Глава 5

ЕВКЛИДОВЫ И УНИТАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 37. Простейшие свойства евклидовых и унитарных пространств

37.1. Аксиоматика и примеры. Будем рассматривать векторное пространство V либо над полем вещественных чисел, либо над полем комплексных чисел. Вводя новую операцию: скалярного произведения:

$$(\, , \,) : V \times V \longrightarrow P,$$

получим в первом случае евклидово пространство, а во втором – унитарное. Определения этих пространств очень похожи и мы будем давать их параллельно, рассматривая в левой части страницы случай поля вещественных чисел, а в правой – случай поля комплексных чисел.

Евклидово пространство	*Унитарное пространство*
$-$векторное пространство над $\mathbb{R}$	$-$векторное пространство над $\mathbb{C}$
$(\ ,\ ) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}.$	$(\ ,\ ) : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}.$
Аксиомы:	Аксиомы:
1. $(a, b) = (b, a)$,	1. $(a, b) = \overline{(b, a)}$,
2. $(a' + a'', b) = (a', b) + (a'', b)$,	2. $(a' + a'', b) = (a', b) + (a'', b)$,
3. $(\alpha a, b) = \alpha(a, b), \quad \alpha \in \mathbb{R}$	3. $(\alpha a, b) = \alpha(a, b), \quad \alpha \in \mathbb{C}$
4. $(a, a) > 0,$ при $a \neq 0$,	4. $(a, a) > 0,$ при $a \neq 0$.
Пример скалярного произведения:	Пример скалярного произведения:
$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$, где $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \quad b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.	$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i}$, где $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \quad b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.
Следствия из аксиом:	Следствия из аксиом:
$2'$. $(a, b' + b'') = (a, b') + (a, b'')$,	$2'$. $(a, b' + b'') = (a, b') + (a, b'')$,
$3'$. $(a, \beta b) = \beta(a, b)$,	$3'$. $(a, \beta b) = \overline{\beta}(a, b)$.

Докажем $3'$ для унитарного пространства. Для евклидова годится это же рассуждение. Нужное равенство следует из цепочки, где над знаом равенства указан номер соответствующей аксиомы:

$$(a, \beta b) \overset{1}{=} \overline{(\beta b, a)} \overset{3}{=} \overline{\beta (b, a)} = \overline{\beta}\,\overline{(b, a)} \overset{1}{=} \overline{\beta}(b, a).$$

П р и м е р скалярного произведения на пространстве функций. Пусть V – множество вещественнозначных (комплекснозначных) функций непрерывных на отрезке $[0, 1]$. Тогда

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t, \quad \left(\text{соответственно } (f, g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t\right).$$

37.2. Ортонормированные системы векторов.

О п р е д е л е н и е. Пусть V – евклидово пространство. Векторы a и b из V называются *ортогональными*, если $(a, b) = 0$.

О п р е д е л е н и е. Вектор $a \in V$ называется *нормированным*, если $(a, a) = 1$.

О п р е д е л е н и е. Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_s$ называется *ортонормированной*, если

$$(a_i, a_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Т е о р е м а 1. 1) *Всякая ортонормированная система векторов линейно независима.* 2) *Всякую линейно независимую систему векторов можно переделать в ортонормированную с той же самой линейной оболочкой.* 3) *В ортонормированной базе для векторов $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ скалярное произведение определяется равенством*

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i. \tag{1}$$

4) *Если в какой-то базе скалярное произведение задается формулой* (1), *то эта база ортонормированная.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_s$ – ортонормированная система векторов. Рассмотрим их линейную комбинацию и приравняем к нулю:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s = 0.$$

Умножим обе части скалярно на a_i:

$$\alpha_1 (a_1, a_i) + \alpha_2 (a_2, a_i) + \ldots + \alpha_s (a_s, a_i) = 0.$$

Учитывая, что

$$(a_i, a_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

получаем равенство

$$\alpha_i = (0, a_i).$$

Из следующей цепочки равенств

$$(0, a) = (b - b, a) \stackrel{2}{=} (b, a) + (-b, a) \stackrel{3}{=} (b, a) - (b, a) = 0,$$

заключаем, что $(0, a_i) = 0$, а потому все α_i равны нулю, т. е. ортонормированная система линейно независима.

2) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_s$ – линейно независимая система векторов. Приведем эту систему к ортогональной с той же линейной оболочкой. В качестве первого вектора

новой системы возьмем $b_1 = a_1$. Допустим, что соответствующие попарно ортогональные векторы $b_1, b_2, \ldots, b_k$ уже построены и при этом справедлива система равенств:

$$\begin{cases} b_1 & = a_1, \\ \beta_{21} b_1 + b_2 & = a_2, \\ \ldots & \ldots \\ \beta_{k1} b_1 + \beta_{k2} b_2 + \ldots + \beta_{k,k-1} b_{k-1} + b_k & = a_k. \end{cases}$$

Ищем вектор b_{k+1} из соотношения

$$\beta_{k+1,1} b_1 + \beta_{k+1,2} b_2 + \ldots + \beta_{k+1,k} b_k + b_{k+1} = a_{k+1}.$$

Требуется, чтобы $(b_{k+1}, b_j) = 0$ при $j = 1, 2, \ldots, k$. Умножим обе части нашего равенства на b_j, получим

$$\beta_{k+1,1}(b_1, b_j) + \ldots + \beta_{k+1,j}(b_j, b_j) + \ldots + (b_{k+1}, b_j) = (a_{k+1}, b_j).$$

Отсюда находим:

$$\beta_{k+1,j} = \frac{(a_{k+1}, b_j)}{(b_j, b_j)}.$$

Надо заметить, что все b_j отличны от нуля. Если $b_j = 0$, то в j-й строке нашей системы стоит равенство

$$\beta_{j1} b_1 + \beta_{j2} b_2 + \ldots + \beta_{j,j-1} b_{j-1} = a_j,$$

а так как векторы $b_1, b_2, \ldots, b_{j-1}$ выражаются через векторы $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}$, то приходим к равенству

$$a_j = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_{j-1} a_{j-1},$$

которое противоречит тому, что векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно независимы.

Нормируя векторы $b_1, b_2, \ldots, b_s$, получим искомую систему векторов:

$$c_i = \frac{1}{\sqrt{(b_i, b_i)}} b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

3) Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормированная база пространства V. Рассмотрим два вектора:

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n,$$

$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n.$$

Тогда

$$(a, b) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i.$$

4) Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – база пространства V, в которой скалярное произведение определяется равенством (1). Рассмотрим координаты двух базисных векторов:

$$[e_i] = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0),$$

где 1 стоит на i-м месте,

$$[e_j] = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0),$$

где 1 стоит на j-м месте. Тогда

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j, \end{cases}$$

но это и означает, что $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образуют ортонормированную базу. Теорема доказана.

Процесс, описанный в пункте 2 называется *процессом ортогонализации Грама-Шмидта.*

37.3. Изоморфизм евклидовых пространств.

О п р е д е л е н и е. Евклидовы пространства V и V' *изоморфны*, если существует взаимно однозначное отображение $\varphi : V \xrightarrow{\textit{на}} V'$, удовлетворяющее условиям:

1) $(a + b)\varphi = a\varphi + b\varphi$;

2) $(\alpha a)\varphi = \alpha(a\varphi)$;

3) $(a\varphi, b\varphi) = (a, b)$;

для всех $\alpha \in \mathbb{R}$, $a, b \in V$.

Т е о р е м а 2. *Евклидовы пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\Rightarrow$. Если евклидовы пространства изоморфны, то они изоморфны как векторные пространства. Следовательно, их размерности совпадают.

$\Leftarrow$. Пусть $\dim V = \dim V'$ и $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормированная база V; $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ – ортонормированная база V'. Рассмотрим отображение

$$\varphi : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e'_i.$$

Это отображение однозначно и *на*, кроме того, если

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n, \quad b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$$

–два вектора из V, то

$$(a, b) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i, \quad (a\varphi, b\varphi) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e'_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j e'_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i,$$

т. е. $(a,b) = (a\varphi, b\varphi)$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Любое евклидово пространство изоморфно* $\mathbb{R}^n$ *для некоторого натурального* n.

37.4. Норма вектора. Пусть V – евклидово пространство.

О п р е д е л е н и е. *Нормой вектора* u из V называется число $||u|| = \sqrt{(u,u)}$.

Л е м м а 1. *Норма вектора обладает следующими свойствами*:

а) $|(u,v)| \leq ||u|| \cdot ||v||$ – *неравенство Коши-Буняковского*;

б) $||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$ – *неравенство треугольника*;

в) $||\alpha u|| = |\alpha| \cdot ||u||$,

для любых векторов u, v *и скаляра* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем

$$0 \leq (u + \lambda v, u + \lambda v) = (u,u) + 2\lambda(u,v) + \lambda^2(v,v).$$

Это квадратный трехчлен относительно λ, так как он принимает неотрицательные значения, то его дискриминант меньше либо равен нуля, т. е.

$$4(u,v)^2 - 4(u,u)(v,v) \leq 0,$$

откуда

$$|(u,v)| \leq ||u|| \cdot ||v||.$$

Это и есть неравенство Коши-Буняковского.

б) Для любых u, v из V имеем

$$||u+v||^2 = (u+v, u+v) = (u,u) + 2(u,v) + (v,v) \leq ||u||^2 + 2||u|| \cdot ||v|| + ||v||^2 = (||u|| + ||v||)^2,$$

откуда

$$||u+v|| \leq ||u|| + ||v||.$$

в) Из цепочки равенств

$$||\alpha u||^2 = (\alpha u, \alpha u) = \alpha^2(u,u) = \alpha^2 ||u||^2$$

имеем

$$||\alpha u|| = |\alpha| \cdot ||u||.$$

Лемма доказана.

Неравенство Коши-Буняковского в координатной форме:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2}.$$

Л е м м а 2. *Любое линейное преобразование φ евклидова пространства V ограничено, т. е. существует $M \in \mathbb{R}$ такое, что*

$$||u\varphi|| \leq M||u||$$

для всех u из V.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормированная база V. Действуя преобразованием φ, получим

$$e_i\varphi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}e_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Выберем вектор

$$u = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$$

из V и подействуем на него φ:

$$u\varphi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(e_i\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}e_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\alpha_{ij} \right) e_j.$$

Отсюда

$$||u\varphi||^2 = \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} \xi_i\alpha_{ij} \right|^2,$$

и ввиду неравенства Коши-Буняковского

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} \xi_i\alpha_{ij} \right|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}|^2 \right) = ||u||^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|^2 = ||u||^2 \sum_{i,j=1}^{n} |\alpha_{ij}|^2.$$

Поэтому

$$||u\varphi|| \leq M \cdot ||u||,$$

где

$$M = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |\alpha_{ij}|^2}.$$

Лемма доказана.

