Глава 2

ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 9. Векторное пространство над полем

9.1. Аксиоматика. Пусть задано поле P, элементы которого будем называть *скалярами* и некоторое множество V, элементы которого будем называть *векторами.* На множестве векторов определена бинарная операция сложения $+$, сопоставляющая паре векторов некоторый вектор. Относительно операции сложения V является абелевой группой. Кроме того, определена функция:

$$f : P \times V \longrightarrow V. \ \ (\alpha, v) \longrightarrow \alpha \cdot v,$$

Будем обозначать значение

и называть *произведением скаляра на вектор.* Справедливы следующие аксиомы:

$$\alpha\,(u+v) = \alpha\,u + \alpha\,v,$$

$$(\alpha+\beta)\,u = \alpha\,u + \beta\,u,$$

$$(\alpha\,\beta)\,u = \alpha\,(\beta\,u),$$

$$1 \cdot u = u,$$

для любых $\alpha, \beta \in P$ и $u, v \in V$. В этом случае мы говорим, что задано *векторное пространство над полем P.*

Схематически векторное пространство можно представить следующим образом

$$f : P \times V \longrightarrow V$$

$+, \cdot$	$+$
$- - - - - - - -$	$- - - - - - - - -$
$P = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$	$V = \{u, v, w, \ldots\}$

Из аксиом векторного пространства выведем такие следствия.

С л е д с т в и е 1. *Для всякого вектора v из V справедливо равенство*

$$0 \cdot v = 0,$$

где в правой части 0 *означает нулевой вектор, а в левой* 0 *– число нуль.*

Действительно,

$$0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v.$$

Прибавив к обеим частям этого равенства элемент, противоположный к $0 \cdot v$, получим $0 \cdot v = 0$.

С л е д с т в и е 2. *Для всякого вектора v из V справедливо равенство*

$$-v = (-1) \cdot v.$$

Действительно,

$$v + (-1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1 - 1) \cdot v = 0 \cdot v = 0,$$

т. е. $(-1) \cdot v$ является противоположным к элементу v.

9.2. Векторное пространство как алгебраическая система. Чтобы представить векторное пространство как алгебраическую систему, выберем в качестве основного множества множество V и определим на нем помимо операции сложения векторов множество унарных операций f_α для каждого скаляра $\alpha \in P$, положив $f_\alpha(u) = \alpha u$ для любого вектора $u \in V$. Тогда векторное пространство является алгебраической системой:

$$\langle V; +, \, f_\alpha \ (\alpha \in P) \rangle.$$

Из аксиом векторного пространства следует, что операции f_α удовлетворяют следующим условиям:

$$1) \quad f_\alpha(u + v) = f_\alpha(u) + f_\alpha(v),$$

$$2) \quad f_{\alpha+\beta}(u) = f_\alpha(u) + f_\beta(u),$$

$$3) \quad f_{\alpha\beta}(u) = f_\alpha(f_\beta(u)),$$

$$4) \quad f_1(u) = u,$$

для любых $\alpha, \beta \in P$ и $u, v \in V$.

9.3. Изоморфизм векторных пространств. Пусть заданы два векторных пространства

$$\langle\, V; +,\ f_\alpha\ (\alpha \in P)\rangle, \quad \langle\, V'; +,\ f_\alpha\ (\alpha \in P)\rangle$$

над одним и тем же полем P. Говорим, что они *изоморфны*, если существует взаимно однозначное отображение $\varphi : V \longrightarrow V'$ пространства V *на* пространство V', сохраняющее операции, т. е.

$$(u+v)\varphi = u\varphi + v\varphi,$$

$$(f_\alpha(u))\varphi = f_\alpha(u\varphi).$$

Последнее равенство эквивалентно такому

$$(\alpha u)\varphi = \alpha(u\varphi).$$

9.4. Примеры векторных пространств. 1) В качестве поля P возьмем поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ с обычными операциями сложения и умножения. В качестве V – множество направленных отрезков на плоскости. Вектор αu является произведением вектора u на скаляр α.

2) В качестве множества векторов возьмем множество матриц $M_n(P)$ с операцией сложения, а в качестве поля – поле P. Множество $M_n(P)$ является векторным пространством над P, если для матрицы $A = (a_{i,j})$ произведение $\alpha\, A$ есть матрица $(\alpha\, a_{i,j})$.

3) Пусть P – произвольное поле. В качестве V возьмем множество многочленов $P[x]$ с коэффициентами из P от одной переменной x, а в качестве умножения на скаляр – умножение многочлена на элемент из P.

4) Следующий пример является, в некотором смысле универсальным. Более точно, всякое конечномерное векторное пространство над полем P изоморфно этому векторному пространству. В качестве V возьмем множество P^n – множество всех упорядоченных последовательностей n элементов из P, т. е.

$$P^n = \{v = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \,|\, \alpha_i \in P\}\,.$$

На множестве таких последовательностей определим операцию сложения:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n),$$

и операцию умножения на скаляр:

$$\gamma\, v = \gamma\, (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\gamma\, \alpha_1, \gamma\, \alpha_2, \ldots, \gamma\, \alpha_n), \quad \gamma \in P.$$

5) Поле как векторное пространство. Пусть L – некоторое поле, а l – его подполе. В качестве P возьмем l, а в качестве V поле L. Операция умножения скаляра на вектор – обычное произведение в поле L. В частности, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ является векторным пространством над полем $\mathbb{R}$.

6) Множество функций

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

с операциями поточечного сложения и умножения на скаляр, образует векторное пространство над $\mathbb{R}$.

У п р а ж н е н и е. Проверьте, что в каждом из примеров выполнены все аксиомы векторного пространства.

У п р а ж н е н и е. Векторное пространство из пункта 1) изоморфно пространству $\mathbb{R}^2$. Векторное пространство из пункта 2) изоморфно пространству P^{n^2}. Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$, рассматриваемых как векторное пространство изоморфно пространству $\mathbb{R}^2$.

§ 10. Линейная зависимость векторов

10.1. Линейная комбинация. Пусть задано векторное пространство V над полем P и пусть $u_1, u_2, \ldots, u_s$ – система векторов (в системе, в отличие от множества могут быть одинаковые векторы) из V, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ – некоторые скаляры из поля P. Вектор

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_s u_s$$

называется *линейной комбинацией* векторов $u_1, u_2, \ldots, u_s$ с коэффициентами α_1, α_2, $\ldots$, α_s. Если $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_s = 0$, то линейная комбинация называется *тривиальной.* Очевидно, тривиальная линейная комбинация дает тривиальный вектор.

Говорят, что вектор u из V *линейно выражается через* векторы $u_1, u_2, \ldots, u_s$, из V, если

$$u = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_s u_s$$

при подходящих $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s \in P$. Говорят, что *$u$ линейно выражается через бесконечную систему векторов*, если он линейно выражается через некоторую ее конечную подсистему.

Л е м м а 1. *Пусть V – векторное пространство над полем P, $u_1, u_2, \ldots, u_s \in V$, $2 \le s < \infty$. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) *существует нетривиальная линейная комбинация векторов $u_1, u_2, \ldots, u_s$ равная нулю*;

2) *хотя бы один вектор u_{i_0}, $i_0 \in \{1, 2, \ldots, s\}$ линейно выражается через остальные.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_s u_s = 0,$$

где не все α_i равны нулю. Возьмем $\alpha_{i_0} \neq 0$, тогда

$$\alpha_{i_0} u_{i_0} = -\alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2 - \ldots - \alpha_{i_0-1} u_{i_0-1} - \alpha_{i_0+1} u_{i_0+1} - \ldots - \alpha_s u_s.$$

Обе части этого равенства умножим на элемент обратный к α_{i_0}, получим

$$u_{i_0} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{i_0}} u_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{i_0}} u_2 - \ldots - \frac{\alpha_{i_0-1}}{\alpha_{i_0}} u_{i_0-1} - \frac{\alpha_{i_0+1}}{\alpha_{i_0}} u_{i_0+1} - \ldots - \frac{\alpha_s}{\alpha_{i_0}} u_s.$$

2)$\Rightarrow$ 1). Предположим, что

$$u_{i_0} = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \ldots + \gamma_{i_0-1} u_{i_0-1} + \gamma_{i_0+1} u_{i_0+1} + \ldots + \gamma_s u_s$$

для некоторого $u_{i_0} \neq 0$. Перенесем все члены в одну часть:

$$0 = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \ldots + \gamma_{i_0-1} u_{i_0-1} - u_{i_0} + \gamma_{i_0+1} u_{i_0+1} + \ldots + \gamma_s u_s.$$

Ввиду следствия 2 из аксиом векторного пространства $-u_{i_0} = (-1)u_{i_0} \neq 0$, а потому полученная линейная комбинация нетривиальна. Лемма доказана.

О п р е д е л е н и е. а) Система, состоящая из одного вектора, называется *линейно зависимой*, если этот вектор равен нулю. б) Конечная система $u_1, u_2, \ldots, u_s$ состоящая более чем из одного вектора, называется *линейно зависимой*, если выполнено одно из условий леммы 1. в) Бесконечная система векторов называется *линейно зависимой*, если линейно зависима некоторая ее конечная подсистема.

10.2. Линейно эквивалентные системы. Говорят, что одна система векторов *линейно выражается* через другую систему векторов, если каждый её вектор линейно выражается через векторы другой системы. Две системы векторов называются *линейно эквивалентными*, если первая система линейно выражается через через вторую и, в свою очередь, вторая система линейно выражается через первую.

Для трех систем векторов справедлива

Л е м м а 2. *Если имеются три системы векторов*

$$u_1, u_2, \ldots, u_r, \tag{1}$$

$$v_1, v_2, \ldots, v_s, \tag{2}$$

$$w_1, w_2, \ldots, w_t \tag{3}$$

и известно, что (1) *линейно выражается через* (2), *а* (2) *линейно выражается через* (3), *то* (1) *линейно выражается через* (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию

$$u_i = \sum_{j=1}^{s} \alpha_{ij}\, v_j, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \quad v_j = \sum_{k=1}^{t} \beta_{jk}\, w_k, \quad j = 1, 2, \ldots, s.$$

Тогда

$$u_i = \sum_{j=1}^{s} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^{t} \beta_{jk}\, w_k \right) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{t} (\alpha_{ij}\, \beta_{jk})\; w_k = \sum_{k=1}^{t} \left(\sum_{j=1}^{s} \alpha_{ij}\, \beta_{jk} \right) w_k = \sum_{k=1}^{t} \gamma_{ik}\, w_k,$$

где $\gamma_{ik} = \sum_{j=1}^{s} \alpha_{ij}\, \beta_{jk}$.

10.3. Теорема о замене. Цель настоящего пункта – доказать следующее утверждение.

