогда в ней можно выбрать последовательность шаров $\{B_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ являющуюся фелнеровской последовательностью. Более того ввиду доказанной леммы эта последовательность является регулярно исчерпывающей для группы G.

Покажем, что уплотняя эту последовательность, можно построить последовательность $\{L_l\}_{l=1}^{\infty}$ которая по–прежнему будет регулярно исчерпывающей для группы G и будет иметь полиномиальный рост.

Положим $L_1 = B_{n_1}$. Если далее $|B_{n_2}| - |B_{n_1}| \leq m$, то положим $L_2 = B_{n_2}$. Если же $|B_{n_2}| - |B_{n_1}| > m$, то в множестве $B_{n_2} \setminus B_{n_1}$ выберем m различных элементов $b_1, b_2, \ldots, b_m$ и в качестве L_2 возьмем множество $L_2 = L_1 \bigcup \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$. Далее, если $|B_{n_2}| - |L_2| \leq m$, то положим $L_3 = B_{n_2}$. В противном случае в множестве $B_{n_2} \setminus L_2$ выберем m различных элементов $b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots, b_{2m}$ и положим $L_3 = L_2 \bigcup \{b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots, b_{2m}\}$. Продолжая этот процесс, построим последовательность $B_{n_1} = L_1 \subseteq L_2 \subseteq \ldots \subseteq L_{l_1} = B_{n_2}$. Рассмотрим разность $|B_{n_3}| - |B_{n_2}|$. Если она не превосходит m, то положим $L_{l_1+1} = B_{n_3}$. В противном случае, в качестве L_{l_1+1} возьмем множество, являющееся объединением L_{l_1} и m различных элементов из $B_{n_3} \setminus L_{l_1}$. Продолжая в том же духе, построим последовательность $\{L_l\}_{l=1}^{\infty}$, содержащую подпоследовательность $\{B_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ и такую, что $|L_l| \leq |B_{n_1}| + m(l-1)$. Следовательно, построенная последовательность имеет полиномиальный рост.

Покажем, что $\{L_l\}_{l=1}^{\infty}$ является регулярно исчерпывающей последовательностью. Действительно, рассмотрим некоторое множество L_l. По построению, найдется натуральное число k такое, что $B_{n_k} \subseteq L_l \subseteq B_{n_{(k+1)}}$. Тогда $|B_{n_k}| \leq |L_l| \leq |B_{n_{(k+1)}}|$. Рассматривая границу множества L_l, видим, что справедливо включение $\partial L_l \subseteq (B_{n_{(k+1)}+1} \setminus B_{n_k})$. Из этого включения получаем неравенство $|\partial L_l| \leq |B_{n_{(k+1)}+1}| - |B_{n_k}|$. Разделив обе его части на $|L_l|$, получим

$$\frac{|\partial L_l|}{|L_l|} \leq \frac{|B_{n_{(k+1)}+1}|}{|L_l|} - \frac{|B_{n_k}|}{|L_l|}.$$

Учитывая установленное выше неравенство $|B_{n_k}| \leq |L_l|$, имеем

$$0 \leq \frac{|\partial L_l|}{|L_l|} \leq \frac{|B_{n_{(k+1)}+1}|}{|B_{n_k}|} - \frac{|B_{n_k}|}{|B_{n_k}|}.$$

Переходя к пределу при $l \to \infty$, ввиду доказанной выше леммы, получим

$$\lim_{l\to\infty} \frac{|\partial L_l|}{|L_l|} = 0.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы следует включение SG$\subseteq$RPG. Возникает естественный

Вопрос. Верно ли включение RPG$\subseteq$SG, т. е., всякая ли группа, обладающая регулярно исчерпывающей последовательностью полиномиального роста, имеет субэкспоненциальный рост?

Благодарю Р. И. Григорчука, указавшего на совпадение классов AG и RG, а также за ряд других полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Стоилов, Теория функций комплексного переменного, М., Ин. лит., 1962, Т. 2.

2. Ф. Гринлиф, Инвариантные средние на топологических группах, М., Мир, 1973.

3. Р. И. Григорчук, П. Ф. Курчанов, Некоторые вопросы теории групп, связанные с геометрией, Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, М., 1990, 58, 191–256.

4. E. Følner, On groups with full Banach mean value, Math. Scand., 3, №2 (1955), 243–254.

5. P. M. Soardi, Potential theory of infinite networks, Lect. Notes Math., 1590, Springer, 1994.

6. Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп, 14–е изд., Новосибирск, 1999.

7. Р. И. Григорчук, Степени роста конечно–порожденных групп и теория инвариантных средних, Изв. АН СССР, Сер. математическая, 48, №5 (1984), 939–985.

8. Г. М. Адельсон–Вельский, Ю. А. Шрейер, Банахово среднее на группах, УМН, 12, №6 (1957), 131–136.

9. J. M. Rosenblatt, Invariant measures and growth conditions, Trans. Amer. Math. Soc., 193, №1 (1974), 33–53.

10. П. де ля Арп, Р. И. Григорчук, Т. Чекарини–Сильберстайн, Аменабельность и парадоксальные разбиения для псевдогрупп и дискретных метрических пространств, Труды МИАН, 1999, 224, 68–111.

РОССИЯ,
Бардаков Валерий Георгиевич,
630090, г. Новосибирск, 90,
пр. Ак. Коптюга, д. 4,
ИМ СО РАН,
E–mail: bardakov@math.nsc.ru.