37.5. Норма линейного преобразования. Из доказанной леммы следует, что отношение

$$\frac{||u\varphi||}{||u||}$$

ограничено. Поэтому мы можем дать такое

О п р е д е л е н и е. *Нормой линейного преобразования* φ евклидова пространства V называется число

$$||\varphi|| = \sup_{u \neq 0} \frac{||u\varphi||}{||u||} = \sup_{||u||=1} ||u\varphi||.$$

Л е м м а 3. *Если* φ *и* ψ *– линейные преобразования евклидова пространства* V, *то*

а) $||\varphi + \psi|| \leq ||\varphi|| + ||\psi||$;

б) $||\varphi \cdot \psi|| \leq ||\varphi|| \cdot ||\psi||$;

в) $||\alpha\varphi|| = |\alpha| \cdot ||\varphi||$;

г) $||\varphi|| > 0$ если $\varphi \neq 0$ и $||0|| = 0$;

д) *если* α *– собственное значение* φ, *то* $||\varphi|| \geq |\alpha|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Следует из цепочки равенств и неравенств:

$$||\varphi+\psi|| = \sup_{||u||=1} ||u(\varphi+\psi)|| = \sup_{||u||=1} ||u\varphi+u\psi|| \leq \sup_{||u||=1} ||u\varphi|| + \sup_{||u||=1} ||u\psi|| = ||\varphi|| + ||\psi||.$$

б) Следует из цепочки равенств и неравенств:

$$||\varphi \cdot \psi|| = \sup_{||u||=1} ||(u\varphi)\psi|| \leq ||\psi|| \sup_{||u||=1} ||u\varphi|| = ||\varphi|| \cdot ||\psi||.$$

в) Следует из цепочки равенств и неравенств:

$$||\alpha\varphi|| = \sup_{||u||=1} ||u(\alpha\varphi)|| = |\alpha| \sup_{||u||=1} ||u\varphi|| = |\alpha| ||\varphi||.$$

г) Пусть $w\varphi \neq 0$. Тогда

$$\frac{||w\varphi||}{||w||} > 0$$

и следовательно, $||\varphi|| > 0$.

д) Пусть $w\varphi = \alpha w$. Тогда $||w\varphi|| = ||\alpha w|| = |\alpha| ||w||$ и деля на $||w||$, получим

$$\frac{||w\varphi||}{||w||} = \frac{|\alpha| ||w||}{||w||} = |\alpha|.$$

Лемма доказана.

37.6. Сопряженные отображения. Пусть V, W – два евклидовых пространства и

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

– линейное отображение одного на другое.

О п р е д е л е н и е. Линейное отображение $\varphi^* : W \longrightarrow V$ называется *сопряженным* к φ, если для любых $x \in V$ и $y \in W$ справедливо равенство

$$(x\varphi, y) = (x, y\varphi^*).$$

Т е о р е м а 3. *Для всякого линейного отображения $\varphi : V \longrightarrow W$ существует единственное сопряженное отображение $\varphi^* : W \longrightarrow V$. Если в V и W выделены ортонормированные базы, то в них $[\varphi^*] = [\varphi]^t$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем вначале, что если φ^* существует, то оно единственно. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормированная база V. Если $x \in V$, то

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Тогда $x_j = (x, e_j)$, т. е.

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i.$$

Далее имеем

$$(x, y\varphi^*) = (x\varphi, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x, e_i)(e_i\varphi), y \right) = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)(e_i\varphi, y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x, (e_i\varphi, y)e_i = \left(x, \sum_{i=1}^{n} (e_i\varphi, y) e_i \right).$$

Заметим, что если $(x, z) = (x, t)$ для любого вектора x из V, то $z = t$. Действительно, из равенства $(x, z) = (x, t)$ получаем $(x, z - t) = 0$. Взяв в качестве x вектор $x = z - t$, из аксиом векторного пространства заключаем, что $z = t$.

Используя это свойство, видим, что

$$y\varphi^* = \sum_{i=1}^{n} (e_i\varphi, y) e_i,$$

и единственность доказана.

Докажем существование. Положим

$$y\varphi^* = \sum_{i=1}^{n} (e_i\varphi, y)e_i \text{ для любого } y \in W.$$

Проверим, что определенное таким образом отображение φ^* линейно. Имеем

$$(\alpha y_1+\beta y_2)\varphi^* = \sum_{i=1}^{n}(e_i\varphi, \alpha y_1+\beta y_2)e_i = \sum_{i=1}^{n}\left[\alpha(e_i\varphi, y_1) + \beta(e_i\varphi, y_2)\right]e_i = \alpha(y_1\varphi^*)+\beta(y_2\varphi^*).$$

Далее

$$(x, y\varphi^*) = \left(x, \sum_{i=1}^{n}(e_i\varphi, y)e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(x, e_i)(e_i\varphi, y) = \sum_{i=1}^{n}\left((x, e_i)(e_i\varphi), y\right) = (x\varphi, y),$$

и существование установлено.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть

$$e_1, e_2, \ldots, e_n - \text{ ортонормированная база } V;$$

$$f_1, f_2, \ldots, f_m - \text{ ортонормированная база } W.$$

Действуя на эти базы преобразованиями φ и φ^* соответственно, получим

$$e_i\varphi = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} f_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

т. е. $[\varphi] = (\alpha_{kl})$;

$$f_j\varphi^* = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ji} e_i, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

т. е. $[\varphi^*] = (\beta_{kl})$. Из этих равенств

$$(e_k\varphi, f_l) = \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{kj} f_j, f_l\right) = \alpha_{kl};$$

$$(e_k, f_l\varphi^*) = \left(e_k, \sum_{i=1}^{n} \beta_{li} e_i\right) = \beta_{lk}.$$

Учитывая равенство $(e_k\varphi, f_l) = (e_k, f_l\varphi^*)$, заключаем, что $\alpha_{kl} = \beta_{lk}$. Следовательно, $[\varphi^*] = [\varphi]'$. Теорема доказана.

У п р а ж н е н и е. Для сопряженных отображений справедливы равенства
1) $(\varphi^*)^* = \varphi$;

2) $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$;

3) $(\varphi \cdot \psi)^* = \psi^* \cdot \varphi^*$;

4) $(\alpha\varphi)^* = \alpha\varphi^*$;

5) $(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$.

§ 38. Ортогональные преобразования

38.1. Определения и свойства ортогональных преобразований.

Т е о р е м а 1. *Пусть V – евклидово пространство, φ – его линейное преобразование. Тогда следующие условия равносильны*:

а) $||a\varphi|| = ||a||$ *для любого a из V*;

б) φ *сохраняет скалярное произведение:* $(a\varphi, b\varphi) = (a, b)$ *для любых a и b из V*;

в) φ *переводит всякую ортонормированную базу в ортонормированную*;

г) φ *переводит некоторую ортонормированную базу в ортонормированную*;

д) *в некоторой ортонормированной базе матрица* $[\varphi]$ *ортогональна* (т. е. $[\varphi][\varphi]^t = E$);

е) *во всякой ортонормированной базе матрица* $[\varphi]$ *ортогональна.*

При любом из этих условий преобразование φ называется *ортогональным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) $\Rightarrow$ б). Имеем

$$||(a+b)\varphi|| = ||a+b||.$$

По определению нормы отсюда следует равенство

$$((a+b)\varphi, (a+b)\varphi) = (a+b, a+b).$$

Воспользовавшись линейностью преобразования φ и свойством скалярного произведения, получим

$$(a\varphi, a\varphi) + 2(a\varphi, b\varphi) + (b\varphi, b\varphi) = (a, a) + 2(a, b) + (b, b).$$

Учитывая, что норма вектора сохраняется, имеем равенства:

$$(a\varphi, a\varphi) = (a, a), \quad (b\varphi, b\varphi) = (b, b).$$

Следовательно
$$(a\varphi, b\varphi) = (a, b).$$
б) $\Rightarrow$ в). Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ – ортонормированная база, т. е. $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. Тогда
$$(e_i\varphi, e_j\varphi) = (e_i, e_j) = \delta_{ij},$$
т. е. $e_1\varphi, e_2\varphi, \dots, e_n\varphi$ – ортонормированная база.

в) $\Rightarrow$ г). Тривиально.

г) $\Rightarrow$ д). Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ – ортонормированная база и $e_1\varphi, e_2\varphi, \dots, e_n\varphi$ – ортонормированная база. Тогда
$$e_i\varphi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} e_k$$
и надо показать, что матрица $A = (\alpha_{ik})$ ортогональна. Имеем
$$\delta_{ij} = (e_i\varphi, e_j\varphi) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} e_k, \sum_{l=1}^{n} \alpha_{jl} e_l\right) = \sum_{k,l=1}^{n} \alpha_{ik}\alpha_{jl}(e_k, e_l) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\alpha_{jk},$$
но это и означает, что $A \cdot A^t = E$, т. е. матрица $A = [\varphi]$ ортогональна.

д) $\Rightarrow$ е). Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ – ортонормированная база
$$e_i\varphi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} e_k, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$
и матрица $[\varphi] = (\alpha_{ik})$ ортогональна. Пусть $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ – другая ортонормированная база. Тогда $e' = Te$, где T – матрица перехода. Мы знаем, что $[\varphi]$ – матрица преобразования φ в базе e ортогональна. Надо доказать, что $[\varphi]'$ – матрица преобразования φ в базе e' тоже ортогональна. Вспоминая связь между матрицами преобразования в разных базах, имеем равенство
$$[\varphi]' = T[\varphi]T^{-1}.$$
Если при этом T – ортогональная матрица, то и $[\varphi]'$ будет ортогональной, так как ортогональные матрицы образуют группу. Имеем систему равенств
$$e'_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} e_k, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad T = (t_{ik}).$$
Учитывая, что e' – ортонормированная база,
$$(e'_i, e'_j) = \delta_{ij},$$

получим

$$\delta_{ij} = (e'_i, e'_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} t_{ik}e_k, \sum_{l=1}^{n} t_{jl}e_k, \right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} t_{ik}t_{jl}(e_k, e_l) = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}t_{jk},$$

т. е. $E = TT^t$, но это и означает, что матрица T ортогональна.

е) $\Rightarrow$ а). Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормированная база и в ней матрица $[\varphi]$ ортогональна. Возьмем два вектора $a = [a]e$, $b = [b]e$, где

$$[a] = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \quad [b] = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n),$$

и рассмотрим их скалярное произведение

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i = [a][b]^t.$$

С другой стороны,

$$||a\varphi||^2 = (a\varphi, a\varphi) = [a\varphi][a\varphi]' = ([a][\varphi])([a][\varphi])' = [a][\varphi][\varphi]'[a]' = [a][a]' = (a, a) = ||a||^2.$$

Следовательно, $||a\varphi|| = ||a||$. Теорема доказана.

Как следует из этой теоремы геометрический смысл ортогонального преобразования в том, что оно сохраняет длины векторов.

38.2. Канонический вид матрицы ортогонального преобразования.

Т е о р е м а 2. *Для всякого ортогонального преобразования φ евклидова пространства V существует такая ортонормированная база, в которой матрица $[\varphi]$ является клеточно–диагональной и каждая клетка либо одномерна* (*и имеет вид* ± 1), *либо двумерна и имеет вид*

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

т. е.

$$[\varphi] = E_k \oplus -E_l \oplus \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix} \oplus \ldots \oplus \begin{pmatrix} \cos\alpha_m & -\sin\alpha_m \\ \sin\alpha_m & \cos\alpha_m \end{pmatrix}, \quad k + l + m = n.$$

Иными словами, всякое ортогональное преобразование сводится к нескольким поворотам и отражениям.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В теореме о полупростоте над полем полем действительных чисел мы доказывали, что если некоторое подпространство векторного пространства над полем $\mathbb{R}$ неприводимо относительно линейного преобразования, то его размерность ≤ 2. Покажем, что каждая матрица над полем действительных чисел в подходящей базе имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right),$$

где диагональные клетки имеют размерность 1 или 2.