Т е о р е м а. *Есть две системы векторов*

$$u_1, u_2, \ldots, u_r, \tag{1}$$

$$v_1, v_2, \ldots, v_s. \tag{2}$$

Причем (1) *линейно независима и линейно выражается через* (2). *Тогда*: а) $r \leq s$, б) *найдутся такие* r *векторов в системе* (2), *которые можно заменить на векторы системы* (1) *и полученная система векторов* ($2'$) *будет линейно эквивалентна системе* (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем индукцией по r. Пусть вначале $r = 1$, т. е. система (1) состоит из одного вектора u_1. Так эта система линейно независима, то $u_1 \neq 0$. Учитывая, что (1) линейно выражается через (2), имеем неравенство $s \geq 1$, т. е. пункт а) установлен. Установим пункт б). Так как u_1 линейно выражается через (2), имеем равенство

$$u_1 = \alpha_1\, v_1 + \alpha_2\, v_2 + \ldots + \alpha_s\, v_s, \quad \alpha_i \in P.$$

При этом, ввиду того, что $u_1 \neq 0$ хотя бы один из коэффициентов α_i отличен от нуля. Не уменьшая общности, можно считать, что $\alpha_1 \neq 0$. Тогда

$$v_1 = \frac{1}{\alpha_1}\, u_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\, v_2 - \ldots - \frac{\alpha_s}{\alpha_1}\, v_s.$$

Система векторов

$$u_1, v_2, \ldots, v_s$$

и будет искомой. Действительно, как мы заметили v_1 линейно выражается через эту системы, а по условию теоремы u_1 линейно выражается через (2).

Пусть теперь $r > 1$. Рассмотрим систему векторов

$$u_1, u_2, \ldots, u_{r-1}. \tag{3}$$

Для систем (3) и (2) выполнены условия теоремы и из предположения индукции имеем:

а) $r - 1 \leq s$,

б) в системе (2) найдутся $r - 1$ векторов (пусть они располагаются по порядку), которые можно заменить на векторы системы (3) так, что полученная система

$$u_1, u_2, \ldots, u_{r-1}, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_s \tag{4}$$

будет линейно эквивалентна системе (2).

а) Докажем, что $r \leq s$. Предположим противное: $r > s$. Так как по предположению индукции $r - 1 \leq s$, то $r = s + 1$ и $r - 1 = s$. Тогда в (4) добавки $v_r, v_{r+1}, \ldots, v_s$ нет и (4) принимает вид

$$u_1, u_2, \ldots, u_{r-1}.$$

Вектор u_r линейно выражается через (2), а так как (2) линейно эквивалентна (4), то u_r линейно выражается через (4), т. е. через $u_1, u_2, \ldots, u_{r-1}$, но это противоречит тому, что система (1) линейно независима. Следовательно, $r \leq s$.

Докажем утверждение б). По условию вектор u_r линейно выражается через (2), а так как (2) линейно эквивалентна (4), то u_r линейно выражается через (4)

$$u_r = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_{r-1} u_{r-1} + \beta_r v_r + \ldots + \beta_s v_s. \tag{5}$$

Покажем, что хотя бы один из коэффициентов β_i отличен от нуля. Действительно, если предположить, что все они равны нулю, то

$$\beta_r v_r + \ldots + \beta_s v_s = 0$$

и тогда u_r линейно выражается через $u_1, u_2, \ldots, u_{r-1}$, что противоречит условию линейной независимости системы (1).

Предположим, что $\beta_r \neq 0$, тогда из этой линейной комбинации:

$$v_r = \left(-\frac{\alpha_1}{\beta_r}\right) u_1 + \left(-\frac{\alpha_2}{\beta_r}\right) u_2 + \ldots + \left(-\frac{\alpha_{r-1}}{\beta_r}\right) u_{r-1} + \frac{1}{\beta_r} u_r +$$

$$+ \left(-\frac{\beta_{r+1}}{\beta_r}\right) v_{r+1} + \ldots + \left(-\frac{\beta_s}{\beta_r}\right) v_s. \tag{6}$$

Рассмотрим систему

$$u_1, \ldots, u_{r-1}, u_r, v_{r+1}, \ldots, v_s, \tag{2'}$$

которая получается из (2) удалением r векторов и заменой их векторами системы (1). Покажем, что ($2'$) линейно эквивалентна (2). Для этого заметим, что ($2'$) линейно эквивалентна (4). Вектор v_r из (4) линейно выражается через ($2'$) (смотрите выражение (6)). Векторы $u_1, \dots, u_{r-1}, v_{r+1}, \dots, v_s$ из (4) входят в ($2'$). Поэтому (4) линейно выражается через ($2'$). Аналогично, с использованием (5), система ($2'$) линейно выражается через (4), т. е. ($2'$) линейно эквивалентна (4). По предположению индукции (4) эквивалентна (2), а так как мы доказали, что ($2'$) эквивалентна (4), то по лемме 2 ($2'$) линейно эквивалентна (2). Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Любые две линейно независимые, линейно эквивалентные системы векторов либо обе бесконечны, либо конечны и состоят из одного и того же числа векторов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$u_1, u_2, \dots, \tag{7}$$

$$v_1, v_2, \dots \tag{8}$$

– две линейно независимые, линейно эквивалентные системы векторов. Предположим, что система (7) бесконечна. Покажем, что тогда и система (8) бесконечна. Пусть напротив, (8) является конечной системой:

$$v_1, v_2, \dots, v_s. \tag{8}$$

Рассмотрим систему векторов:

$$u_1, u_2, \dots, u_{s+1}, \tag{9}$$

которая является подсистемой системы (7), состоит из линейно независимых векторов и каждый ее вектор линейно выражается через систему (8). По теореме о замене $s + 1 \leq s$ – противоречие. Следовательно, система (8) бесконечна.

Пусть теперь обе системы конечны:

$$u_1, u_2, \dots, u_r,$$

$$v_1, v_2, \dots, v_s.$$

Опять по теореме о замене $r \leq s$, а так как вторая система также линейно выражается через первую, то и $s \leq r$. Следовательно, $s = r$.

§ 11. База векторного пространства

11.1. Максимальная линейно независимая подсистема. Пусть

$$u_1, u_2, \ldots, u_r, \ldots \tag{1}$$

– система векторов некоторого векторного пространства. *Максимальной линейно независимой подсистемой* назовем подсистему, которая сама линейно независима, а при добавлении любого вектора системы становится линейно зависимой. Такие подсистемы всегда существуют в любой системе. Если в (1) все векторы нулевые, то максимальная подсистема – это пустая система. Если $u_1 \neq 0$, то подсистема, состоящая из u_1 – линейно независима. Если есть линейно независимая подсистема векторов и она не максимальна, то можно добавить еще один вектор. Если полученная подсистема не максимальна, то можно добавить еще один вектор и т. д.

Л е м м а 1. *Любой вектор системы линейно выражается через максимальную линейно независимую подсистему.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v_1, v_2, \ldots,$ – максимальная линейно независимая подсистема системы (1) и u_i – некоторый вектор из (1). Рассмотрим подсистему

$$u_i, v_1, v_2, \ldots,$$

системы (1). Она линейно зависима, т. е. найдется конечная подсистема $v_1, v_2, \ldots, v_s$ такая, что

$$\alpha\, u_i + \beta_1\, v_1 + \beta_2\, v_2 + \ldots + \beta_s\, v_s = 0$$

для некоторых коэффициентов $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_s$. Заметим, что $\alpha \neq 0$. Действительно, если $\alpha = 0$, то

$$\beta_1\, v_1 + \beta_2\, v_2 + \ldots + \beta_s\, v_s = 0,$$

но так как векторы $v_1, v_2, \ldots, v_s$ линейно независимы, то $\beta_1 = \ldots = \beta_s = 0$, а это противоречит линейной зависимости. Следовательно, $\alpha \neq 0$ и мы можем выразить

$$u_i = \left(-\frac{\beta_1}{\alpha}\right) v_1 + \ldots + \left(-\frac{\beta_s}{\alpha}\right) v_s.$$

Таким образом, всякий вектор из (1) является линейной комбинацией векторов из максимальной линейно независимой подсистемы. Лемма доказана.

Из этой леммы, в частности, следует, что во всякой системе векторов любые две максимальные линейно независимые подсистемы линейно эквивалентны, а потому, по следствию теоремы о замене, либо обе бесконечны, либо имеют одинаковое число векторов. Поэтому мы можем дать

О п р е д е л е н и е. Максимальную линейно независимую подсистему называют *базисной подсистемой* системы (1). Число векторов в базисной подсистеме системы (1) называют *рангом системы* (1). Если в качестве системы (1) рассматривать все векторы векторного пространства V, то ее базисную подсистему называют *базой пространства* V, а ее ранг называют *размерностью пространства.* Размерность пространства V будем обозначать символом $\dim V$.

Как было замечено выше, все базы одного пространства имеют одинаковое число векторов.

Вернемся теперь к рассмотренным выше примерам векторных подпространств и укажем в каждом из них базу.

П р и м е р ы. 1) Базу направленных отрезков на плоскости образуют два любых ненулевых непараллельных вектора.

2) Базу пространства $M_n(P)$ образуют так называемые *матричные единицы* $E_{ij} \in M_n(P)$, $1 \leq i, j \leq n$, – матрицы, у которых на месте (i, j) стоит единица, а на всех остальных местах нули.

3) Пространство многочленов $P[x]$ имеет бесконечную, счетную размерность и база состоит из многочленов: $1, x, x^2, \ldots$

4) База пространства P^n состоит из векторов e_i, $1 \leq i \leq n$, у которых на i-м месте стоит 1, а на всех остальных местах – нули.

5) Пространство $\mathbb{C}$ является двумерным векторным пространством над $\mathbb{R}$ с базой $1, \imath$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только конечномерные пространства.

11.2. Координаты вектора. Пусть V – векторное пространство размерности $n = \dim V$ над полем P. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – база пространства V. Если $u \in V$, то по лемме 1

$$u = \alpha_1 \, e_1 + \alpha_2 \, e_2 + \ldots + \alpha_n \, e_n, \quad \alpha_i \in P,$$

и элементы α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называются *координатами вектора* u в базе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Покажем, что координаты определяются однозначно, т. е. если

$$u = \alpha'_1 \, e_1 + \alpha'_2 \, e_2 + \ldots + \alpha'_n \, e_n, \quad \alpha'_i \in P,$$

то $\alpha'_1 = \alpha_1$, $\alpha'_2 = \alpha_2$, $\ldots$, $\alpha'_n = \alpha_n$. Действительно, рассматривая разность двух представлений, получим

$$(\alpha_1 - \alpha'_1) \, e_1 + (\alpha_2 - \alpha'_2) \, e_2 + \ldots + (\alpha_n - \alpha'_n) \, e_n = 0,$$

и из линейной независимости следуют нужные равенства, т. е. вектор u представляется однозначно. Будем записывать базу пространства в виде столбца

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix},$$

а координаты вектора u в виде строки

$$[u] = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

При этом имеет место равенство

$$[u]\, e = u.$$

Т е о р е м а. *Всякое векторное пространство V размерности n над полем P изоморфно пространству n–мерных строк (n-ок) P^n над P.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что существует взаимно однозначное отображение пространства V на пространство n-мерных строк. Для этого зафиксируем в V некоторую базу e и каждому $u \in V$ поставим в соответствие координаты

$$u \longmapsto [u].$$

Это отображение (обозначим его φ) и есть искомый изоморфизм V на пространство строк

$$P^n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in P\}.$$

Отображение

$$\varphi : V \longrightarrow P^n$$

– взаимнооднозначно. Действительно, так как координаты в V определяются однозначно, то φ однозначно. Если $[u] = [v]$, т. е. векторы u и v имеют одни и те же координаты то они равны. Отображение φ является отображением *на*, так как для любой строки $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ существует вектор $u = \alpha_1\, e_1 + \alpha_2\, e_2 + \ldots + \alpha_n\, e_n$ из V, являющийся прообразом. Чтобы показать, что φ сохраняет операции надо доказать:

1) $(u+v)\varphi = u\varphi + v\varphi \Longleftrightarrow [u+v] = [u] + [v]$;

2) $(\alpha\, u)\varphi = \alpha\, u\varphi \Longleftrightarrow [\alpha\, u] = \alpha\, [u]$.

