

ПРОГРАММА ПО ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЕ  
I-й семестр

**Введение** (2 лекции)

Исторический очерк. Предмет алгебры. Алгебраическая система. Изоморфизм. Подсистема. (АС. § 2)

**1. Группы, кольца, поля** (8 лекций)

Группа, кольцо, поле: аксиоматика, примеры (В. §§ 6, 11; К. §§ 44, 45, 63).

Группы подстановок: проверка аксиом, разложение на циклы, четность, разложение на транспозиции (К. § 3).

Кольца матриц: от суперпозиции линейных замен к умножению матриц, проверка аксиом, разложение матрицы на диагональную и трансвекции. Определитель обратимости, его поведение при простейших преобразованиях и умножении матриц. Разложение определителя по строке, применение к системам линейных уравнений и к вычислению обратной матрицы (К. §§ 4–6, 11, 13–15; М. §§ 1, 2).

Поле комплексных чисел: определение, существование, единственность. Геометрическая интерпретация. (К. § 17)

Общая линейная группа и ее важнейшие подгруппы – специальная, ортогональная, унитарная (М. § 1).

**2. Векторные пространства** (7 лекций)

Векторное пространство над полем: аксиоматика, примеры. Векторное пространство как алгебраическая система. (М. § 4; В. § 19)

Линейная зависимость векторов. Теорема о замене. (В. § 20)

База и ранг системы векторов. Размерность пространства. Координаты вектора. Изоморфизм любого пространства пространству строк. Связь между базами векторного пространства. Преобразование координат вектора при смене базы пространства. (М. §§ 4, 5)

Подпространства. Сумма, пересечение, прямая сумма, линейная оболочка. Размерность суммы и пересечения. (М. § 6)

Ранг матрицы. Теорема о ранге. Применение к отысканию базы суммы подпространств. Ранг произведения матриц. (К. § 10)

Системы линейных уравнений: критерий совместности, общее решение – определение и отыскание, связь произвольных систем с однородными (К. § 11).

Однородные системы: пространство решений, фундаментальные системы решений. Применение к отысканию базы пересечения подпространств. (К. § 12)

Теорема Фредгольма (Во. § 85).

Эквивалентности и фактор-множества. Фактор-пространство, его размерность. (В. §§ 5, 8; X. §§ 21, 22)

### **3. Кольца многочленов (6 лекций)**

Алгоритм деления с остатком. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида. Линейное уравнение с двумя неизвестными в кольце многочленов. Взаимно простые многочлены (К. §§ 20, 21).

Корни и значения многочленов: теорема Безу, формула Тейлора, интерполяционный многочлен Лагранжа, кратные корни (К. § 22).

Разложение на неразложимые множители (В. § 18; К. § 48).

Идеалы и фактор-кольца. Теорема о существовании корня. (В. § 16; К. § 49)

Условие максимальности – два равносильных определения. Теорема Гильберта о базах. (РГ. § 8)

В конце семестра – экзамен.

## **ПРОГРАММЫ СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ**

(в скобках указаны типичные задачи)

### **1. Группы, кольца, поля**

Занятие 1. Алгебраические системы. Примеры и простейшие свойства групп. (П. №№ 1634, 1635, 1636)

Занятие 2. Циклические группы. Изоморфизм. (П. №№ 1640, 1642, 1646, 1647, 1649, 1650)

Занятие 3. Примеры и простейшие свойства колец и полей. Изоморфизм. (П. №№ 1709–1716, 1722, 1723, 1734, 1735, 1741)

Занятие 4. Продолжение (П. №№ 1742, 1743, 1751, 1754, 1755).

Занятие 5. Группы подстановок (П. №№ 153, 154, 163, 164, 174, 176, 178, 185, 1658).

Занятие 6. Кольца матриц (П. №№ 789, 790, 798, 803, 804, 811, 814, 818, 827, 829).

Занятие 7. Разложение матрицы в произведение диагональной матрицы и трансвекций. Определение определителя. (П. №№ 790 (разложить на диагональную матрицу и трансвекции), 45, 46, 197, 198, 199, 204)

Занятие 8. Определители. Применение к невырожденным системам линейных уравнений. (П. №№ 75, 76, 238, 257, 258, 555)

Занятие 9. Продолжение (П. №№ 290, 302, 308, 313, 365, 371).

Занятие 10. Обратная матрица. Общая линейная группа и ее важнейшие подгруппы. (П. №№ 839, 840, 845, 866, 873, 891, 892)

Занятие 11. Комплексные числа (Ф.С. №№ 101, 107 (7), 112 (15), 119 (22), 137 (36), 143 (43), 159 (59 а), 163 (66), где в скобках указаны номера по старому задачнику).

Занятие 12. Контрольная работа.

## **2. Векторные пространства**

Занятие 13. Примеры векторных пространств. Линейная зависимость. (П. №№ 1285–1294, 653, 655)

Занятие 14. Векторные пространства (П. №№ 1297–1300, 1303, 1304, 1821, 1823, 1824).

Занятие 15. Ранг матрицы. База суммы подпространств. (П. №№ 1278, 1279, 1280, 1281, 1282, 608, 609, 627, 1311, 1305)

Занятие 16. Произвольные системы линейных уравнений. База пересечения подпространств. (П. №№ 690, 691, 697, 725, 730, 1308, 1317, 1320, 1321)

## **3. Кольца многочленов**

Занятие 17. Делимость многочленов. Алгоритм Евклида. (Ф.С. №№ 577 (631), 578 (632), 580 (634), где в скобках указаны номера по старому задачнику)

Занятие 18. Схема Горнера и ее применения. Кратные корни. (Ф.С. №№ 549 (543), 550 (544), 551 (545), 552 (546), 555(549))

Занятие 19. Интерполяционный многочлен. (Ф.С. №№ 631 (640), 632 (641), 585 (635))

Занятие 20. Идеалы и фактор-кольца (П. №№ 1781, 1785, 1796, 1799).

Занятие 21. Контрольная работа.

В конце семестра – зачет.

## Литература

Учебники:

(К) Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: Физматгиз, 1963.

(М) Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970.

Дополнительная литература:

(В) Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. М.: Наука, 1979.

(Во) Воеводин В. В. Линейная алгебра. Санкт-Петербург.: Лань, 2006.

(ОТГ) Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1994.

(Ко) Кострикин А. И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.

(АС) Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.

(РГ) Мерзляков Ю. И. Рациональные группы. М.: Наука, 1987.

(Х) Халмош П. Конечномерные векторные пространства. М.: Физматгиз, 1963.

Задачники:

(П) Проскураков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1978.

(Ф.С.) Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука, 1977.