Доказательство проведем индукцией по размерности $\dim V$. Если $\dim V = 1$, то доказывать нечего. Пусть далее $\dim V > 1$. Мы знаем, что нулевое подпространство и все пространство V инвариантны относительно φ. Если между ними есть собственное инвариантное подпространство U:

$$0 < U < V,$$

то как мы знаем, в некоторой базе матрица $[\varphi]$ имеет вид

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} [\overline{\varphi}_U] & * \\ 0 & [\varphi_U] \end{pmatrix}.$$

Будем строить цепочку инвариантных подпространств пространства V до тех пор, пока не получим неуплотняемую цепочку:

$$0 < U_1 < U_2 < \ldots < U_m = V$$

инвариантных подпространств. Фактор-пространство U_{i+1}/U_i неприводимо, а как мы знаем, неприводимое подпространство в нашем случае не более чем двумерно. Получим матрицу нужного вида.

Выберем базу $a_1, a_2, \ldots, a_n$, согласованную с этой цепочкой. Построим по ней ортонормированную базу: $b_n = \alpha_{nn}a_n$, $b_{n-1} = \alpha_{nn}a_{n-1} + \alpha_{n-1,n}a_n$, …, $b_1 = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \ldots + \alpha_{1n}a_n$. Очевидно, что матрица перехода является треугольной матрицей. Найдем матрицу преобразования φ в базе b:

$$[\varphi]_b = T[\varphi]T^{-1}.$$

Процесс ортогонализации имеет треугольную матрицу. Матрица T треугольная и ее можно считать клеточно-треугольной. Обратная к треугольной – опять треугольная.

Так как преобразование φ ортогонально, то матрица $[\varphi]_b$ ортогональная, т. е. $[\varphi]_b[\varphi]_b^t = E$, а потому обратная к ортогональной это просто транспонированная. Учитывая, что $[\varphi]_b$ клеточно-треугольная, заключаем, что она просто клеточно-диагональная. Следовательно, $[\varphi]_b$ –клеточно-диагональная и каждая клетка является ортогональной. Учитывая, что они либо одномерны, либо двумерны, заключаем, что если клетка одномерна, т. е. равна элементу α, то $\alpha^2 = 1$, а потому $\alpha = \pm 1$. Предположим, что клетка двумерна и имеет вид

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

Из условия ортогональности заключаем

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y^2 & xz+yt \\ xz+yt & z^2+t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z^2+t^2=1, \\ xz+yt=0, \end{cases}$$

откуда заключаем, что клетка имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Так как

$$xz+yt = \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta = \sin(\beta-\alpha) = 0,$$

то

$$\beta - \alpha = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

а потому $\beta = \alpha + \pi k$. Если k – четно, то можно считать, что $\beta = \alpha$ и мы имеем клетку

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Если k нечетно, то можно считать, что $\beta = \alpha + \pi$ и получим клетку

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

У п р а ж н е н и е. Почему в формулировке теоремы ничего не говорится о клетках второго типа?

§ 39. Симметрические преобразования

39.1. Определения и свойства симметрических преобразований.

Т е о р е м а 1. *Пусть V – евклидово пространство, а φ – его линейное преобразование. Тогда равносильны*:

а) $(a\varphi, b) = (a, b\varphi)$ *для любых векторов a и b из V*;

б) *во всякой ортонормированной базе матрица $[\varphi]$ симметрическая* (т. е. $[\varphi] = [\varphi]^t$);

в) *в некоторой ортонормированной базе матрица $[\varphi]$ симметрическая.*

При любом из этих условий преобразование φ называется *симметрическим.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) $\Rightarrow$ б). Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормированная база пространства V. Действуя на нее преобразованием φ, получим

$$e_i\varphi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} e_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Рассмотрим скалярное произведение

$$(e_i\varphi, e_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} e_k, e_j \right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}(e_k, e_j) = \alpha_{ij}.$$

С другой стороны,

$$(e_i, e_j\varphi) = \left(e_i, \sum_{l=1}^{n} \alpha_{jl} e_l \right) = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{jl}(e_i, e_l) = \alpha_{ji}.$$

Учитывая, что $(e_i\varphi, e_j) = (e_i, e_j\varphi)$, получаем равенство $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, т. е. матрица $[\varphi]$ симметрическая.

б) $\Rightarrow$ в). Тривиально.

в) $\Rightarrow$ а). Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормированная база, в которой матрица $[\varphi]$ симметрична. Тогда

$$(a\varphi, b) = [a\varphi][b]^t = [a][\varphi][b]^t$$

и

$$(a, b\varphi) = [a][b\varphi]^t = [a]([b][\varphi])^t = [a][\varphi]^t[b]^t.$$

Так как $[\varphi] = [\varphi]^t$, то $(a\varphi, b) = (a, b\varphi)$. Теорема доказана.

39.2. Характеристические корни симметрического преобразования.

Т е о р е м а 2. *Все характеристические корни симметрического преобразования являются действительными числами.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть φ – симметрическое преобразование, а A – соответствующая ему матрица в ортонормированной базе. Тогда A – симметрическая матрица из $M_n(\mathbb{R})$. Рассмотрим унитарное пространство $\mathbb{C}^n$ с базой

$$\begin{gathered}(1, 0, \ldots, 0),\\ (0, 1, \ldots, 0),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (0, 0, \ldots, 1),\end{gathered}$$

и скалярным произведением

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta}_i.$$

Определим линейное преобразование ψ пространства $\mathbb{C}^n$ по правилу:

$$\psi : (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \longmapsto (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)A.$$

Покажем, что $(a\psi, b) = (a, b\psi)$ для любых a, b из $\mathbb{C}^n$. Действительно, имеем

$$(a\psi, b) = [a\psi]\overline{[b]}^t = ([a][\psi])\overline{[b]}^t$$

С другой стороны,

$$(a, b\psi) = [a]\overline{[b\psi]}^t = [a](\overline{[b][\psi]}^t) = [a]\overline{[\psi]}^t[b]^t,$$

но так как $[\psi] = A$ симметрическая и лежит в $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, то $(a\psi, b) = (a, b\psi)$, т. е. ψ – симметрическое преобразование пространства $\mathbb{C}^n$.

Пусть α – характеристический корень матрицы A. Для ψ он является собственным значением, т. е. существует вектор $u \in \mathbb{C}^n$ такой, что $u\psi = \alpha u$. По предыдущему имеем

$$(u\psi, u) = (u, u\psi).$$

Но,

$$(u\psi, u) = (\alpha u, u) = \alpha(u, u),$$
$$(u, u\psi) = (u, \alpha u) = \overline{\alpha}(u, u),$$

откуда

$$\alpha(u, u) = \overline{\alpha}(u, u).$$

Так как по определению, $u \neq 0$, то $(u, u) > 0$ и $\alpha = \overline{\alpha}$, т. е. $\alpha \in \mathbb{R}$. Теорема доказана.

39.3. Канонический вид матрицы симметрического преобразования.

Т е о р е м а 3. *Для всякого симметрического преобразования φ евклидова пространства V существует ортонормированная база из собственных векторов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Докажем вначале, что существует некоторая база из собственных векторов (не заботясь об ортогональности). Докажем, что φ

– полупросто. По теореме о разложении преобразования в сумму полупростого и нильпотентного имеем
$$\varphi = \psi + \theta,$$
где ψ – полупростое, θ – нильпотентное и $\psi\theta = \theta\psi$. Хотим доказать, что $\theta = 0$. Пусть $\theta \neq 0$, тогда $\theta^N = 0$, а $\theta^{N-1} \neq 0$ для некоторого натурального $\mathbb{N}$. Очевидно, что $N \geq 2$. Выберем вектор $v \in V$ такой, что $v\theta^{N-1} \neq 0$.

Симметричность преобразования означает, что в некоторой ортонормированной базе матрица преобразования симметрическая. Имеем: θ – многочлен от φ. В ортонормированной базе матрица $[\varphi]$ симметрическая. В этой же базе матрица $[\theta]$ является многочленом от матрицы $[\varphi]$. Значит матрица $[\theta]$ симметрическая, а потому преобразование θ симметрическое. Рассмотрим
$$(v\theta^{N-1}, v\theta^{N-1}) > 0.$$
Используя определение симметрического преобразования, получим
$$(v\theta^{N-1}, v\theta^{N-1}) = (v, v\theta^{2N-2}).$$
Так как $2N - 2 \geq N$, то
$$(v, v\theta^{2N-2}) = (v, 0) = 0.$$
Следовательно, $\theta = 0$, а потому φ – полупросто. Учитывая, что все характеристические корни преобразования φ лежат в $\mathbb{R}$, заключаем, что в подходящей базе матрица $[\varphi]$ диагональна. Эта база и будет искомой. Она состоит из собственных векторов.

2) Теперь мы должны ортонормировать найденную базу. Пусть
$$e_1, e_2, \ldots, e_k \text{ отвечают собственному значению } \alpha_1,$$
$$e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_m \text{ отвечают собственному значению } \alpha_2, \text{ и т. д.}$$
Будем ортонормировать каждый кусок этой базы. Ясно, что при этом новые вектора также будут собственными и им соответствуют те же самые собственные значения. Необходимо проверить, что векторы из разных кусков будут попарно ортогональны. Действительно, если $a\varphi = \alpha a$ и $b\varphi = \beta b$, где $\alpha \neq \beta$, то
$$(a\varphi, b) = (\alpha a, b) = \alpha(a, b).$$
С другой стороны,
$$(a, b\varphi) = (a, \beta b) = \beta(a, b).$$
Учитывая равенство $(a\varphi, b) = (a, b\varphi)$, заключаем, что $(a, b) = 0$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Для всякой действительной симметрической матрицы* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *существует ортогональная матрица* $T \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *такая, что* TAT^{-1} *– диагональная матрица.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть φ – симметрическое преобразование евклидова пространства V размерности n, матрица которого в ортонормированной базе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ равна $[\varphi] = A$. По теореме 3 существует ортонормированная база $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ из собственных векторов преобразования φ. Матрица перехода T от ортонормированной базы к ортонормированной является ортогональной. Следовательно, $[\varphi]' = T[\varphi]T^{-1} = TAT^{-1}$ и матрица $[\varphi]'$ диагональна. Следствие доказано.