Для доказательства 1) положим $[u] = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $[v] = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$. Тогда сумма

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1)\, e_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\, e_2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)\, e_n$$

имеет координаты

$$[u+v] = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n) = [u] + [v].$$

Равенство 2) проверяется аналогично. Теорема доказана.

11.3. Преобразование координат вектора при смене базы. В каждом пространстве V существует много баз. Пусть имеются две базы:

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, \quad e' = \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{pmatrix}.$$

Как они связаны?

Любой вектор из e' линейно выражается через базу e:

$$\begin{cases} e_1' = t_{11}\, e_1 + t_{12}\, e_2 + \ldots + t_{1n}\, e_n, \\ e_2' = t_{21}\, e_1 + t_{22}\, e_2 + \ldots + t_{2n}\, e_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n' = t_{n1}\, e_1 + t_{n2}\, e_2 + \ldots + t_{nn}\, e_n. \end{cases} \tag{2}$$

Возникает матрица

$$T = (t_{ij}) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

которая называется *матрицей перехода от* базы e к базе e'. При этом систему равенств (2) можно записать в таком виде

$$e' = T\, e. \tag{3}$$

Л е м м а 2. *Матрица перехода T – невырожденная матрица.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдем матрицу перехода от e' к e, которую обозначим символом S, т. е.

$$e = S\, e'.$$

Подставляя это выражение в равенство (3), получим

$$e' = E\, e' = T\, e = T\,(S\, e').$$

Для завершения доказательства надо показать, что из последнего равенства следует равенство $E = T\, S$. Из этого равенства ввиду теоремы об обратимости матрицы (см. теорему 2 из § 6) будет следовать, что матрица T невырождена.

справедливость равенства $E = T\, S$ вытекает из следующего утверждения.

Л е м м а 3 (о сокращении). *Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_k$ – линейно независимая система векторов, X и Y матрицы размера $m \times k$. Если положить $v = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ – вектор-столбец, то из равенства $X\, v = Y\, v$ следует равенство матриц $X = Y$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mk} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \ldots & y_{1k} \\ y_{21} & y_{22} & \ldots & y_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{m1} & y_{m2} & \ldots & y_{mk} \end{pmatrix}.$$

Тогда равенство $X\,v = Y\,v$ запишем в таком виде

$$\begin{pmatrix} x_{11}\,v_1 + x_{12}\,v_2 + \ldots + x_{1k}\,v_k \\ x_{21}\,v_1 + x_{22}\,v_2 + \ldots + x_{2k}\,v_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1}\,v_1 + x_{m2}\,v_2 + \ldots + x_{mk}\,v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11}\,v_1 + y_{12}\,v_2 + \ldots + y_{1k}\,v_k \\ y_{21}\,v_1 + y_{22}\,v_2 + \ldots + y_{2k}\,v_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{m1}\,v_1 + y_{m2}\,v_2 + \ldots + y_{mk}\,v_k \end{pmatrix}.$$

Отсюда имеем систему равенств

$$\begin{cases} x_{11}\,v_1 + x_{12}\,v_2 + \ldots + x_{1k}\,v_k = y_{11}\,v_1 + y_{12}\,v_2 + \ldots + y_{1k}\,v_k, \\ x_{21}\,v_1 + x_{22}\,v_2 + \ldots + x_{2k}\,v_k = y_{21}\,v_1 + y_{22}\,v_2 + \ldots + y_{2k}\,v_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1}\,v_1 + x_{m2}\,v_2 + \ldots + x_{mk}\,v_k = y_{m1}\,v_1 + y_{m2}\,v_2 + \ldots + y_{mk}\,v_k. \end{cases}$$

Перенося все слагаемые в левую часть, получим

$$\begin{cases} (x_{11} - y_{11})\,v_1 + (x_{12} - y_{12})\,v_2 + \ldots + (x_{1k} - y_{1k})\,v_k = 0, \\ (x_{21} - y_{21})\,v_1 + (x_{22} - y_{22})\,v_2 + \ldots + (x_{2k} - y_{2k})\,v_k = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_{m1} y_{m1})\,v_1 + (x_{m2} - y_{m2})\,v_2 + \ldots + (x_{mk} - y_{mk})\,v_k = 0. \end{cases}$$

Так как по условию система векторов $v_1, v_2, \ldots, v_k$ линейно независима, то $x_{ij} = y_{ij}$. Лемма установлена.

Если вектор u в базе e имеет координаты $[u] = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, а в базе e' имеет координаты $[u]' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n)$, то

$$u = [u]\,e = [u]'\,e' = [u]'\,T\,e.$$

Следовательно, по лемме о сокращении $[u]' = [u]\,T^{-1}$. Таким образом, координаты вектора в новой базе есть произведение координат в старой базе на матрицу перехода.

§ 12. Подпространства

12.1. Определения и примеры. Подмножество U векторного пространства V называется *подпространством*, если оно замкнуто относительно сложения и умножения на скаляр, и само является векторным пространством относительно этих индуцированных операций.

Следующая очевидная лемма позволяет проверить: будет ли данное множество подпространством.

Л е м м а 1. *Пусть V – векторное подпространство над полем P. Для подмножества $U \subseteq V$ равносильны следующие утверждения*:

1) *U – подпространство пространства V*;

2) *для любых $u, v \in U$ и $\alpha \in P$ сумма $u + v$ и произведение αu* лежат в U;

3) *для любых $u, v \in U$ и $\alpha, \beta \in P$ линейная комбинация $\alpha\, u + \beta\, v$* лежит в U.

Укажем в каждом из разобранных в примерах векторных пространств некоторые подпространства.

П р и м е р ы. 1) Множество направленных отрезков на плоскости, параллельных некоторой фиксированной прямой является подпространством пространства направленных отрезков на плоскости.

2) Матрица $A \in M_n(P)$ называется *симметрической* (*кососимметрической*), если $A^t = A$ (соответственно, $A^t = -A$). Множество симметрических (кососимметрических) матриц является подпространством пространства $M_n(P)$.

3) Если V – пространство многочленов над полем P, а

$$U = \{f(x) = a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in P\}$$

– множество многочленов без свободного члена, то U – подпространство.

4) Множество упорядоченных n-к из P^n, у которых первая координата нулевая, образует подпространство пространства P^n, которое изоморфно P^{n-1}.

5) Множество *гауссовых чисел*:

$$\{a + \imath b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

образует подмножество, но не подпространство пространства комплексных чисел $\mathbb{C}$ над полем $\mathbb{R}$.

6) Множество непрерывных функций $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ образует подпространство пространства всех функций $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

12.2. Сумма и пересечение подпространств. Пусть U_i, $i \in I$ – некоторое семейство подпространств пространства V. Их *суммой* называется следующее множество векторов:

$$\sum_{i \in I} U_i = \{u_{i_1} + u_{i_2} + \ldots + u_{i_s} \mid u_{i_j} \in U_{i_j}\}.$$

Если, в частности, $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ – конечное множеств, то

$$\sum_{i=1}^{m} U_i = \{u_1 + u_2 + \ldots + u_m \mid u_i \in U_i\}.$$

Л е м м а 2. *Сумма подпространств – подпространство.*

Д о к а з а т е л ь с т в о достаточно провести для случая конечного числа подпространств. Рассмотрим два вектора

$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_m, \quad v = v_1 + v_2 + \ldots + v_m, \quad u_i, v_i \in U_i,$$

из суммы $\sum_{i=1}^{m} U_i$ и возьмем $\alpha, \beta \in P$. Рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha\, u + \beta\, v = (\alpha\, u_1 + \beta\, v_1) + (\alpha\, u_2 + \beta\, v_2) + \ldots + (\alpha\, u_m + \beta\, v_m) =$$

$$= w_1 + w_2 + \ldots + w_m,$$

где символом w_i обозначена линейная комбинация $\alpha\, u_i + \beta\, v_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Заметим, что $\alpha\, u_1 + \beta\, v_1$ лежит в подпространстве U_1, $\alpha\, u_2 + \beta\, v_2$ лежит в подпространстве U_2 и т. д. Следовательно, сумма $w_1 + w_2 + \ldots + w_m$ лежит в $\sum_{i=1}^{m} U_i$, а потому $\sum_{i=1}^{m} U_i$ – подпространство. Лемма доказана.

Введем теперь операцию пересечения для подпространств. Пусть опять U_i, $i \in I$, – семейство подпространств пространства V. Их *пересечением* назовем следующее множество векторов

$$\bigcap_{i \in I} U_i = \{v \in V \mid v \in U_i \text{ для всех } i \in I\}.$$

Заметим, что это множество не пусто. Оно, в частности, содержит нулевой вектор так как его содержит каждое подпространство U_i. Покажем, что пересечение $\bigcap_{i \in I} U_i$ является подпространством.

Л е м м а 3. *Пересечение подпространств – подпространство.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u, v \in \bigcap_{i \in I} U_i$ и $\alpha, \beta \in P$. Рассмотрим линейную комбинацию $\alpha\, u + \beta\, v$, которая лежит в U_i для каждого $i \in I$. Следовательно, $\alpha\, u + \beta\, v$ лежит в пересечении. Таким образом, пересечение подпространств является подпространством.

12.3. Линейная оболочка. Пусть M – некоторое подмножество V. *Линейной оболочкой* $\mathcal{L}(M)$ множества M называется пересечение всех подпространств пространства V, содержащих M. Иными словами, линейная оболочка – наименьшее подпространство, содержащее M.

Т е о р е м а 1. *Справедливо следующее равенство*

$$\mathcal{L}(M) = \{\alpha_1\, m_1 + \alpha_2\, m_2 + \ldots + \alpha_k\, m_k \mid m_i \in M, \quad \alpha_i \in P\},$$

т. е линейная оболочка – множество всевозможных линейных комбинаций из M.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$\overline{M} = \{\alpha_1\, m_1 + \alpha_2\, m_2 + \ldots + \alpha_k\, m_k \mid m_i \in M, \quad \alpha_i \in P\}.$$

Пусть U_i, $i \in I$, – все подпространства, содержащие множество M. По определению, $\mathcal{L}(M) = \bigcap_{i \in I} U_i$. Очевидно, $U_i \supseteq \overline{M}$ для любого $i \in I$, а потому $\mathcal{L}(M) \supseteq \overline{M}$.