§ 40. Полярное разложение

Т е о р е м а. *Для любой матрицы* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *существует разложение* $A = SU$, $S, U \in M_n(\mathbb{R})$, *где* S *– симметрическая матрица с неотрицательными собственными значениями, а* U *– ортогональна. При этом* S *– единственна, а если* A *– невырождена, то и* U *единственна.* Такое разложение матрицы A называется *полярным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Единственность. Пусть $A = SU$, где S – симметрическая с неотрицательными собственными значениями, U – ортогональна. Возьмем $A^t = U^t S^t$ и перемножая, получим

$$AA^t = SUU^tS^t = S^2.$$

Следовательно, матрица AA^t симметрическая, а потому ее характеристические корни действительны и, по следствию из теоремы 1 предыдущего параграфа, существует такая ортогональная матрица Q, что

$$Q^{-1}(AA^t)Q = D,$$

где D – диагональна. Пусть

$$D = \mathrm{diag}(\underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{r}, \underbrace{\beta, \ldots, \beta}_{s}, \ldots)$$

где все числа, стоящие на диагонали действительные и утверждается, что они неотрицательны. Действительно, матрица S подобна диагональной матрице

$$\mathrm{diag}(s_1, s_2, \ldots, s_n),$$

т. е.

$$S = X^{-1}\mathrm{diag}(s_1, s_2, \ldots, s_n)X.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат, получим

$$S^2 = X^{-1}\mathrm{diag}(s_1^2, s_2^2, \ldots, s_n^2)X.$$

Следовательно, у D все характеристические корни неотрицательны. Положим

$$\sqrt{D} = \mathrm{diag}(\sqrt{\alpha}, \ldots, \sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}, \ldots, \sqrt{\beta}, \ldots),$$

где $\sqrt{\ }$ – арифметический квадратный корень. Тогда

$$S = \sqrt{AA^t} = Q\sqrt{D}Q^{-1}.$$

Но так как корень квадратный из матрицы определяется единственным образом, то матрица S единственна.

Предположим теперь, что A невырождена. Тогда S и U невырождены. Следовательно, у S существует обратная. Следовательно, $U = S^{-1}A$, т. е. U единственна.

Докажем существование.

1) Предположим, что $\det\, A \neq 0$. Так как AA^t – симметрическая, то для некоторой ортогональной матрицы Q матрица $Q^{-1}(AA^t)Q$ диагональная. Обозначим ее через D и положим

$$S = \sqrt{AA^t} = Q\sqrt{D}Q^{-1}, \quad U = S^{-1}A.$$

Покажем, что построенные матрицы удовлетворяют всем необходимым требованиям. Покажем, что матрица S является симметрической с неотрицательными собственными значениями. Вычисляя транспонированную, и учитывая, что $Q^t = Q^{-1}$, получим

$$S^t = (Q\sqrt{D}Q^t)^t = Q\sqrt{D}Q^t = S,$$

т. е. S – симметрическая. Так как у подобных матриц характеристические корни одни и те же, то

$$\{\text{характеристические корни матрицы } S\} = \{\text{характеристические корни матрицы } \sqrt{D}\}.$$

Покажем, что все эти корни неотрицательны. Пусть α – характеристический корень матрицы D, он же является и характеристическим корнем матрицы AA^t. Так как матрица AA^t симметрическая, то все ее характеристические корни действительные. Покажем, что они неотрицательные. Пусть $u \in \mathbb{R}^n$ такой, что $u(AA^t) = \alpha u$. Тогда

$$0 \leq (uA, uA) = (uA)(uA)^t = u(AA^t)u^t = \alpha u u^t = \alpha(u, u).$$

Отсюда $\alpha \geq 0$.

Проверим ортогональность матрицы U:

$$UU^t = (S^{-1}A)(S^{-1}A)^t = S^{-1}AA^t(S^{-1})^t = E,$$

где мы воспользовались тем, что $AA^t = S^2$, т. е. U ортогональна.

2) Пусть теперь $\det A = 0$. Представим ее как предел

$$A = \lim_{k\to\infty} A_k$$

невырожденных матриц (например, можно положить $A_k = A - \frac{1}{k}E$). Справедливость теоремы для каждой матрицы A_k доказана. Следовательно, $A_k = S_k U_k$, где S_k – симметрическая с положительными собственными значениями, а U_k – ортогональная. По следствию из теоремы 1 предыдущего параграфа

$$S_k = V_k^{-1} D_k V_k,$$

где V_k – ортогональная матрица, а D_k – диагональная. Тогда

$$A_k = V_k^{-1} D_k V_k U_k,$$

и из этого равенства

$$V_k A_k U_k^{-1} V_k^{-1} = D_k.$$

При $k \to \infty$ матрицы D_k стремятся к диагональной. Воспользуемся следующим утверждением.

Л е м м а 1. *Если множество замкнуто и ограничено, то из всякой бесконечной последовательности его элементов можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

Л е м м а 2. *Множество ортогональных матриц* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *замкнуто и ограничено.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Проверим замкнутость. Замкнутость множества M означает, что если некоторая последовательность из M сходится к некоторому элементу, то этот элемент лежит в M. Пусть

$$X_0 = \lim_{k\to\infty} X_k,$$

где все матрицы X_k ортогональны. Покажем, что тогда и X_0 ортогональна. Действительно, ввиду ортогональности матриц X_k имеем

$$X_k X_k^t = E.$$

Переходя к пределу, получим

$$\lim_{k\to\infty}(X_k X_k^t) = \lim_{k\to\infty} X_k \cdot \lim_{k\to\infty} X_k^t = X_0 X_0^t = E.$$

Следовательно, X_0 ортогональна.

2) Проверим ограниченность. Надо указать константу, которая ограничивает каждую матрицу. Мы знаем, что если $X = (x_{ij})$ ортогональна, то

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 = 1,$$

а потому для каждого ее элемента справедливо неравенство $|x_{ij}| \leq 1$. Лемма доказана.

Таким образом, мы можем воспользоваться леммой 1. У нас есть последовательность матриц. Выбираем такую подпоследовательность, чтобы элементы, стоящие на месте (1, 1) сходились к некоторому элементу. Далее, из выбранной подпоследовательности выбираем такую подпоследовательность, чтобы все элементы, стоящие на месте (1, 2) сходились к некоторому элементу и т. д. В результате найдем подпоследовательность матриц, которая сходится к некоторой матрице.

Выберем сходящиеся подпоследовательности $\{U_{k_l}\}$, $\{V_{k_l}\}$. Пусть

$$U_0 = \lim_{l\to\infty} U_{k_l}, \quad V_0 = \lim_{l\to\infty} V_{k_l}.$$

Пределом диагональных матриц может быть только диагональная матрица. Если при этом на диагонали стоят положительные числа, то в пределе там не могут возникнуть отрицательные. Предел последовательности

$$V_{k_l} A_{k_l} U_{k_l}^{-1} V_{k_l}^{-1} = D_{k_l}$$

равен

$$V_0 A U_0^{-1} V_0^{-1} = D_0,$$

где D_0 – диагональная с неотрицательными элементами. Отсюда

$$A = V_0^{-1} D_0 V_0 U_0$$

и, полагая $S = V_0^{-1} D_0 V_0$, $U = U_0$, получим полярное разложение. Теорема доказана.

Глава 6

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

§ 41. Квадратичные формы

Пусть P – поле, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – набор переменных. *Формой степени* m называется однородный многочлен степени m из кольца $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. При $m = 1$ форма называется *линейной*, при $m = 2$ – *квадратичной*, при $m = 3$ – *кубической* и т. д.

41.1. Поведение матрицы квадратичной формы при линейной замене переменных. *Квадратичной формой* над полем P называется следующее выражение

$$f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} \in P.$$

Учитывая, что переменные перестановочны, т. е. $x_i x_j = x_j x_i$, будем считать, что $a_{ij} = a_{ji}$. В этом случае нашей квадратичной форме соответствует симметрическая матрица коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Обозначим

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

– столбец неизвестных. Тогда нашу форму можно представить в таком виде

$$f = X^t A X.$$

В дальнейшем мы будем часто преобразовывать переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Как при этом будет меняться форма?

Л е м м а 1. *Если переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ подвергнуть линейной замене с матрицей $Q \in \mathrm{M}_n(P)$, т. е. положить $X = QY$, где*

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \text{ новые переменные,}$$

то квадратичная форма $f = X^t A X$ перейдет в квадратичную форму с матрицей $Q^t A Q$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя выражения старых переменных через новые, получим

$$f = X^t A X = (QY)^t A (QY) = Y^t (Q^t A Q) Y$$

и в новых переменных наша форма имеет матрицу $Q^t A Q$.

41.2. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Будем рассматривать линейные замены, приводящие квадратичные формы к наиболее простому виду. При этом будем использовать невырожденные замены переменных.

О п р е д е л е н и е. Квадратичная форма называется *канонической*, если она не содержит смешанных произведений, т. е. имеет вид

$$f = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \ldots + b_n y_n^2, \quad b_i \in P.$$

Т е о р е м а 1. а) *Всякую квадратичную форму над полем P характеристики не равной 2 можно привести линейной невырожденной заменой переменных с коэффициентами из P к каноническому виду.* б) *Для полей характеристики 2 это неверно.* в) *Число ненулевых коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы не зависит от выбора линейной замены, приводящей к этому виду и равно рангу матрицы исходной формы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Пусть

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} \in P,$$

– квадратичная форма. Проведем доказательство индукцией по n.

При $n = 1$ имеем форму $f = a_{11}x_1^2$, которая уже каноническая.

Предположим, что утверждение справедливо для $n-1$ и установим его для n.

Случай 1. Разберем вначале случай некоторый коэффициент a_{ii} отличен от нуля. Не уменьшая общности, можно считать, что $a_{11} \neq 0$ (иначе можно перенумеровать переменные – это линейное, невырожденное преобразование). Рассмотрим

$$f - \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2.$$

После приведения подобных пропадут слагаемые, содержащие x_1 и мы получим квадратичную форму $g(x_2, \ldots, x_n)$, которая уже не зависит от x_1. Это наблюдение подсказывает следующую линейную замену

$$\begin{cases} y_1 = & a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots + & a_{1n}x_n, \\ y_2 = & x_2, \\ \vdots \\ y_n = & x_n. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что определитель матрицы этой замены равен a_{11}, а потому она невырождена. После применения этой замены, получим

$$f = \frac{1}{a_{11}}y_1^2 + g(y_2, \ldots, y_n).$$

По индукционному предположению существует линейная невырожденная замена переменных

$$\begin{cases} y_2 = c_{22}z_2 + \cdots + c_{2n}z_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = c_{n2}z_2 + \cdots + c_{nn}z_n, \end{cases} \qquad c_{ij} \in P,$$

после выполнения которой форма примет вид

$$g = b_2z_2^2 + \ldots + b_nz_n^2.$$

Рассмотрим замену

$$\begin{cases} y_1 = z_1, \\ y_2 = c_{22}z_2 + \cdots + c_{2n}z_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = c_{n2}z_2 + \cdots + c_{nn}z_n. \end{cases}$$

После нее

$$f = \frac{1}{a_{11}}z_1^2 + b_2z_2^2 + \ldots + b_nz_n^2,$$

т. е. привели нашу форму к каноническому виду.

Случай 2. Все $a_{ii}=0$. Если при этом и все другие коэффициенты a_{ij} равны нулю, то $f=0$ – каноническая. Поэтому пусть $a_{12}\neq 0$ (если это не так, то используем перенумерацию переменных), т. е.

$$f=2a_{12}x_1x_2+\ldots$$

Выполним замену

$$\begin{cases} x_1= & t_1-t_2,\\ x_2= & t_1+t_2,\\ x_3= & \quad t_3,\\ \ \vdots & \\ x_n= & \quad t_n. \end{cases}$$

После нее

$$f=2a_{12}t_1^2-2a_{12}t_2^2+\ldots$$

и заметим, что выписанные слагаемые не могут уничтожиться с невыписанными. Следовательно, мы пришли к разобранному случаю 1).