Для доказательства обратного включения, покажем, что $\overline{M}$ – подпространство. Для этого возьмем два произвольных вектора

$$u = \alpha_1\, m_1 + \alpha_2\, m_2 + \ldots + \alpha_k\, m_k, \quad v = \alpha_{k+1}\, m_{k+1} + \alpha_{k+2}\, m_{k+2} + \ldots + \alpha_s\, m_s$$

из $\overline{M}$ и два произвольных скаляра $\alpha, \beta \in P$. Найдем их линейную комбинацию:

$$\alpha\, u + \beta\, v = \alpha\,(\alpha_1\, m_1 + \alpha_2\, m_2 + \ldots + \alpha_k\, m_k) + \beta\,(\alpha_{k+1}\, m_{k+1} + \alpha_{k+2}\, m_{k+2} + \ldots + \alpha_s\, m_s) =$$

$$(\alpha\,\alpha_1)\, m_1 + (\alpha\,\alpha_2)\, m_2 + \ldots + (\alpha\,\alpha_k)\, m_k + (\beta\,\alpha_{k+1})\, m_{k+1} + (\beta\,\alpha_{k+2})\, m_{k+2} + \ldots + (\beta\,\alpha_s)\, m_s.$$

Видим, что этот вектор лежит в $\overline{M}$.

Очевидно, что $\overline{M} \supseteq M$, т. е. $\overline{M}$ совпадает с одним из подпространств U_i. Следовательно, $\overline{M} \supseteq \bigcap_{i \in I} U_i$. Теорема доказана.

12.4. Прямая сумма подпространств. Сумма подпространств $\sum_{i \in I} U_i$ называется *прямой суммой*, если для каждого ее вектора

$$u = u_{i_1} + u_{i_2} + \ldots + u_{i_s}, \quad u_{i_j} \in U_{i_j},$$

такая запись единственна. Прямая сумма подпространств U_i, $i \in I$, обозначается $\oplus_{i \in I} U_i$. Если $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ – конечное множество, то пишут $U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_m$.

Л е м м а 4. *Сумма подпространств $\sum_{i \in I} U_i$ является прямой суммой тогда и только тогда, когда*

$$U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = \{0\} \text{ для всех } i \in I.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что сумма прямая, но равенство не выполняется, т. е. существует индекс $i_0 \in I$ такой, что

$$U_{i_0} \cap \sum_{j \neq i_0} U_j \neq \{0\}.$$

Пусть $v \neq 0$ и $v \in U_{i_0} \cap \sum_{j \neq i_0} U_j$, тогда $v = v_{j_1} + v_{j_2} + \ldots + v_{j_s}$, где $j_1, j_2, \ldots, j_s \neq i_0$. Рассмотрим

$$-v + v_{j_1} + v_{j_2} + \ldots + v_{j_s} = 0 = 0 + 0 + \ldots + 0,$$

т. е. нулевой вектор записывается двумя разными способами. Противоречие.

Докажем обратное утверждение. Предположим, что сумма не прямая, т. е. найдется вектор, который записывается двумя способами:

$$w = u_{i_1} + u_{i_2} + \ldots + u_{i_s} = u'_{i_1} + u'_{i_2} + \ldots + u'_{i_s}, \quad u_{i_j}, u'_{i_j} \in U_{i_j}.$$

Будем считать, что $u_{i_1} \neq u'_{i_1}$ и оба вектора лежат в одном подпространстве U_{i_1}. Как этого добиться можно заметить из следующего примера. Если

$$w = u_2 + u_5 = u'_3 + u'_7,$$

то это равенство можно представить в таком виде

$$w = u_2 + 0 + u_5 + 0 = 0 + u'_3 + 0 + u'_7.$$

Далее имеем равенство

$$0 \neq u_{i_1} - u'_{i_1} = (u'_{i_2} - u_{i_2}) + (u'_{i_3} - u_{i_3}) + \ldots + (u'_{i_s} - u_{i_s}).$$

Заметим, что $u_{i_1} - u'_{i_1} \in U_{i_1}$, $u'_{i_2} - u_{i_2} \in U_{i_2}$, $\ldots$, $u'_{i_s} - u_{i_s} \in U_{i_s}$. Таким образом, вектор из одного пространства разложен в сумму векторов из других пространств, но, по предположению, пересечение этих подпространств равно нулевому вектору. Следовательно, вопреки предположению, $u_{i_1} = u'_{i_1}$. Лемма доказана.

С л е д с т в и е. 1) *Сумма двух подпространств* $U_1 + U_2$ *пространства* V *прямая, если* $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. 2) *Сумма трех подпространств* $U_1 + U_2 + U_3$ *пространства* V *прямая, если*

$$U_1 \cap (U_2 + U_3) = \{0\}, \quad U_2 \cap (U_1 + U_3) = \{0\}, \quad U_3 \cap (U_1 + U_2) = \{0\}.$$

Легко указать примеры, показывающие, что условия в пункте 2) нельзя заменить условием $U_i \cap U_j = \{0\}$ для всех $i \neq j$.

12.5. Размерность суммы и пересечения подпространств. В этом пункте мы установим формулу, связывающую размерность суммы и пересечения двух подпространств. Для этого нам потребуется

Л е м м а 5. *Любую линейно независимую систему векторов можно дополнить до базы пространства.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_r$ – линейно независимая система векторов и $v_1, v_2, \ldots, v_n$ – база пространства. По теореме о замене, можем заменить r векторов базы на векторы $u_1, u_2, \ldots, u_r$. Получим систему векторов

$$u_1, u_2, \ldots, u_r, v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n,$$

которая линейно эквивалентна базе пространства. Утверждается, что это база всего пространства, так как она линейно эквивалентна базе пространства, то любой вектор выражается через нее. Если бы полученная система была линейно зависимой, то удалили бы линейно зависимые векторы и получили систему, содержащую меньше n векторов, но это невозможно, так как база пространства содержит n векторов. Лемма доказана.

Т е о р е м а 2. *Пусть* U_1 *и* U_2 *– подпространства пространства* V*, тогда справедливо равенство*

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2).$$

В частности, для прямой суммы справедливо равенство

$$\dim(U_1 \oplus U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $D = U_1 \cap U_2$, $S = U_1 + U_2$ и пусть

$$e_1, e_2, \ldots, e_r \tag{1}$$

– база D.

По лемме 5 существует база

$$e_1, e_2, \ldots, e_r, f_{r+1}, f_{r+2}, \ldots, f_s \tag{2}$$

пространства U_1 и база

$$e_1, e_2, \ldots, e_r, g_{r+1}, g_{r+2}, \ldots, g_t \tag{3}$$

пространства U_2. Рассмотрим систему векторов

$$e_1, e_2, \ldots, e_r, f_{r+1}, f_{r+2}, \ldots, f_s, g_{r+1}, g_{r+2}, \ldots, g_t. \tag{4}$$

Если мы докажем, что это база S, то отсюда и последует нужная формула.

Докажем, что система (4) линейно независима. Пусть

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_r e_r + \beta_{r+1} f_{r+1} + \beta_{r+2} f_{r+2} + \ldots + \beta_s f_s +$$

$$+\gamma_{r+1} g_{r+1} + \gamma_{r+2} g_{r+2} + \ldots + \gamma_t g_t = 0. \tag{5}$$

Надо доказать, что $\alpha_i = 0, \beta_j = 0, \gamma_k = 0$. Перенося часть слагаемых в правую часть, получим

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_r e_r + \beta_{r+1} f_{r+1} + \beta_{r+2} f_{r+2} + \ldots + \beta_s f_s = -\gamma_{r+1} g_{r+1} - \gamma_{r+2} g_{r+2} - \ldots - \gamma_t g_t.$$

Заметим, что вектор из левой части лежит в U_1, а вектор из правой части – в U_2. Следовательно, он лежит в D, т. е. в пересечении подпространств, а потому разлагается по базе (1), т. е. имеем равенство

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_r e_r + \beta_{r+1} f_{r+1} + \beta_{r+2} f_{r+2} + \ldots + \beta_s f_s = \delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \ldots + \delta_r e_r.$$

Отсюда

$$\delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \ldots + \delta_r e_r + \gamma_{r+1} g_{r+1} + \gamma_{r+2} g_{r+2} + \ldots + \gamma_t g_t = 0,$$

но это линейная комбинация базисных векторов пространства U_2. Следовательно все $\gamma_k = 0$, а так как система векторов (2) линейно независима, то и все $\alpha_i = 0$, а тогда из (5) следует, что и все $\beta_j = 0$.

Докажем, что система векторов (4) является максимальной. Рассмотрим произвольный вектор $w \in S$. По определению, $w = u_1 + u_2$, где $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$. Так как $u_1 \in U_1$, то он разлагается по базе пространства U_1:

$$u_1 = \mu_1\, e_1 + \mu_2\, e_2 + \ldots + \mu_r\, e_r + \nu_{r+1}\, f_{r+1} + \nu_{r+2}\, f_{r+2} + \ldots + \nu_s\, f_s.$$

Аналогично, u_2 разлагается по базе пространства U_2:

$$u_2 = \mu'_1\, e_1 + \mu'_2\, e_2 + \ldots + \mu'_r\, e_r + \lambda_{r+1}\, g_{r+1} + \lambda_{r+2}\, g_{r+2} + \ldots + \lambda_t\, g_t.$$

Следовательно,

$$w = (\mu_1 + \mu'_1)\, e_1 + (\mu_2 + \mu'_2)\, e_2 + \ldots + (\mu_r + \mu'_r)\, e_r + \nu_{r+1}\, f_{r+1} + \nu_{r+2}\, f_{r+2} + \ldots + \nu_s\, f_s +$$

$$+ \lambda_{r+1}\, g_{r+1} + \lambda_{r+2}\, g_{r+2} + \ldots + \lambda_t\, g_t.$$

Таким образом, w линейно выражается через систему (4). Теорема доказана.

§ 13. Ранг матрицы

13.1. Теорема о ранге. Всякую матрицу $A \in M_{m\times n}(P)$ можно рассматривать либо как систему строк, либо как систему столбцов:

$$A = (A^1, A^2, \ldots, A^n) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix},$$

где A^i, $i = 1, 2, \ldots, n$, – i-й столбец матрицы A, а A_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, – j-я строка матрицы A.

О п р е д е л е н и е. *Рангом матрицы* называется ранг системы ее столбцов, т. е. в системе столбцов надо выбрать максимальную линейно независимую подсистему, число столбцов которой и будет называться рангом матрицы.

Если в некоторой матрице выбрать k столбцов и такое же число строк и посчитать определитель полученной на пересечении матрицы, то он будет называться *минором порядка* k. *Базисный минор матрицы* - это такой отличный от нуля минор, что все миноры большего порядка равны нулю.

Т е о р е м а о р а н г е. *Ранг матрицы равен порядку ее базисного минора.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В матрице возьмем базисный минор. Предположим, что он находится в левом верхнем углу. Если это не так то переставляя столбцы, а затем строки (очевидно, это преобразование не меняет ранг системы столбцов) приведем матрицу к нужному виду.

Пусть D – базисный минор, r – его порядок. Докажем, что первые r столбцов составляют максимальную линейно независимую подсистему системы столбцов. Докажем линейную независимость. От противного: если бы первые r столбцов были линейно зависимы, то и столбцы матрицы D были бы линейно зависимы, и по свойству определителей $\det D = 0$, но это противоречит тому, что D – базисный минор.

Докажем максимальность. Для этого надо доказать, что всякий j-й столбец, $j > r$, линейно выражается через первые r столбцов. Рассмотрим i-ю строку. Построим минор на пересечении первых r столбцов и j-го столбца и первых r строк и i-й строки. Это минор порядка $r+1$:

$$\left|\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{array}\right|,$$

который равен нулю. Действительно, если $i > r$, то это следует из того, что D – базисный минор, а если $i \le r$, то это так потому что минор содержит две одинаковые строки.

Подсчитаем этот определитель другим способом (разлагая по последней строке), получим

$$a_{i1}\,B_{1j} + a_{i2}\,B_{2j} + \ldots + a_{ir}\,B_{rj} + a_{ij}\,D = 0,$$

где $B_{1j}, B_{2j}, \ldots, B_{rj}$ – алгебраические дополнения к элементам $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ir}$ соответственно. Из этого равенства получим

$$a_{ij} = -\frac{B_{1j}}{D}\,a_{i1} - \frac{B_{2j}}{D}\,a_{i2} - \ldots - \frac{B_{rj}}{D}\,a_{ir}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

причем определители $B_{1j}, B_{2j}, \ldots, B_{rj}$ от i не завися, т. е. мы имеем следующее равенство для столбцов

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = -\frac{B_{1j}}{D} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} - \frac{B_{2j}}{D} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} - \ldots - \frac{B_{rj}}{D} \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{mr} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, j-й столбец есть линейная комбинация первых r столбцов, а значит, первые r столбцов – максимальная линейно независимая подсистема. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 1. *Ранг матрицы равен рангу системы ее строк.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что ранг системы строк совпадает с рангом системы столбцов, так как при транспонировании базисный минор остается базисным минором. Отсюда получаем нужное утверждение.

С л е д с т в и е 2. *Определитель квадратной матрицы тогда и только тогда равен нулю, когда между ее столбцами существует нетривиальная линейная зависимость.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разбирая свойство определителей мы установили, что если столбцы некоторой квадратной матрицы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю. Обратное утверждение следует из теоремы о ранге.

13.2. Ранг произведения матриц. Прежде чем формулировать основной результат, установим следующее утверждение.

Л е м м а 1. *Пусть в векторном пространстве V заданы две системы векторов:*

$$u_1, u_2, \dots, u_r, \tag{1}$$

$$v_1, v_2, \dots, v_s, \tag{2}$$

причем, (1) *линейно выражается через* (2). *Тогда ранг системы* (1) *не превосходит ранга системы* (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_p} \tag{$1'$}$$

– максимальная линейно независимая подсистема системы (1),

$$v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_q}, \tag{$2'$}$$

– максимальная линейно независимая подсистема системы (2).

Заметим, что система ($1'$) линейно выражается через систему (1), а (1) линейно выражается через систему (2) по условию. Так как ($2'$) – максимальная линейно независимая подсистема, то (2) линейно выражается через ($2'$). Следовательно, ($1'$) линейно выражается через ($2'$). По теореме о замене $p \leq q$, где p – ранг системы (1), а q – ранг системы (2). Лемма доказана.

Т е о р е м а. *Ранг произведения матриц не превосходит рангов множителей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A \in M_{m\times n}(P)$, $B \in M_{n\times s}(P)$, $A \cdot B = C \in M_{m\times s}(P)$ – их произведение. По определению

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Зафиксируем индекс i и заставим j пробегать всевозможные значения. Тогда i-я строка матрицы C будет иметь вид

$$(c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{is}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,(b_{k1}, b_{k2}, \dots, b_{ks}).$$

Следовательно, i-я строка матрицы C есть линейная комбинация строк матрицы B. Рассмотрим следующие системы векторов

$$\{\text{строки матрицы } C\} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}, \tag{3}$$

$$\{\text{строки матрицы } B\} = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}. \tag{4}$$

Как мы видели, система (3) линейно выражается через систему (4). Тогда по доказанной лемме 1 ранг системы (3) не превосходит ранга системы (4). Так как ранг матрицы равен рангу ее строк, то мы установили следующее неравенство

$$\text{ранг } C \leq \text{ранг } B.$$

Если в равенстве

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,b_{kj}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

заставить индекс i пробегать множество от 1 до m, то получим линейную комбинацию столбцов. Так же как и выше устанавливается неравенство

$$\text{ранг } C \leq \text{ранг } A.$$

Теорема доказана.

Следующий пример показывает, что в общем случае утверждение теоремы улучшить нельзя.

П р и м е р. 1) Пусть

$$A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ранг } A = \text{ранг } B = 2.$$

Тогда их произведение

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет ранг 2.

2) Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ранг } A = 2, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ранг } B = 1.$$

Тогда их произведение

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет ранг 1.

3) Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ранг } A = 1, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ранг } B = 2.$$

Тогда их произведение

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет ранг 1.

4) Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ранг } A = 1, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ранг } B = 1.$$

Тогда их произведение

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет ранг 0.

С л е д с т в и е. *Если матрицу умножить на невырожденную матрицу, то ее ранг не изменится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что невырожденной называется квадратная матрица определитель которой отличен от нуля. Пусть A – некоторая матрица, а Q – невырожденная матрица из $M_n(P)$ и при этом определено произведение $A \cdot Q$. Обозначим $C = A \cdot Q$. Тогда по теореме о ранге произведения матриц имеем неравенство

$$\text{ранг } C \leq \text{ранг } A.$$

С другой стороны, легко заметить, что определено и произведение $A = C \cdot Q^{-1}$ и опять по теореме о ранге произведения матриц:

$$\text{ранг } A \leq \text{ранг } C.$$

Следовательно, ранг $C =$ ранг A.

Если матрица умножается на невырожденную слева, то доказательство проводится аналогично.

§ 14. Системы линейных уравнений

14.1. Критерий совместности. Пусть P – поле. *Системой m линейных уравнений от n неизвестных* называется следующее выражение

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1, \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = b_m, \end{array}\right. \tag{1}$$

где коэффициенты a_{ij}, b_i – заданные элементы поля P. *Решением этой системы* называется n-ка $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, которая при подстановке в систему дает верные равенства. При рассмотрении любого уравнения (системы уравнений) возникает следующий вопрос: когда решение существует?

Чтобы ответить на этот вопрос свяжем с системой (1) следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

– *матрица системы,*

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

– *столбец свободных членов* и *столбец неизвестных.* Тогда систему (1) кратко можно записать в таком виде

$$A \cdot X = B.$$

Если $A = (A^1, A^2, \ldots, A^n)$, где A^i – i-й столбец матрицы A, то система (1) примет такой вид

$$A^1\,x_1 + A^2\,x_2 + \ldots + A^n\,x_n = B.$$

Введем так называемую *расширенную матрицу* $\overline{A}$, которая получается из матрицы A приписыванием справа столбца свободных членов:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Будем говорить, что система (1) *совместна*, если она имеет хотя бы одно решение. Теперь мы можем сформулировать критерий совместности системы.

Т е о р е м а 1. *Система* (1) *тогда и только тогда совместна, когда ранг ее матрицы равен рангу расширенной матрицы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем вначале импликацию слева направо. Предположим, что система совместна и пусть $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ – некоторое ее решение. Рассмотрим следующие системы векторов:

$$\{\text{столбцы матрицы } A\} = \{A^1, A^2, \dots, A^n\}, \tag{2}$$

$$\{\text{столбцы матрицы } \overline{A}\} = \{A^1, A^2, \dots, A^n, B\}. \tag{3}$$

Заметим, что система (2) линейно выражается через систему (3), а система (3) линейно выражается через систему (2), что непосредственно следует из равенства

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1^0 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2^0 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n^0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Следовательно, система (2) эквивалентна системе (3), а потому, по лемме 1 из § 13, ранги этих двух систем совпадают.

Докажем импликацию справа налево. Пусть ранг матрицы A совпадает с рангом матрицы $\overline{A}$. Нужно доказать, что система совместна. В системе столбцов матрицы A выберем максимальную линейно независимую подсистему. Пусть это столбцы с номерами $j_1, j_2, \dots, j_r$, т. е.

$$A^{j_1}, A^{j_2}, \dots, A^{j_r}$$

– максимальная линейно независимая система столбцов матрицы A. Те же самые столбцы есть и в матрице $\overline{A}$, где они также образуют максимальную линейно независимую подсистему (так как ранг $A =$ ранг $\overline{A}$). Следовательно,

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = x_{j_1}^0 \begin{pmatrix} a_{1,j_1} \\ a_{2,j_1} \\ \vdots \\ a_{m,j_1} \end{pmatrix} + x_{j_2}^0 \begin{pmatrix} a_{1,j_2} \\ a_{2,j_2} \\ \vdots \\ a_{m,j_2} \end{pmatrix} + \dots + x_{j_r}^0 \begin{pmatrix} a_{1,j_r} \\ a_{2,j_r} \\ \vdots \\ a_{m,j_r} \end{pmatrix}.$$

при некоторых $x^0_{j_1}, x^0_{j_2}, \ldots, x^0_{j_r}$. Ясно, что тогда все числа $x^0_{j_1}, x^0_{j_2}, \ldots, x^0_{j_r}$ входят в некоторую n–ку, которая является решением системы (1) (остальные элементы этой n–ки равны нулю). Теорема доказана.

Предположим теперь, что система имеет решения. Возникает следующий вопрос: найти все решения системы (1).

14.2. Общее решение. Начнем со следующего простого примера, который показывает, что система может иметь множество решений.

П р и м е р. Система, состоящая из одного уравнения

$$x_1 + x_2 = 0$$

имеет множество решений: $(t, -t)$, где $t \in P$.

Поэтому нам надо научиться описывать все решения системы.

О п р е д е л е н и е. *Общим решением системы* (1) называется n-ка функций от параметров $t_1, t_2, \ldots, t_d$:

$$(f_1(t_1, t_2, \ldots, t_d), f_2(t_1, t_2, \ldots, t_d), \ldots, f_n(t_1, t_2, \ldots, t_d)), \quad \text{где } f_i : P^d \longrightarrow P, \tag{2}$$

такая, что

1) при любых $t^0_1, t^0_2, \ldots, t^0_d$ из P вектор

$$(f_1(t^0_1, t^0_2, \ldots, t^0_d), f_2(t^0_1, t^0_2, \ldots, t^0_d), \ldots, f_n(t^0_1, t^0_2, \ldots, t^0_d))$$

является решением системы (1);

2) любое решение системы (1) может быть получено из (2) при подходящих значениях параметров.