У п р а ж н е н и е. Где используется, что характеристика поля не равна 2?

б) Укажем пример, когда теорема неверна. Рассмотрим поле P характеристики 2. В этом поле $1+1=0$, а потому $a=-a$ для любого a из P, т. е. всякий элемент является противоположным к себе. Как мы знаем, простейшим таким полем является поле вычетов $\mathbb{Z}_2$. Покажем, что квадратичную форму $f=x_1x_2$ от двух переменных нельзя привести к каноническому виду. Действительно, если

$$\begin{cases} x_1=b_{11}y_1+b_{12}y_2,\\ x_2=b_{21}y_1+b_{22}y_2, \end{cases}$$

– некоторая невырожденная линейная замена переменных, то в новых переменных форма примет вид

$$f=b_{11}b_{21}y_1^2+(b_{11}b_{22}+b_{12}b_{21})y_1y_2+b_{12}b_{22}y_2^2.$$

Чтобы форма приняла канонический вид необходимо, чтобы коэффициент при y_1y_2 обращался в нуль, т. е.

$$b_{11}b_{22}+b_{12}b_{21}=b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}=0,$$

но в этом случае матрица линейной замены будет вырожденной.

в) Пусть

$$f=b_1z_1^2+b_2z_2^2+\ldots+b_nz_n^2$$

– канонический вид квадратичной формы. Рассмотрим ее матрицу:

$$D = \begin{pmatrix} b_1 & & & \mathbf{0} \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & b_n \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен числу ненулевых диагональных элементов. Если некоторая матрица A имеет ранг r, то матрица Q^tAQ, где Q – невырожденная матрица, также имеет ранг r, так как при умножении матрицы на невырожденную ее ранг не меняется. Учитывая, что $Q^tAQ = D$, заключаем, что r равно числу ненулевых слагаемых в каноническом виде. Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е. *Ранг формы* – число ненулевых коэффициентов при квадратах в каноническом виде.

41.3. Закон инерции действительной квадратичной формы. Квадратичная форма называется *действительной* (*комплексной*), если ее коэффициенты лежат в поле $\mathbb{R}$ (соответственно, в $\mathbb{C}$).

О п р е д е л е н и е. *Сигнатурой* действительной квадратичной формы называется перечень знаков коэффициентов любого ее канонического вида:

$$(\underbrace{+, \ldots, +, -, \ldots, -, 0, \ldots, 0}_{n}).$$

Покажем, что это определение корректно, т. е. не зависит от канонического вида.

Т е о р е м а (закон инерции). *Сигнатура действительной квадратичной формы не зависит от выбора невырожденной действительной замены переменных, приводящей форму к каноническому виду.*

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем от противного. Допустим, что нашлись две невырожденные действительные замены переменных, приводящие форму к каноническим видам с разными сигнатурами:

$$f = y_1^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_r^2 = z_1^2 + \ldots + z_l^2 - z_{l+1}^2 - \ldots - z_r^2, \quad 0 \le k < l \le n,$$

где

$$Y = QX, \quad \det Q \neq 0, \quad Z = SX, \quad \det S \neq 0. \tag{1}$$

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + \cdots + q_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{k1}x_1 + q_{k2}x_2 + \cdots + q_{kn}x_n = 0, \\ s_{l+1,1}x_1 + s_{l+1,2}x_2 + \cdots + s_{l+1,n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{n1}x_1 + s_{n2}x_2 + \cdots + s_{nn}x_n = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где первые k равенств берутся из замены $Y = QX$, а последние $n - l$ – из замены $Z = SX$. В этой системе $k + n - l$ уравнений и n неизвестных. При этом

$$k + n - l = n - (l - k) < n,$$

т. е. ранг системы меньше n. Следовательно, система имеет ненулевые решения. Пусть $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ – одно из них. По формулам (1) найдем $y^0 = Qx^0$ и $z^0 = Sx^0$. Тогда

$$f(x^0) = -(y_{k+1}^0)^2 - (y_{k+2}^0)^2 - \ldots - (y_r^0)^2 = (z_1^0)^2 + (z_2^0)^2 + \ldots + (z_l^0)^2.$$

Перенося все слагаемые в одну часть, получим сумму квадратов равную нулю. В частности, $z_1^0 = z_2^0 = \ldots = z_l^0$. Значит

$$\begin{cases} z_1^0 = s_{11}x_1^0 + s_{12}x_2^0 + \cdots + s_{1n}x_n^0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_l^0 = s_{l1}x_1^0 + s_{l2}x_2^0 + \cdots + s_{ln}x_n^0 = 0. \end{cases}$$

Отсюда, учитывая, что x^0 удовлетворяет системе (2), заключаем: $Sx^0 = 0$. Но это однородная система с невырожденной матрицей, а потому эта система имеет единственное нулевое решение, а $x^0 \neq 0$. Противоречие. Следовательно, $k = l$ и теорема доказана.

§ 42. Эквивалентность квадратичных форм относительно данной группы линейных замен

Пусть P – поле, G – подгруппа общей линейной группы $\mathrm{GL}_n(P)$.

О п р е д е л е н и е. Квадратичные формы f и g от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над P называются *эквивалетными* относительно G, если от f к g можно перейти при помощи линейной замены переменных с матрицей из G.

Будем записывать это так $f \sim g$. Покажем, что отношение $\sim$ является отношением эквивалентности.

а) $f \sim f$ так как $f \xrightarrow{E} f$, т. е. от формы f можно перейти к f при помощи единичной матрицы E, которая лежит в любой группе $G \leq \mathrm{GL}_n(P)$;

б) если $f \sim g$, то $g \sim f$. Действительно, если от f можно перейти к g при помощи матрицы A из G, то от g можно перейти к f при помощи обратной матрицы A^{-1}, которая также лежит в G;

в) если $f \sim g$ и $g \sim h$, то $f \sim h$. Действительно, если от f можно перейти к g при помощи матрицы A из G, а от g можно перейти к h при помощи матрицы B из G, то от g можно перейти к h при помощи матрицы AB, которая очевидно лежит в G.

Относительно этого отношения эквивалентности все квадратичные формы распадаются на классы эквивалентности, которые зависят от P и G. Рассмотрим далее случаи, когда G одна из следующих групп: $GL_n(\mathbb{C})$, $GL_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$.

42.1. Эквивалентность комплексных квадратичных форм относительно группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Т е о р е м а 1. *Две комплексные квадратичные формы эквивалентны относительно группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый ранг. В частности, в качестве представителей смежных классов можно взять следующие формы:*

$$z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_r^2, \quad 0 \le r \le n.$$

Каждая комплексная форма эквивалентна одной из этих форм.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) $\Rightarrow$. Пусть $f \sim g$, т. е. $f \xrightarrow{A} g$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Приведем g к каноническому виду:

$$g \to b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \ldots + b_n y_n^2, \quad b_i \in \mathbb{C}.$$

Выполняя замену

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{b_1} y_1, \\ z_2 = \sqrt{b_2} y_2, \\ \qquad \vdots \\ z_n = \sqrt{b_n} y_n, \end{cases}$$

придем к форме

$$g \to z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_r^2.$$

Это доказывает последнюю часть теоремы.

Имеем диаграмму

$$\begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{Q} & z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_r^2 \\ A \uparrow & \nearrow & \\ f & & \end{array}$$

для некоторой матрицы $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, т. е.

$$f \xrightarrow{AQ} z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_r^2.$$

Значит ранг f равен рангу g и равен r.

2) $\Leftarrow$. Пусть ранг формы f равен рангу формы g и этот ранг равен r. Тогда

$$f \xrightarrow{Q} z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_r^2$$

и

$$g \xrightarrow{S} z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_r^2.$$

Тогда $f \xrightarrow{QS^{-1}} g$, но это и значит, что $f \sim g$. Теорема доказана.

42.2. Эквивалентность действительных квадратичных форм относительно группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Теорема 2. *Две действительные квадратичные формы эквивалентны относительно $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда их сигнатуры равны. В частности, в качестве представителей смежных классов можно взять формы*

$$z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - z_{k+2}^2 - \ldots - z_{k+l}^2, \quad 0 \le k + l \le n.$$

Каждая действительная квадратичная форма эквивалентна одной из этих форм.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$. Пусть $f \sim g$, т. е. $f \xrightarrow{A} g$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Приведем g к каноническому виду:

$$g \xrightarrow{Q} z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - z_{k+2}^2 - \ldots - z_{k+l}^2.$$

При этом квадратичная форма f приводится к тому же самому каноническому виду при помощи матрицы AQ:

$$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "Q"] & z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - z_{k+2}^2 - \ldots - z_{k+l}^2 \\ f \arrow[u, "A"] \arrow[ur, "AQ"'] & \end{tikzcd}$$

Следовательно, сигнатуры f и g равны.

2) $\Leftarrow$. Пусть сигнатуры f и g равны. Надо доказать, что f и g эквивалентны. Приведем обе формы к каноническому виду:

$$f \xrightarrow{Q} z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - z_{k+2}^2 - \ldots - z_{k+l}^2,$$
$$g \xrightarrow{S} z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - z_{k+2}^2 - \ldots - z_{k+l}^2,$$

Понятно, что $f \xrightarrow{QS^{-1}} g$. Следовательно, по определению $f \sim g$. Теорема доказана.

42.3. Эквивалентность действительных квадратичных форм относительно ортогональной группы $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

О п р е д е л е н и е. Набор характеристических корней матрицы, взятые с их кратностью называется *спектром матрицы. Спектр квадратичной формы* – спектр ее матрицы.

Т е о р е м а (приведение к главным осям). *Две действительные квадратичные формы эквивалентны относительно* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *тогда и только тогда, когда их спектры равны. В частности, в качестве представителей смежных классов можно взять такие формы*:

$$c_1 z_1^2 + c_2 z_2^2 + \ldots + c_n z_n^2, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) $\Rightarrow$. Пусть $f \sim g$, т. е. $f \xrightarrow{Q} g$, $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Пусть A – матрица формы f, а B – матрица формы g. Мы знаем, что $B = Q^t A Q$, где Q – ортогональна. Отсюда $B = Q^{-1} A Q$, а потому матрицы A и B подобны. Следовательно, у них характеристические многочлены одинаковы. Следовательно, спектр A равен спектру B.

2) $\Leftarrow$. Пусть спектр матрицы A равен спектру матрицы B. У нас была теорема о том, что всякая симметрическая матрица сопряжена при помощи ортогональной матрицы с диагональной. Следовательно,

$$UAU^{-1} = D, \quad U - \text{ ортогональная}, \quad D - \text{ диагональная};$$

$$VBV^{-1} = F, \quad V - \text{ ортогональная}, \quad F - \text{ диагональная}.$$

Очевидно,

$$\text{спектр}\, D = \text{ спектр}\, A = \text{ спектр}\, B = \text{ спектр}\, F.$$

Здесь первое и последнее равенства следуют из подобия матриц, а второе равенство – из условия.