Опишем алгоритм, позволяющий находить общее решение системы (1).

I. Выяснить совместность системы (для этого надо проверить равенство ранг $A =$ ранг $\overline{A}$).

II. Предположим, что система совместна и при отыскании ранга мы нашли базисный минор матрицы A. Пусть он имеет порядок r. Переставляя уравнения системы и меняя порядок неизвестных, будем считать, что он находится в левом верхнем углу, тогда первые строки образуют максимальную линейно независимую подсистему пространства строк матрицы A. Рассмотрим систему, составленную из первых r уравнений исходной системы:

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1, \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}\,x_1 + a_{r2}\,x_2 + \ldots + a_{rn}\,x_n = b_r. \end{cases} \tag{1$'$}$$

Будем называть ее *базисной системой.* Докажем, что эта более короткая система равносильна системе (1), т. е. их множества решений совпадают.

Обозначим $A_{\text{баз}}$ и $\overline{A}_{\text{баз}}$ матрицу и расширенную матрицу системы (1′) соответственно.

Рассмотрим расширенную матрицу $\overline{A}$ системы (1) и расширенную матрицу $\overline{A}_{\text{баз}}$ базисной системы (1′). Используя тот факт, что всякая строка, входящая в $\overline{A}$ линейно выражается через строки матрицы $\overline{A}_{\text{баз}}$, подберем такую матрицу C, что $C\cdot\overline{A}_{\text{баз}} = \overline{A}$. Для этого обозначим символами $\overline{A}_1,\ \overline{A}_2,\ \ldots,\ \overline{A}_r$ первые r строк системы (1). Они являются строками матрицы $\overline{A}_{\text{баз}}$, т. е.

$$\overline{A}_{\text{баз}} = \begin{pmatrix} \overline{A}_1 \\ \overline{A}_2 \\ \vdots \\ \overline{A}_r \end{pmatrix}.$$

Так как строки $\overline{A}_1,\ \overline{A}_2,\ \ldots,\ \overline{A}_r$ матрицы $\overline{A}$ образуют максимальную линейно независимую подсистему, то остальные строки через них выражаются, т. е. найдутся элементы $c_{ij} \in P$ для которых справедливы равенства

$$\begin{cases} \overline{A}_{r+1} = c_{r+1,1}\,\overline{A}_1 + c_{r+1,2}\,\overline{A}_2 + \ldots + c_{r+1,r}\,\overline{A}_r, \\ \overline{A}_{r+2} = c_{r+2,1}\,\overline{A}_1 + c_{r+2,2}\,\overline{A}_2 + \ldots + c_{r+2,r}\,\overline{A}_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{A}_m = c_{m,1}\,\overline{A}_1 + c_{m,2}\,\overline{A}_2 + \ldots + c_{m,r}\,\overline{A}_r. \end{cases}$$

Рассмотрим матрицу

$$C = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \hline c_{r+1,1} & c_{r+1,2} & \ldots & c_{r+1,r} \\ c_{r+2,1} & c_{r+2,2} & \ldots & c_{r+2,r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \ldots & c_{m,r} \end{array}\right)$$

где вверху стоит единичная матрица степени r. Для нее справедливо равенство $C \cdot \overline{A}_{\text{баз}} = \overline{A}$.

Очевидно, что всякое решение системы (1) является решением системы (1′). Пусть $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ – решение базисной системы (1′). Докажем, что оно является решением всей системы. Подставим

$$\overline{A}\cdot\begin{pmatrix} x_1^0\\ x_2^0\\ \vdots\\ x_n^0\\ -1\end{pmatrix} = (C\cdot\overline{A}_{\text{баз}})\begin{pmatrix} x_1^0\\ x_2^0\\ \vdots\\ x_n^0\\ -1\end{pmatrix} = C\cdot\left(\overline{A}_{\text{баз}}\begin{pmatrix} x_1^0\\ x_2^0\\ \vdots\\ x_n^0\\ -1\end{pmatrix}\right) = C\cdot\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

т. е. $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ – решение системы (1). Таким образом, мы должны научиться решать систему $(1')$, так как она равносильна системе (1).

III. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1r}\,x_r = b_1 - a_{1,r+1}\,x_{r+1} - a_{1,r+2}\,x_{r+2} - \ldots - a_{1n}\,x_n,\\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2r}\,x_r = b_2 - a_{2,r+1}\,x_{r+1} - a_{2,r+2}\,x_{r+2} - \ldots - a_{2n}\,x_n,\\ \dotfill\\ a_{r1}\,x_1 + a_{r2}\,x_2 + \ldots + a_{rr}\,x_r = b_r - a_{r,r+1}\,x_{r+1} - a_{r,r+2}\,x_{r+2} - \ldots - a_{rn}\,x_n,\end{cases}$$

Переменные, входящие в правую часть будем называть *свободными*, а переменные, входящие в левую часть, – *базисными.* Решаем систему относительно базисных переменных, считая, что ее правая часть известна. Так как определитель матрицы системы отличен от нуля, то такие системы мы уже умеем решать. Решая ее относительно $x_1, x_2, \ldots, x_r$, получим решение

$$(L_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), L_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), \ldots, L_r(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n)).$$

Тогда

$$(L_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), L_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), \ldots, L_r(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n)$$

– решение системы (1). Чтобы доказать, что это общее решение, мы должны проверить выполнение условий 1) и 2).

1) Если придать некоторые значения свободным переменным $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ и найти по ним значения

$$L_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), L_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), \ldots, L_r(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n),$$

то построенная n-ка будет решение системы (1).

2) Покажем, что всякое решение системы (1) можно получить из нашей формулы.

Пусть $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_r^0, x_{r+1}^0, x_{r+2}^0, \ldots, x_n^0)$ – некоторое решение системы (1). Придадим значения $x_{r+1} = x_{r+1}^0$, $x_{r+2} = x_{r+2}^0$, $\ldots$, $x_n = x_n^0$ и найдем первые r значений:

$$L_1(x_{r+1}^0, x_{r+2}^0, \ldots, x_n^0), L_2(x_{r+1}^0, x_{r+2}^0, \ldots, x_n^0), \ldots, L_r(x_{r+1}^0, x_{r+2}^0, \ldots, x_n^0).$$

Тогда набор

$$(L_1(x^0_{r+1}, x^0_{r+2}, \ldots, x^0_n), L_2(x^0_{r+1}, x^0_{r+2}, \ldots, x^0_n), \ldots, L_r(x^0_{r+1}, x^0_{r+2}, \ldots, x^0_n), x^0_{r+1}, x^0_{r+2}, \ldots, x^0_n)$$

является решением системы (1). Так как невырожденная система имеет единственное решение, то

$$x^0_1 = L_1(x^0_{r+1}, x^0_{r+2}, \ldots, x^0_n), x^0_2 = L_2(x^0_{r+1}, x^0_{r+2}, \ldots, x^0_n), \ldots, x^0_r = L_r(x^0_{r+1}, x^0_{r+2}, \ldots, x^0_n).$$

Это значит, что произвольное решение можно задать формулой:

$$(L_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), L_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), \ldots, L_r(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n).$$

14.3. Связь неоднородных систем с однородными. Система линейных уравнений называется *однородной,* если все ее свободные члены равны нулю.

По системе линейных уравнений (1) мы можем построить соответствующую ей однородную систему:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = 0, \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = 0. \end{array}\right. \qquad (1_0)$$

Следующая теорема показывает, как связано множество решений неоднородной системы и множество решений однородной.

Т е о р е м а 2. *Если* X^0 – *некоторое решение системы* (1), *то множество решений системы* (1) *есть*

$$\{\text{решение системы } (1)\} = X^0 + \{\text{решение системы } (1_0)\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем системы (1) и (1_0) в матричной форме:

$$A \cdot X = B, \quad A \cdot X = \mathbf{0}.$$

Установим включение $\subseteq$. Пусть Y – некоторое решение системы (1). Надо доказать, что оно представимо в таком виде:

$$Y = X^0 + \text{решение системы } (1_0).$$

Рассмотрим

$$A(Y - X^0) = AY - AX^0 = B - B = \mathbf{0},$$

т. е. $Y - X^0 = Z$ – решение однородной системы. Следовательно $Y = X^0 + Z$.

Обратное включение. Пусть теперь Z – решение системы (1_0). Покажем, что $X^0 + Z$ – решение системы (1). Подставляя в систему, получим

$$A(X^0 + Z) = AX^0 + AZ = B + \mathbf{0} = B.$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 3. *Множество решений однородной системы* (1_0) *является подпространством пространства* P^n.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим, что если Z, W – два решения системы (1_0), а $\alpha, \beta \in P$, то $\alpha\, Z + \beta\, W$ – решение системы (1_0). Имеем

$$A(\alpha\, Y + \beta\, W) = A\,\alpha\, Z + A\,\beta\, W = \alpha\,(A\, Z) + \beta\,(A\, W) = \alpha\,\mathbf{0} + \beta\,\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Таким образом линейная комбинация решений снова есть решение. Теорема доказана.

§ 15. Однородные системы

15.1. Фундаментальные системы решений. Так как все решения однородной системы (1_0) есть подпространство, то можно найти его базу и через нее выразить все множество решений.

О п р е д е л е н и е. База пространства решений однородной системы уравнений называется *фундаментальной системой решений.*

Решение однородной системы сводится к отысканию фундаментальной системы решений. Рассмотрим систему линейных однородных уравнений

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = 0, \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_n = 0. \end{array}\right. \qquad (1_0)$$

Ее *рангом* называется ранг матрицы $A = (a_{ij})$. Если $r = n$, то $X = \mathbf{0}$ – единственное решение.

Предположим, что $r < n$. Будем считать, что базисный минор матрицы системы находится в левом верхнем углу. Рассмотрим подсистему системы (1_0), состоящую из первых r уравнений:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1r}\, x_r = -a_{1,r+1}\, x_{r+1} - a_{1,r+2}\, x_{r+2} - \ldots - a_{1n}\, x_n, \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2r}\, x_r = -a_{2,r+1}\, x_{r+1} - a_{2,r+2}\, x_{r+2} - \ldots - a_{2n}\, x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}\, x_1 + a_{r2}\, x_2 + \ldots + a_{rr}\, x_r = -a_{r,r+1}\, x_{r+1} - a_{r,r+2}\, x_{r+2} - \ldots - a_{rn}\, x_n, \end{array}\right. \qquad (2)$$

где

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

– базисный минор.

В этих обозначениях справедлива

Т е о р е м а. *Пусть задана однородная система линейных уравнений* (1_0), r *– ее ранг,* n *– число неизвестных, причем* $r < n$ *и в системе выделены* $n - r$ *свободных переменных.*

а) *Пусть* D *– произвольный определитель порядка* $n - r$*, отличный от нуля. Беря его строки в качестве значений свободных неизвестных, найдем* $n - r$ *решений системы* (1_0). *Это – фундаментальная система решений системы* (1_0).

б) *всякая фундаментальная система решений системы* (1_0) *может быть получена из некоторого ненулевого определителя при помощи процедуры, описанной в пункте* а).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$D = \begin{vmatrix} d_{1,r+1} & d_{1,r+2} & \dots & d_{1n} \\ d_{2,r+1} & d_{2,r+2} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n-r,r+1} & d_{n-r,r+2} & \dots & d_{n-r,n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Возьмем первую строку этого определителя и подставим вместо свободных переменных в общее решение

$$(L_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n), L_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n), \dots, L_r(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n), x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n),$$

получим вектор

$$u_1 = (d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1r}, d_{1,r+1}, \dots, d_{1n}),$$

подставим вторую строку, получим вектор

$$u_2 = (d_{21}, d_{22}, \dots, d_{2r}, d_{2,r+1}, \dots, d_{2n}),$$

и т. д. Наконец, подставив последнюю строку, получим вектор

$$u_{n-r} = (d_{n-r,1}, d_{n-r,2}, \dots, d_{n-r,r}, d_{n-r,r+1}, \dots, d_{n-r,n}).$$

Построенные векторы образуют множество решений однородной системы (1_0). Чтобы доказать, что они образуют фундаментальную систему решений надо проверить:

1) линейную независимость;

2) максимальность.

Для произвольного вектора $v \in P^n$ символом v^* будем обозначать его конечный отрезок длины $n-r$, т. е., если $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n) \in P^n$, то $v^* = (\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n) \in P^{n-r}$.

Установим пункт 1) от противного. Предположим, что векторы линейно зависимы. Так как строки $u_1, u_2, \ldots, u_{n-r}$ линейно зависимы (т. е. их линейная комбинация обращается в нуль), то и векторы $u_1^*, u_2^*, \ldots, u_{n-r}^*$ линейно зависимы, т. е. определитель

$$D = \begin{vmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ \vdots \\ u_{n-r}^* \end{vmatrix}$$

обращается в нуль, а это не так.

2) Надо доказать, что произвольное решение системы (1_0) есть линейная комбинация системы векторов $u_1, u_2, \ldots, u_{n-r}$. Пусть

$$u = (d_1, d_2, \ldots, d_r, d_{r+1}, d_{r+2}, \ldots, d_n)$$

– решение нашей системы. Рассмотрим векторы $u_1^*, u_2^*, \ldots, u_{n-r}^*$. Они линейно независимы, так как это строки определителя D. В $n-r$-мерном пространстве P^{n-r} они образуют базу. Пусть вектор u^* линейно выражается через эту базу:

$$u^* = \alpha_1 u_1^* + \alpha_2 u_2^* + \ldots + \alpha_{n-r} u_{n-r}^*, \quad \alpha_i \in P.$$

Рассмотрим вектор

$$w = u - (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_{n-r} u_{n-r}) \in P^n,$$

который по теореме 3 из § 14 является решением однородной системы. Очевидно, $w^* = (0, 0, \ldots, 0) \in P^{n-r}$, т. е. w – решение, полученное при нулевых значениях свободных неизвестных. Тогда $L_1, L_2, \ldots, L_r$ в формуле общего решения системы (2) тоже нули (однородная система, матрица которой невырождена имеет только нулевое решение) и $w = (0, 0, \ldots, 0) \in P^n$, т. е.

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_{n-r} u_{n-r}.$$

Следовательно, $u_1, u_2, \ldots, u_{n-r}$ – фундаментальная система решений.

Докажем утверждение б). Пусть задана некоторая фундаментальная система решений:

$$\begin{aligned}
&v_1 = (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1r}, c_{1,r+1}, \ldots, c_{1n}),\\
&v_2 = (c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2r}, c_{2,r+1}, \ldots, c_{2n}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&v_{n-r} = (c_{n-r,1}, c_{n-r,2}, \ldots, c_{n-r,r}, c_{n-r,r+1}, \ldots, c_{n-r,n}).
\end{aligned}$$

Надо показать, что эту систему можно получить при помощи процедуры, описанной в пункте а). Для этого возьмем в качестве D определитель

$$D = \begin{vmatrix} c_{1,r+1} & c_{1,r+2} & \dots & c_{1n} \\ c_{2,r+1} & c_{2,r+2} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-r,r+1} & c_{n-r,r+2} & \dots & c_{n-r,n} \end{vmatrix}$$

и покажем, что $D \neq 0$. Предположим противное, т. е. $D = 0$, тогда между его строками существует линейная зависимость

$$\beta_1 v_1^* + \beta_2 v_2^* + \ldots + \beta_{n-r} v_{n-r}^* = 0, \quad \beta_i \in P,$$

где не все β_i обращаются в нуль. Рассмотрим вектор

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_{n-r} v_{n-r},$$

который по теореме 3 из § 14 является решением системы 1_0. Очевидно, $v^* = 0$, а значит $v = 0$, т. е.

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_{n-r} v_{n-r} = 0,$$

но это невозможно так как $u_1, u_2, \ldots, u_{n-r}$ образуют базис пространства решений, а потому линейно независимы. Следовательно, $D \neq 0$. Теорема доказана.

15.2. База суммы и пересечения двух подпространств. Задано векторное пространство V над полем P размерности n и в нем два подпространства U' и U''. Мы знаем, что сумма $U' + U''$ и пересечение $U' \cap U''$ являются подпространствами. Пусть

$$u_1, u_2, \ldots, u_r$$

– база U', а

$$u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_s$$

– база U''. Требуется найти базу суммы $U' + U''$ и базу пересечения $U' \cap U''$.

Вначале найдем базу суммы. По определению

$$U' + U'' = \{u' + u'' \mid u' \in U', u'' \in U''\}.$$

Следовательно, $U' + U''$ состоит из множества линейных комбинаций векторов u_1, u_2, $\ldots$, u_r, $u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_s$. Выберем из этой системы векторов максимальную линейно независимую подсистему. Это и будет искомая база суммы $U' + U''$.

Найдем теперь базу пересечения. Заметим, что $u \in U' \cap U''$ тогда и только тогда, когда u разлагается как по базе пространства U', так и по базе пространства U'', т. е.

$$u = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i = \sum_{i=r+1}^{s} \alpha_i u_i. \tag{3}$$

Зафиксируем в V какую-нибудь базу $e_1, e_2, \ldots, e_n$, и пусть в этой базе вектор u_i имеет следующие координаты:

$$[u_i] = (u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{in}), \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Тогда из (3) получим систему

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i\, u_{ik} = \sum_{i=r+1}^{s} \alpha_i\, u_{ik}, \quad 1 \le k \le n,$$

или, перенося все слагаемые в левую часть, приходим к системе линейных однородных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i\, u_{ik} - \sum_{i=r+1}^{s} \alpha_i\, u_{ik} = 0, \quad 1 \le k \le n, \tag{4}$$

с неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$.

Пусть

$$\alpha^{(l)} = (\alpha_1^{(l)}, \alpha_2^{(l)}, \ldots, \alpha_r^{(l)}, \alpha_{r+1}^{(l)}, \ldots, \alpha_s^{(l)}), \quad 1 \le l \le t,$$

– фундаментальная система решений системы (4). Утверждается, что векторы

$$u^{(l)} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^{(l)}\, u_i = \sum_{i=r+1}^{s} \alpha_i^{(l)}\, u_i, \quad 1 \le l \le t,$$

образуют базу пересечения $U' \cap U''$. Очевидно, все они лежат в пересечении. Проверим, что они линейно независимы. Пусть

$$\sum_{l=1}^{t} \gamma^{(l)}\, u^{(l)} = 0, \quad \gamma^{(l)} \in P.$$

Надо доказать, что все $\gamma^{(l)} = 0$. Имеем

$$\sum_{l=1}^{t} \gamma^{(l)} \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i^{(l)}\, u_i \right) = \sum_{l=1}^{t} \gamma^{(l)} \left(\sum_{i=r+1}^{s} \alpha_i^{(l)}\, u_i \right) = 0.$$

Переставляя знаки суммирования, получим

$$\sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{l=1}^{t} \gamma^{(l)}\, \alpha_i^{(l)} \right) u_i = \sum_{i=r+1}^{s} \left(\sum_{l=1}^{t} \gamma^{(l)}\, \alpha_i^{(l)} \right) u_i = 0.$$

Отсюда, учитывая, что каждая из систем векторов $u_1, u_2, \ldots, u_r$ и $u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_n$ линейно независима, получим равенство

$$\sum_{l=1}^{t} \gamma^{(l)}\, \alpha_i^{(l)} = 0$$

при каждом $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, т. е.

$$\sum_{l=1}^{t} \gamma^{(l)}\, \alpha^{(l)} = 0.$$

А так как множество векторов $\{\alpha^{(l)}\}$ линейно независимо, то все $\gamma^{(l)} = 0$.

Докажем максимальность. Пусть $v \in U' \cap U''$ и

$$v = \sum_{i=1}^{r} \beta_i\, u_i = \sum_{i=r+1}^{s} \beta_i\, u_i,$$

при некоторых β_i из P. Обозначим $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)$ и учитывая, что $\{\alpha^{(l)}\}$ – фундаментальная система решений, имеем

$$\beta = \sum_{l=1}^{t} \delta^{(l)}\, \alpha^{(l)}$$

при подходящих $\delta^{(l)} \in P$. Покажем, что

$$v = \sum_{l=1}^{t} \delta^{(l)}\, u^{(l)}.$$

Действительно,

$$\sum_{l=1}^{t} \delta^{(l)}\, u^{(l)} = \sum_{l=1}^{t} \delta^{(l)} \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i^{(l)}\, u_i \right) = \sum_{l=1}^{t} \delta^{(l)} \left(\sum_{i=r+1}^{s} \alpha_i^{(l)}\, u_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{l=1}^{t} \delta^{(l)}\, \alpha_i^{(l)} \right) u_i = \sum_{i=r+1}^{s} \left(\sum_{l=1}^{t} \delta^{(l)}\, \alpha_i^{(l)} \right) u_i = \sum_{i=1}^{r} \beta_i\, u_i = \sum_{i=r+1}^{s} \beta_i\, u_i = v,$$

что и требовалось доказать.

§ 16. Теорема Фредгольма

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1, \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = b_m. \end{cases}$$

Вводя матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

запишем систему в таком виде

$$AX = B. \tag{1}$$

Также будем рассматривать систему линейных однородных уравнений

$$AX = \mathbf{0} \tag{1_0}$$

и транспонированную систему

$$A^t Y = \mathbf{0}, \tag{2}$$

однородных уравнений от неизвестных

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

где A^t – матрица, транспонированная к A.

Чтобы сформулировать теорему дадим такое

О п р е д е л е н и е. Два вектор-столбца

$$u = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}, \quad \alpha_i \in P, \quad v = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}, \quad \beta_i \in P,$$

называются *ортогональными*, если

$$u^t\, v = \alpha_1\,\beta_1 + \alpha_2\,\beta_2 + \ldots + \alpha_m\,\beta_m = 0.$$

Справедлива

Т е о р е м а Ф р е д г о л ь м а. I. (Существование.) *Система* (1) *тогда и только тогда совместна, когда ее столбец свободных членов ортогонален каждому решению однородной транспонированной системы, т. е.* $B^t\,Y^0 = \mathbf{0}$ *для любого* Y^0, *удовлетворяющего системе* (2).