Пусть

$$D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n).$$

После перестановки коэффициентов D совпадает с F. Заметим, что этой перестановке соответствует мономиальная матрица (в каждой строке и каждом столбце лишь один элемент отличен от нуля и равен единице), а всякая мономиальная матрица ортогональна. Пусть для мономиальной матрицы W выполняется равенство

$$F = W^{-1} D W.$$

Тогда

$$A = U^{-1} D U = U^{-1}(W F W^{-1}) U = U^{-1} W V B V^{-1} W^{-1} U =$$
$$= (V^{-1} W^{-1} U)^{-1} B (V^{-1} W^{-1} U) = (V^{-1} W^{-1} U)^t B (V^{-1} W^{-1} U),$$

но это и означает, что f эквивалентна g. Теорема доказана.

§ 43. Положительно определенные квадратичные формы

43.1. Свойства положительно определенных квадратичных форм. Мы знаем, что скалярное произведение на пространстве $V = \mathbb{R}^n$ задается формулой:

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

и это отображение

$$(\ ,\ ) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

является билинейной (т. е. линейной по каждому аргументу) формой.

Предположим, что

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{R},$$

некоторая вещественная билинейная форма. Когда она задает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$?

Из определения скалярного произведения следует, что она должна удовлетворять следующим аксиомам:

1) $f(x, y) = f(y, x)$;
2) $f(x' + x'', y) = f(x', y) + f(x'', y)$;
3) $f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y), \ \ \alpha \in \mathbb{R}$;
4) $f(x, x) > 0$ при $x \neq 0$.

Из аксиомы 1) следует, что коэффициенты билинейной формы должны образовывать симметрическую матрицы. Аксиомы 2) и 3) никаких ограничений не накладывают, так как вытекают из билинейности формы. Заметим, что рассматривая $f(x, x)$, $x \in \mathbb{R}$, получим квадратичную форму. Хотим понять, каковы коэффициенты и сигнатура этой квадратичной формы, если она удовлетворяет аксиоме 4).

О п р е д е л е н и е. *Угловым минором порядка* k, $1 \leq k \leq n$, матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

называется минор

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

Т е о р е м а 1. *Для действительной квадратичной формы f следующие утверждения равносильны*:

1) $f(x) > 0$ *при всех* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$;

2) *сигнатура формы* f *равна* $(+, +, \ldots, +)$, *т. е.* f *имеет канонический вид*

$$z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2;$$

3) *все угловые миноры матрицы формы* f *положительны.*

При любом из этих условий форма f называется *положительно определенной.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$. 2) От противного. Пусть f имеет канонический вид

$$f = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \ldots + b_n y_n^2, \quad b_n \leq 0,$$

который получается после замены

$$\begin{cases} y_1 = q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + \ldots + q_{1n}x_n, \\ y_2 = q_{21}x_1 + q_{22}x_2 + \ldots + q_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = q_{n1}x_1 + q_{n2}x_2 + \ldots + q_{nn}x_n, \end{cases}$$

т. е. $Y = QX$, где матрица $Q = (q_{ij})$ не вырождена. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + \ldots + q_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{n-1,1}x_1 + q_{n-1,2}x_2 + \ldots + q_{n-1,n}x_n = 0, \\ q_{n1}x_1 + q_{n2}x_2 + \ldots + q_{nn}x_n = 1. \end{cases}$$

Пусть $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ – ее решение. Ясно, что оно отлично от нуля. Имеем $f(x^0) = b_n \leq 0$. Противоречие.

2) $\Rightarrow$ 1) Имеем:

$$f(z) = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2.$$

Выберем некоторую n-ку $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $x^0 \neq 0$. По ней найдем соответствующую n-ку $z^0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда $f(z^0) = f(x^0) > 0$.

Покажем, что из 1) и 2) следует 3). Индукция по n. При $n = 1$ имеем $f = a_{11}x_1^2$, $a_{11} > 0$, а потому все угловые миноры положительны. Предположим, что утверждение справедливо для $n - 1$ и установим его для n. Имеем

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}x_i x_n + a_{nn}x_n^2.$$

Надо проверить для g условие 1). Возьмем $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0) \neq 0$. Тогда

$$g(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0) = f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0, 0) > 0$$

по условию. По индуктивному предположению:

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_{n-1} > 0,$$

так как они являются угловыми минорами для g. Надо доказать, что $\Delta_n > 0$. Ввиду 2)

$$f \xrightarrow{Q} z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2.$$

Если A – матрица формы f, то мы имеем равенство $Q^t A Q = E$, из которого $|A||Q|^2 = 1$, т. е. $\Delta_n = |A| > 0$.

3) $\Rightarrow$. 2) Индукция по n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n > 1$. Так же как и выше, представим f в виде

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in} x_i x_n + a_{nn} x_n^2.$$

По индуктивному предположению

$$g = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2$$

после некоторой замены

$$\begin{cases} x_1 = q_{11}y_1 + q_{12}y_2 + \ldots + q_{1,n-1}y_{n-1}, \\ x_2 = q_{21}y_1 + q_{22}y_2 + \ldots + q_{2,n-1}y_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = q_{n-1,1}y_1 + q_{n-1,2}y_2 + \ldots + q_{n-1,n-1}y_{n-1}. \end{cases}$$

Рассмотрим далее замену

$$\begin{cases} x_1 = q_{11}y_1 + q_{12}y_2 + \ldots + q_{1,n-1}y_{n-1}, \\ x_2 = q_{21}y_1 + q_{22}y_2 + \ldots + q_{2,n-1}y_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = q_{n-1,1}y_1 + q_{n-1,2}y_2 + \ldots + q_{n-1,n-1}y_{n-1}, \\ x_n = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y_n. \end{cases}$$

После нее

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} b_{in} y_i y_n + b_{nn} y_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (y_i + b_{in} y_n)^2 + c y_n^2.$$

Рассмотрим замену

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + b_{1,n}y_n, \\ z_2 = y_2 + b_{2,n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{n-1} = y_{n-1} + b_{n-1,n}y_n, \\ z_n = y_n. \end{cases}$$

После нее
$$f = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_{n-1}^2 + cz_n^2.$$
Если матрица формы f равна A, то учитывая, что мы пришли к форме с матрицей
$$\operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1, c) = S^t AS.$$
Вычисляя определители от обеих частей, получим
$$c = |A||S|^2 = \Delta_n |S|^2.$$
Учитывая, что $\Delta_n > 0$, заключаем, что и $c > 0$. Произведя замену
$$\left\{ \begin{array}{c} t_1 = z_1, \\ t_2 = z_2, \\ \vdots \\ t_n = \sqrt{c} z_n, \end{array} \right.$$
получим утверждение 2). Теорема доказана.

43.2. Пары форм. В этом пункте мы рассмотрим следующую задачу: даны две действительные квадратичные формы, можно ли их канонизировать одним линейным невырожденным преобразованием?

П р и м е р. Пусть
$$f = x_1^2, \quad g = x_1 x_2$$
– две действительные квадратичные формы. Покажем, что эти формы нельзя одновременно невырожденной заменой канонизировать. Действительно, если
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = q_{11} y_1 + q_{12} y_2, \\ x_2 = q_{21} y_1 + q_{22} y_2, \end{array} \right.$$
– линейная замена переменных, то
$$f = q_{11}^2 y_1^2 + 2q_{11} q_{12} y_1 y_2 + q_{12}^2 y_2^2, \quad g = q_{11} q_{21} y_1^2 + (q_{11} q_{22} + q_{12} q_{21}) y_1 y_2 + q_{12} q_{22} y_2^2.$$
Пусть
$$\left\{ \begin{array}{l} q_{11} q_{12} = 0, \\ q_{11} q_{22} + q_{12} q_{21} = 0. \end{array} \right.$$
Тогда
$$\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} = q_{11} q_{22} - q_{12} q_{21} = 0,$$
т. е. замена обязательно вырожденная.

Т е о р е м а 2. *Если одна форма положительно определена, а вторая произвольная, то одновременно невырожденной заменой переменных можно формы привести к каноническому виду над* $\mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из цепочки преобразований:

$$\begin{cases} f \overset{\text{невыр}}{\longrightarrow} & y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 & - - - - > & z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2, \\ g - - - - > & \widetilde{g} & \overset{\text{ортог}}{\longrightarrow} & c_1 z_1^2 + c_2 z_2^2 + \ldots + c_n z_n^2. \end{cases}$$

Вначале мы невырожденным линейным преобразованием приводим положительно определенную форму f к каноническому виду. В силу теоремы о положительно определенных формах, получим форму, у которой матрица единичная. При этом, выполняя ту же замену, приводим форму f к некоторой форме $\widetilde{g}$. Теперь, используя ортогональное преобразование, приведем форму $\widetilde{g}$ к каноническому виду. При этом, как легко заметить, матрица формы f по прежнему останется единичной. Следовательно, композиция этих двух линейных замен приведет формы f и g к каноническому виду. Теорема доказана.

§ 44. Значение действительной квадратичной формы на единичной сфере

В настоящем параграфе докажем следующее утверждение.

Т е о р е м а. *Пусть* $\mathbb{R}^n$ *– евклидово пространство с обычным скалярным произведением*

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

φ *– симметрическое преобразование пространства* $\mathbb{R}^n$*. Определим квадратичную форму*

$$f(x) = (x\varphi, x) = [x][\varphi][x]^t.$$

Тогда

1) $f(x)$ *достигает своего минимума на единичной сфере*

$$S = \{v \in V \mid ||v|| = 1\}.$$

Если в точке $u \in S$ *достигается минимум и* $f(u) = \alpha$*, то* $u\varphi = \alpha u$*, т. е.* α *– собственное значение, а* u *– собственный вектор преобразования* φ;

2) α *– наименьшее из всех собственных значений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Установим вначале пункт 2). Если $\beta < \alpha$ и $w\varphi = \beta w$, то

$$f(w) = (w\varphi, w) = \beta(w, w) = \beta < \alpha = \min_{v \in S} f(v).$$

Противоречие.

Для доказательства пункта 1) нам потребуется

Л е м м а. *Пусть S – замкнутое и ограниченное подмножество из $\mathbb{R}^n$, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Тогда*
а) f *ограничена на* S;
б) f *достигает на* S *своего наибольшего и наименьшего значений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Достаточно доказать, что f ограничена сверху, так как переходя к функции $-f$, получим и ограниченность снизу. Предположим, что f неограничена, т. е. для любого натурального n существует x_n из S такой что $f(x_n) > n$. Возникает последовательность $x_1, x_2, \ldots$. Так как S замкнуто и ограничено, то из этой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть эта подпоследовательность сходится к x_0. Тогда $x_0 \in S$. Учитывая, что f непрерывна, получим
$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0).$$
Значит, для любого $\varepsilon > 0$ существует k_0 такой, что
$$|f(x_{n_k}) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ при } k \geq k_0$$
Тогда
$$|f(x_{n_k}) \leq |f(x_0)| + \varepsilon \text{ при } k \geq k_0.$$
Приходим к противоречию.

б) Пусть
$$M = \sup_{x\in S} f(x), \quad m = \inf_{x\in S} f(x).$$
Достаточно доказать для верхней границы, т. е., существует $u \in S$ такое, что $f(u) = M$. По определению точной верхней грани:

1) $f(x) \leq M$ при любых $x \in S$;

2) для любого натурального n существует $y_n \in S$ такое, что
$$f(y_n) > M - \frac{1}{n}.$$

Так как S замкнуто и ограничено, то из каждой его последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Выберем такую подпоследовательность y_{n_k} из последовательности y_n и пусть
$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y_0.$$
Тогда $f(y_{n_k}) \leq M$. С другой стороны, $f(y_{n_k}) > M - \frac{1}{n_k}$. Пусть теперь k стремится к бесконечности. Тогда
$$M - \frac{1}{n_k} \longrightarrow M.$$

Следовательно,

$$f(y_{n_k}) \longrightarrow f(y_0)$$

и по лемме о двух милиционерах $f(y_0) = M$. Так как S замкнуто, то по определению $y_0 \in S$. Лемма доказана.

Проверим, что единичная сфера S замкнута и ограничена. Так как для любой точки сферы выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1,$$

то ограниченность очевидна.

Докажем замкнутость. Пусть $x_n \longrightarrow x_0$ при $n \longrightarrow \infty$ и все x_n лежат в S. Надо доказать, что тогда и x_0 лежит в S. Рассмотрим

$$(x_n, x_n) - (x_0, x_0) = (x_n, x_n) + (x_n, x_0) - (x_n, x_0) - (x_0, x_0) = (x_n, x_n - x_0) + (x_n - x_0, x_0) =$$

$$= (x_n - x_0, x_n + x_0) = (x_n - x_0, x_n - x_0) + 2(x_n - x_0, x_0).$$

Отсюда

$$|(x_n, x_n) - (x_0, x_0)| \leq ||x_n - x_0||^2 + 2||x_n - x_0|| \cdot ||x_0|| \longrightarrow 0$$

при $n \longrightarrow \infty$. Таким образом, мы установили, что

$$|(x_n, x_n) - (x_0, x_0)| = |1 - (x_0, x_0)| \longrightarrow 0,$$

но это константа, а потому $|1 - (x_0, x_0)| = 0$, т. е. $||x_0|| = 1$. Замкнутость установлена.

Проверим, что выполняются и все другие условия леммы.

Проверим, что f непрерывна. Имеем

$$f(x) - f(y) = (x\varphi, x) - (y\varphi, y) = (x\varphi, x) - (x\varphi, y) + (x\varphi, y) - (y\varphi, y) = (x\varphi, x - y) + ((x - y)\varphi, y).$$

Отсюда

$$|f(x) - f(y)| \leq |(x\varphi, x - y)| + |((x - y)\varphi, y)|.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$|(x\varphi, x - y)| + |((x - y)\varphi, y)| \leq ||x\varphi|| \cdot ||x - y|| + ||(x - y)\varphi|| \cdot ||y|| \leq$$

$$\leq ||x|| \cdot ||\varphi|| \cdot ||x - y|| + ||x - y|| \cdot ||\varphi|| \cdot ||y|| = (||x|| + ||y||) \cdot ||\varphi|| \cdot ||x - y||.$$

Из этого неравенства при $x, y \in S$ имеем неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leq 2||\varphi|| \cdot ||x - y||.$$

Следовательно, f непрерывна.

Таким образом, мы можем применять лемму. Существует $u \in S$ такое, что

$$\alpha = f(u) = \min_{x \in S} f(x).$$

Надо доказать, что $u\varphi = \alpha u$, или, обозначая $\psi = \varphi - \alpha\varepsilon$, приходим к равенству $u\psi = 0$. Имеем

$$(x\varphi, x) = f(x) \geq \alpha \text{ при любом } x \in S;$$

$$(x\varphi, x) \geq \alpha(x, x) \text{ при любом } x \in \mathbb{R}^n;$$

$$(x\psi, x) \geq 0 \text{ при любом } x \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $x = u + \lambda v$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$0 \leq (x\psi, x) = (u\psi + \lambda(v\psi), u + \lambda v) = (u\psi, u) + \lambda(v\psi, u) + \lambda(u\psi, v) + \lambda^2(v\psi, v).$$

Так как ψ – симметрическое преобразование, то $(v\psi, u) = (v, u\psi) = (u\psi, v)$, а потому

$$(u\psi, u) + \lambda(v\psi, u) + \lambda(u\psi, v) + \lambda^2(v\psi, v) = (u\psi, u) + 2\lambda(v\psi, u) + \lambda^2(v\psi, v).$$

Рассматривая это выражение как квадратный трехчлен относительно λ, и учитывая, что он неотрицательный, имеем неравенство

$$4(v\psi, u)^2 - 4(u\psi, u)(v\psi, v) \leq 0.$$

Тогда

$$f(u) = (u\varphi, u) = \alpha(u, u), \quad (u\psi, u) = 0$$

а так как $\alpha = f(u)$, то

$$4(u\psi, u)(v\psi, v) = 0.$$

Отсюда

$$(v\psi, u) = 0, \quad (u\psi, v) = 0.$$

а так как вектор v произвольный, то $u\psi = 0$. Теорема доказана.

Г л а в а 7

ПОЛИЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

§ 45. Тензоры

45.1. Пространство полилинейных форм. Пусть P – поле, $V_1, V_2, \dots, V_m, W$ – векторные пространства над P. Отображение

$$\varphi : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_m \longrightarrow W$$

называется *полилинейным или m-линейным*, если для любых $\alpha, \beta \in P$ и $v_i', v_i'' \in V_i$ справедливо равенство

$$(\dots, \alpha v_i' + \beta v_i'', \dots)\varphi = \alpha(\dots, v_i', \dots)\varphi + \beta(\dots, v_i'', \dots)\varphi.$$

Если $W = P$, то полилинейное отображение называется *полилинейной формой* или *функцией.*

Т е о р е м а 1. 1) *Множество $L = L(V_1, V_2, \dots, V_m)$ всех полилинейных форм на $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_m$ является векторным пространством над P относительно сложения и умножения функций на скаляр.*

2) *Если $\{e_{i_n}^{(k)}\}$ – база V_k, то в L существует единственная база $\{e_{i_1 \dots i_m}^*\}$ такая, что*

$$e_{i_1 \dots i_m}^*(e_{j_1}^{(1)}, e_{j_2}^{(2)}, \dots, e_{j_m}^{(m)}) = \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} \dots \delta_{i_m j_m}.$$

Она называется базой *сопряженной* к базам $\{e_{i_n}^{(k)}\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Заметим, что если две формы линейны по каждому аргументу, то после сложения сумма также будет линейной. Аналогично, для умножения на скаляр. Далее мы должны проверить 4 аксиомы абелевой группы и 4 смешанные аксиомы:

1) $\alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g$;
2) $(\alpha+\beta)f=\alpha f+\beta f$;
3) $(\alpha\beta)f=\alpha(\beta f)$;
4) $1\cdot f=f$;
для любых α,β из P и f,g из L. Проверка этих аксиом очевидна.

2) Пусть в каждом V_k фиксировано по базе $\{e^{(k)}_{i_n}\}$. Надо понять каким должно быть значение $e^*_{i_1\dots i_m}$ на произвольной m-ке $(x_1,x_2,\dots,x_m)$. Понятно, что

$$e^*_{i_1\dots i_m}(x_1,x_2,\dots,x_m)=e^*_{i_1\dots i_m}\left(\sum_{j_1}x_{1,j_1}e^{(1)}_{j_1},\sum_{j_2}x_{2,j_2}e^{(2)}_{j_2},\dots,\sum_{j_m}x_{m,j_m}e^{(m)}_{j_m}\right)=$$

$$=\sum_{j_1}\sum_{j_2}\dots\sum_{j_m}x_{1,j_1}x_{2,j_2}\dots x_{m,j_m}e^*_{i_1\dots i_m}(e^{(1)}_{j_1},e^{(2)}_{j_2},\dots e^{(m))}_{j_m})=(x_{1,i_1},x_{2,i_2},\dots,x_{m,i_m}).$$

Отсюда вытекает единственность e^*.

Докажем существование. Положим

$$e^*_{i_1\dots i_m}(x_1,x_2,\dots,x_m)=x_{1,i_1}x_{2,i_2}\dots x_{m,i_m}.$$

Надо доказать, что это база. Проверим условия сопряженности, т. е. как e^* действует на базисные векторы. Имеем

$$e^*_{i_1\dots i_m}(e^{(1)}_{j_1},e^{(2)}_{j_2},\dots e^{(m)}_{j_m})=\delta_{i_1j_1}\delta_{i_2j_2}\dots\delta_{i_mj_m}.$$

Проверим линейную независимость системы $\{e^*_{i_1\dots i_m}\}$. Пусть

$$\sum\alpha_{i_1\dots i_m}e^*_{i_1\dots i_m}=0.$$

Надо доказать, что все $\alpha_{i_1\dots i_m}=0$. Вычислим обе части этого равенства в точке $(e^{(1)}_{j_1},e^{(2)}_{j_2},\dots e^{(m)}_{j_m})$. В левой части будет $\alpha_{i_1\dots i_m}=0$.

Проверим максимальность. Пусть $f\in L$, надо показать, что ее можно представить в виде линейной комбинации. Имеем

$$f(x_1,x_2,\dots,x_m)=f\left(\sum_{j_1}x_{1,j_1}e^{(1)}_{j_1},\sum_{j_2}x_{2,j_2}e^{(2)}_{j_2},\dots,\sum_{j_m}x_{m,j_m}e^{(m)}_{j_m}\right)=$$

$$=\sum_{j_1}\sum_{j_2}\dots\sum_{j_m}x_{1,j_1}x_{2,j_2}\dots x_{m,j_m}\,f\left(e^{(1)}_{j_1},e^{(2)}_{j_2},\dots e^{(m)}_{j_m}\right).$$

где $f\left(e^{(1)}_{j_1},e^{(2)}_{j_2},\dots e^{(m))}_{j_m}\right)$ – координаты f в базе e^*. Теорема доказана.

45.2. Тензоры. Пусть V – векторное пространство над P, $V^* = L(V)$ – сопряженное пространство (множество линейных функций на V). Рассмотрим

$$L = L(\underbrace{V, \dots, V}_{p}, \underbrace{V^*, \dots, V^*}_{q}).$$

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ – база V, $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ – сопряженная база в V^*. Можно в пространстве L выбрать сопряженную по всем базам, т. е. определить $\{e^*_{i_1\dots i_p, j_1\dots j_q}\}$ базу L сопряженную к $\{e_i\}$ и к $\{e_j^*\}$.

Каждая полилинейная функция записывается через базу L. Пусть $f \in L$ имеет в базе $\{e^*_{i_1\dots i_p, j_1\dots j_q}\}$ координаты $f_{i_1\dots i_p, j_1\dots j_q}$. В V выберем другую базу. При этом изменится сопряженная база в V^* и база L. Как при этом изменятся координаты?