II. (Единственность.) *Система* (1) *имеет единственное решение тогда и только тогда, когда система* (1_0) *имеет только нулевое решение.*

III. (Число решений.) *Если матрица* A – *квадратная, то системы* (1_0) *и* (2) *имеют одно и то же число линейно независимых решений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. I. Пусть система совместна и $A\,X^0 = B$, т. е. X^0 – решение. Предположим, что Y^0 – решение системы (2), т. е. $A^t\,Y^0 = \mathbf{0}$. Надо доказать, что $B^t\,Y^0 = 0$. Имеем

$$B^t\,Y^0 = (X^0\,A^t)\,Y^0 = (X^0)^t\,(A^t\,Y^0) = (X^0)^t\,\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Докажем обратное утверждение. Пусть столбец свободных членов ортогонален каждому решению однородной транспонированной системы, т. е. из того, что $A^tY^0 = \mathbf{0}$ следует, что $B^tY^0 = 0$. Надо доказать, что система (1) совместна. После транспонирования получаем, что из равенства $(Y^0)^tA = \mathbf{0}$ следует равенство $(Y^0)^tB = 0$. Следовательно, линейная комбинация строк матрицы A связывает и свободные члены. Отсюда

$$\text{ранг}\,A = \text{ранг}\,\overline{A},$$

где $\overline{A} = (A|B)$ – расширенная матрица системы. Поэтому система (1) совместна.

II. По теореме 2 из § 14 всякое решение системы (1) есть сумма некоторого частного решения X^0 и решения однородной системы. Отсюда следует, что если решение системы (1) единственно, то однородная система может иметь только нулевое решение.

III. Если r – ранг матрицы A, n – число ее столбцов, то фундаментальная система решений однородной системы (1_0) состоит из $n - r$ векторов. Так как транспонированная матрица A^t также имеет ранг r, то и фундаментальная система решений системы (2) также состоит из $n - r$ векторов.

§ 17. Фактор-пространства

17.1. Эквивалентности и фактор-множества. Бинарное отношение $\sim$ на множестве M называется *отношением эквивалентности* если выполнены следующие три условия:

а) *рефлексивность*: для всякого $x \in M$ справедливо $x \sim x$;

б) *симметричность*: для любых x и y из M из того, что $x \sim y$ следует, что $y \sim x$;

в) *транзитивность*: для любых x, y, z из M из того, что $x \sim y$ и $y \sim z$ следует, что $x \sim z$.

Примеры. 1) Если на множестве $\mathbb{Q}$ рассмотреть отношение $<$, то очевидно, что оно транзитивно, но не рефлексивно и не симметрично. Если на этом же множестве рассмотреть отношение $\leq$, то оно рефлексивно и транзитивно, но не симметрично. Отношение же $=$ является отношением эквивалентности так как оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

2) Рассмотрим множество всех треугольников на плоскости. Нетрудно проверить, что отношение подобия будет отношением эквивалентности.

Если на множестве M задано отношение эквивалентности $\sim$, то оно распадается на классы эквивалентности:

$$K_a = \{x \in M \mid x \sim a\},$$

которые называются *классами смежности.* Эти классы либо совпадают, либо не имеют общих элементов. Действительно, предположим, что два класса S и T пересекаются и $c \in S \cap T$. Выберем два произвольных элемента $a \in S$ и $b \in T$. Тогда $c \sim a$ и $c \sim b$, но тогда в силу симметричности $a \sim c$, а в силу транзитивности $a \sim b$. Следовательно $S = T$.

Определение. Множество смежных классов называется *фактор-множеством множества M по эквивалентности* $\sim$ и обозначается $M/_{\sim}$.

Если множество разбито на непересекающиеся классы, то можно ввести отношение эквивалентности, полагая, что два элемента эквивалентны, если они лежат в одном классе. Нетрудно убедиться, что это отношение действительно является отношением эквивалентности. Следовательно, ввести на множестве отношение эквивалентности или разбить на смежные классы - это одно и то же.

17.2. Фактор-пространства. Пусть задано векторное пространство V над полем P и U – некоторое его подпространство. Будем говорить, что векторы x и y из V *эквивалентны по модулю* U и писать $x \sim y (\mathrm{mod}\, U)$, если $x - y \in U$.

Покажем, что так введенное отношение является отношением эквивалентности. Действительно,

а) так как $0 = x - x \in U$, то $x \sim x$ и рефлексивность выполняется;

б) пусть $x \sim y$, т. е. $x - y \in U$, но тогда $y - x = -(x - y) \in U$, т. е., если вектор лежит в подпространстве, то и противоположный лежит там же, следовательно, $y \sim x$ и симметричность выполняется;

в) пусть $x \sim y$ и $y \sim z$, надо доказать, что $x \sim z$. Иными словами, из того, что $x - y \in U$ и $y - z \in U$ следует, что $x - z \in U$. Действительно,

$$x - z = (x - y) + (y - z) \in U.$$

Таким образом, введенное отношение, действительно, является отношением эквивалентности и множество V распадается на классы эквивалентности: V/U. Для любого элемента a из V обозначим

$$a + U = \{a + u \mid u \in U\}.$$

Справедлива

Л е м м а. *Каждый класс смежности K_a, $a \in V$, из V/U имеет вид*

$$K_a = a + U.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Установим включение $\subseteq$. Если $x \sim a$, то $x - a = u \in U$ и $x = a + u$. Обратное включение. Если $a + u = x$, где $u \in U$, то $x - a \in U$, а потому $x \sim a$.

Из этой леммы следует, что V распадается на смежные классы и каждый класс имеет такой вид $a + U$. Теперь мы хотим на фактор множестве V/U определить структуру векторного пространства над полем P (над тем же полем над которым определялось векторное пространство V).

О п р е д е л е н и е. Определим *сумму двух смежных классов* равенством

$$(a + U) + (b + U) = a + b + U$$

и умножение класса на скаляр

$$\alpha(a + U) = \alpha a + U.$$

Т е о р е м а 1. *Данные выше определения операций сложения и умножения на скаляр не зависят от случайного выбора представителей смежных классов. Относительно этих операций множество V/U является векторным пространством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим некоторый класс $a + U$. Выбирая другой представитель, зададим его в виде $a' + U$. Аналогично, класс $b + U$ зададим в виде $b' + U$. Нам надо доказать следующие равенства

$$a + b + U = a' + b' + U, \quad \alpha a + U = \alpha a' + U,$$

которые и означают, что определенные выше операции суммы и умножения на скаляр не зависят от выбора представителей. Из равенства классов

$$a + U = a' + U, \quad b + U = b' + U$$

имеем включения

$$a - a' \in U, \quad b - b' \in U,$$

но тогда

$$(a+b)-(a'+b')=(a-a')+(b-b')\in U,\quad \alpha a-\alpha a'=\alpha(a-a')\in U$$

и первая часть теоремы установлена.

Чтобы проверить, что V/U является векторным пространством, надо проверить аксиомы абелевой группы и аксиомы, связывающие скаляры и векторы. Аксиома ассоциативности сложения:

$$[(a+U)+(b+U)]+(c+U)=(a+U)+[(b+U)+(c+U)]$$

равносильна равенству

$$(a+b)+c+U=a+(b+c)+U,$$

справедливость которого следует из ассоциативности сложения в V.

Коммутативность сложения проверяется аналогично.

В качестве нулевого класса возьмем класс $0+U=U$. Тогда

$$(a+U)+(0+U)=a+U.$$

В качестве противоположного класса для $a+U$ возьмем класс $-(a+U)=-a+U$. Легко убедиться, что

$$(a+U)+(-a+U)=0+U=U.$$

Проверяем смешанные аксиомы:

$$\begin{aligned}&\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B,\\&(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A,\\&(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A),\\&1\cdot A=A,\end{aligned}$$

где $\alpha,\beta\in P,\ A,B\in V/U$.

Проверим первую аксиому:

$$\alpha\left[(a+U)+(b+U)\right]=\alpha(a+U)+\alpha(b+U).$$

Левую часть этого равенства представим в виде

$$\alpha\left[(a+U)+(b+U)\right]=\alpha(a+b)+U.$$

Преобразуем правую часть:

$$\alpha(a+U)+\alpha(b+U)=(\alpha a+U)+(\alpha b+U)=(\alpha a+\alpha b)+U.$$

Так как они равны, то аксиома установлена. Остальные аксиомы проверяются аналогично. Теорема доказана.

17.3. Размерность фактор-пространства. Связь между размерностями пространства, подпространства и соответствующего фактор-пространства дает

Т е о р е м а 2. *Размерность фактор-пространства V/U равна размерности V минус размерность U, т. е.*

$$\dim(V/U) = \dim V - \dim U.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем в подпространстве U произвольную базу $e_1, e_2, \ldots, e_r$ и дополним её векторами $e_{r+1}, e_{r+2}, \ldots, e_n$ до базы всего пространства V. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что классы

$$e_{r+1} + U, e_{r+2} + U, \ldots, e_n + U$$

образуют базу V/U.

Проверим линейную независимость. Пусть

$$\alpha_{r+1}(e_{r+1} + U) + \alpha_{r+2}(e_{r+2} + U) + \ldots + \alpha_n(e_n + U) = U$$

Надо доказать, что $\alpha_{r+1} = \alpha_{r+2} = \ldots = \alpha_n = 0$. Перепишем наше равенство в таком виде:

$$\alpha_{r+1}e_{r+1} + \alpha_{r+2}e_{r+2} + \ldots + \alpha_n e_n + U = U.$$

Это равносильно тому, что

$$\alpha_{r+1}e_{r+1} + \alpha_{r+2}e_{r+2} + \ldots + \alpha_n e_n \in U,$$

но если некоторый вектор лежит в U, то он раскладывается по базе пространства U. Следовательно, имеем равенство

$$\alpha_{r+1}e_{r+1} + \alpha_{r+2}e_{r+2} + \ldots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_r e_r.$$

Учитывая линейную независимость векторов $e_1, e_2, \ldots, e_r$, $e_{r+1}, e_{r+2}, \ldots, e_n$, заключаем, что все $\alpha_i = 0$.

Докажем максимальность. Рассмотрим некоторый класс $v + U$. Надо представить его как линейную комбинацию базисных классов. Для вектора v справедливо равенство

$$v = \gamma_1\, e_1 + \gamma_2\, e_2 + \ldots + \gamma_r\, e_r + \gamma_{r+1}\, e_{r+1} + \ldots \gamma_n\, e_n.$$

Тогда

$$v + U = \gamma_1\,(e_1 + U) + \gamma_2\,(e_2 + U) + \ldots + \gamma_r\,(e_r + U) + \gamma_{r+1}\,(e_{r+1} + U) + \ldots + \gamma_n\,(e_n + U) =$$

$$= \gamma_1\,(e_1 + U) + \gamma_2\,(e_2 + U) + \ldots + \gamma_r\,(e_r + U) + U.$$

Максимальность установлена.