Пусть $e_1', e_2', \dots, e_n'$ – другая база V, $e_1'^*, e_2'^*, \dots, e_n'^*$ – сопряженная к ней база V^*, $\{e'^*_{i_1\dots i_p, j_1\dots j_q}\}$ – сопряженная к ним база L, $f'_{i_1\dots i_p, j_1\dots j_q}$ – координаты f в этой базе. Как связаны $f'_{i_1\dots i_p, j_1\dots j_q}$ с $f_{i_1\dots i_p, j_1\dots j_q}$?

Пусть $e' = Te$, где T – матрица перехода. Как связаны сопряженные базы?

Л е м м а. *Справедливо равенство $e'^* = \check{T}e^*$, где $\check{T} = (T^{-1})'$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если

$$e_i' = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} e_j$$

и

$$e_r'^* = \sum_{s=1}^{n} \check{t}_{rs} e_s^*, \text{ где } \check{T} = (\check{t}_{rs}),$$

то

$$e_r'^*(e_k') = \sum_{s=1}^{n} \check{t}_{rs} e_s^* \left(\sum_{j=1}^{n} t_{kj} e_j \right) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \check{t}_{rs} t_{kj} e_s^*(e_j) = \sum_{s=1}^{n} \check{t}_{rs} t_{ks} = \delta_{ks},$$

так как $e_s^*(e_j) = \delta_{sj}$. Лемма доказана.

Вычислим новые координаты, учитывая линейность f:

$$f'_{i_1\dots i_p, j_1\dots j_q} = f(e'_{i_1}, e'_{i_2}, \dots, e'_{i_p}, e'^*_{j_1}, e'^*_{j_2}, \dots, e'^*_{j_q}) =$$

$$= f\left(\sum_{k_1=1}^{n} t_{i_1,k_1} e_{k_1}, \sum_{k_2=1}^{n} t_{i_2,k_2} e_{k_2}, \dots \sum_{k_p=1}^{n} t_{i_p,k_p} e_{k_p}, \sum_{l_1=1}^{n} \check{t}_{j_1,l_1} e^*_{l_1}, \sum_{l_2=1}^{n} \check{t}_{j_2,l_2} e^*_{l_2}, \dots, \sum_{l_q=1}^{n} \check{t}_{j_q,l_q} e^*_{l_q} \right) =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n} \dots \sum_{k_p=1}^{n} \sum_{l_1=1}^{n} \dots \sum_{l_q=1}^{n} t_{i_1,k_1} t_{i_2,k_2} \dots t_{i_p,k_p} \check{t}_{j_1,l_1} \check{t}_{j_2,l_2} \dots \check{t}_{j_q,l_q} f_{i_1\dots i_p, j_1\dots j_q},$$

т. е. новые координаты вычисляются через старые по формуле

$$f'_{i_1\ldots i_p,j_1\ldots j_q} = \sum_{k_1=1}^{n}\ldots\sum_{k_p=1}^{n}\sum_{l_1=1}^{n}\ldots\sum_{l_q=1}^{n} t_{i_1,k_1}t_{i_2,k_2}\ldots t_{i_p,k_p}\check{t}_{j_1,l_1}\check{t}_{j_2,l_2}\ldots\check{t}_{j_q,l_q}f_{i_1\ldots i_p,j_1\ldots j_q}. \quad (1)$$

О п р е д е л е н и е. Говорят, что задан *тензор* над векторным пространством V *p раз ковариантный и q раз контравариантный*, если каждой базе векторного пространства сопоставлен набор из n^{p+q} элементов $f_{i_1\ldots i_p,j_1\ldots j_q} \in P$ так, что при изменении базы эти наборы преобразуются по формуле (1). Число $p+q$ называется *валентностью* этого тензора.

Иными словами, тензор – полилинейная функция некоторого специального вида.

45.3. Тензорное произведение векторных пространств.

З а д а ч а. Заданы несколько векторных пространств $V_1, V_2, \ldots, V_m$ над полем P. Надо построить векторное пространство T и полилинейное отображение

$$\tau : V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_m \longrightarrow T$$

такие, что

а) $\operatorname{Im}\tau$ порождает T как векторное пространство;

б) для всякого полилинейного отображения φ существует линейное отображение φ_0 такое, что $\varphi = \tau\varphi_0$, т. е. следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_m & \xrightarrow{\varphi} & W \\ \tau\downarrow & \nearrow \varphi_0 & \\ T & & \end{array}$$

Заметим, что если такие T и τ существуют, то полилинейная алгебра сводится к линейной.

Т е о р е м а 2. 1) *Для всяких $V_1, V_2, \ldots, V_m$ существуют T и τ, решающие поставленную задачу.* 2) *Эти T и τ единственны с точностью до изоморфизма.*

Пространство T называется *тензорным произведением* пространств $V_1, V_2, \ldots, V_m$ и обозначается $V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Укажем T и τ. В качестве T возьмем $T = L^*$, где $L = L(V_1, V_2, \ldots, V_m)$ – пространство полилинейных форм. Для всяких $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, $\ldots$, $v_m \in V_m$ обозначим $v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_m$ функцию $L \longrightarrow P$, определенную правилом

$$f \longrightarrow f(v_1, v_2, \ldots, v_m).$$

Это отображение линейно, т. е. для $v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_m \in T$ имеем

$$(v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_m)(\alpha f + \beta g) = \alpha f(v_1, v_2, \ldots, v_m) + \beta g(v_1, v_2, \ldots, v_m).$$

Положим
$$\tau : (v_1, v_2, \ldots, v_m) \longrightarrow v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_m.$$
Очевидно, что τ полилинейно. Действительно,
$$(\ldots, \alpha v_i' + \beta v_i'', \ldots)\tau = \ldots \otimes (\alpha v_i' + \beta v_i'') \otimes \ldots = \alpha(\ldots \otimes v_i' \otimes \ldots) + \beta(\ldots \otimes v_i'' \otimes \ldots).$$

Проверим свойство а) из нашей задачи. Пусть $\{e_{i_n}^{(k)}\}$ – база V_k. Достаточно доказать, что $\{e_{i_1}^{(1)} \otimes e_{i_2}^{(2)} \otimes \ldots \otimes e_{i_m}^{(m)}\}$ – база T, т. е. они порождают все T. Возьмем в L базу $\{e^*_{i_1 i_2 \ldots i_m}\}$, сопряженную к базам $\{e_{i_n}^{(k)}\}$. Тогда по определению
$$\left(e_{i_1}^{(1)} \otimes e_{i_2}^{(2)} \otimes \ldots \otimes e_{i_m}^{(m)}\right)(e^*_{j_1 j_2 \ldots j_m}) = e^*_{j_1 j_2 \ldots j_m}(e_{i_1}^{(1)}, e_{i_2}^{(2)}, \ldots, e_{i_m}^{(m)}) = \delta_{i_1,j_1}\delta_{i_2,j_2}\ldots\delta_{i_m,j_m}.$$

Рассмотрим $e^*_{j_1 j_2 \cdots j_m}$ как вектор из L, а $\left(e_{i_1}^{(1)} \otimes e_{i_2}^{(2)} \otimes \ldots \otimes e_{i_m}^{(m)}\right)$ как линейную функцию. До этого $e^*_{j_1 j_2 \cdots j_m}$ выступала как функция, т. е. $\{e_{i_1}^{(1)} \otimes e_{i_2}^{(2)} \otimes \ldots \otimes e_{i_m}^{(m)}\}$ – база в T, сопряженная к базе $\{e^*_{j_1 j_2 \cdots j_m}\}$ в L.

Докажем б). Пусть задано φ. Возьмем в T базу
$$\{e_{j_1}^{(1)} \otimes e_{j_2}^{(2)} \otimes \ldots \otimes e_{j_m}^{(m)}\}.$$

Мы должны положить
$$\left(e_{j_1}^{(1)} \otimes e_{j_2}^{(2)} \otimes \ldots \otimes e_{j_m}^{(m)}\right)\varphi_0 = \left(e_{j_1}^{(1)}, e_{j_2}^{(2)}, \ldots, e_{j_m}^{(m)}\right)\varphi.$$

Продолжим φ_0 на все T по линейности. Тогда для всяких $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, $\ldots$, $v_m \in V_m$ имеем
$$(x_1, x_2, \ldots, x_m)\varphi = \left(\sum_{j_1} x_{1,j_1} e_{j_1}^{(1)}, \sum_{j_2} x_{2,j_2} e_{j_2}^{(2)}, \ldots, \sum_{j_m} x_{m,j_m} e_{j_m}^{(m)}\right)\varphi =$$
$$= \sum_{j_1}\sum_{j_2}\cdots\sum_{j_m} x_{1,j_1}x_{2,j_2}\ldots x_{m,j_m}(e_{j_1}^{(1)}, e_{j_2}^{(2)}, \ldots, e_{j_m}^{(m)})\varphi =$$
$$= \sum_{j_1}\sum_{j_2}\cdots\sum_{j_m} x_{1,j_1}x_{2,j_2}\ldots x_{m,j_m}(e_{j_1}^{(1)} \otimes e_{j_2}^{(2)} \otimes \ldots \otimes e_{j_m}^{(m)})\varphi_0 =$$
$$= \sum_{j_1}\sum_{j_2}\cdots\sum_{j_m} x_{1,j_1}x_{2,j_2}\ldots x_{m,j_m}(e_{j_1}^{(1)}, e_{j_2}^{(2)}, \ldots, e_{j_m}^{(m)})\tau\varphi_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_m)\tau\varphi_0.$$
Следовательно, $\varphi = \tau\varphi_0$.

2) Докажем единственность. Пусть T', τ' – другая такая пара со свойствами а) и б). Тогда вместо φ возьмем τ'. Ввиду полилинейности существует линейное отображение

$$\tau_0' : T \longrightarrow T'$$

такое, что

$$\tau\tau_0' = \tau', \tag{1}$$

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_m & \xrightarrow{\tau'} & T \\ \tau \downarrow & & \nearrow \tau_0' \\ T' & & \end{array}$$

и существует

$$\tau_0 : T' \longrightarrow T,$$

которое линейно и

$$\tau'\tau_0 = \tau, \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) имеем

$$\tau'\tau_0\tau_0' = \tau',$$

т. е.

$$(z\tau')\tau_0\tau_0' = z\tau' \in \operatorname{Im}\tau'$$

для всякого

$$z \in V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_m,$$

т. е. $\tau_0\tau_0' = 1$. Аналогично, $\tau_0'\tau_0 = 1$, т. е. τ_0 и τ_0' обратны друг другу, а потому $T \simeq T'$. Теорема доказана.

45.4. Тензорное произведение линейных отображений. Пусть

$$V_1 \xrightarrow{\varphi_1} W_1, \quad V_2 \xrightarrow{\varphi_2} W_2$$

– два линейных отображения. Тогда по предыдущей теореме существует единственное линейное отображение

$$V_1 \otimes V_2 \xrightarrow{\varphi_1 \otimes \varphi_2} W_1 \otimes W_2$$

со свойством

$$(v_1 \otimes v_2)(\varphi_1 \otimes \varphi_2) = (v_1\varphi_1) \times (v_2\varphi_2).$$

У п р а ж н е н и е. Доказать, что

$$(\varphi\psi) \otimes (\eta\theta) = (\varphi \otimes \eta)(\psi \otimes \theta).$$