

ПРОГРАММА ПО ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЕ

II-й семестр

3. Кольца многочленов (продолжение, 6 лекций)

Результат двух многочленов от одного переменного. Критерий совместности двух уравнений с одним неизвестным. Исключение неизвестных. Дискриминант. (К. § 54)

Кольцо многочленов от нескольких переменных. Словарное упорядочение. Подкольцо симметрических многочленов. Элементарные симметрические многочлены. (К. §§ 51, 52)

Комплексные многочлены: алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел (К. § 55).

Вложение целостного кольца в поле. Поле рациональных дробей $P(x_1, \dots, x_n)$. База векторного пространства $P(x)$ над P (простейшие дроби). (В. §§ 13; К. §§ 25, 50)

Равносильные определения кольца с однозначным разложением. Лемма о примитивных многочленах. Кольцо многочленов над кольцом с однозначным разложением – само кольцо с однозначным разложением. (В. § 30)

Разложение на неразложимые множители над полями комплексных, действительных и рациональных чисел. Разложение на простейшие дроби над \mathbb{C} и \mathbb{R} . (К. §§ 24, 25; В. § 32)

4. Линейные преобразования векторных пространств (5 лекций)

Линейное преобразование векторного пространства и его матрица в данной базе. Координаты образа вектора. Изменение матрицы при изменении базы. Операции над преобразованиями. Изоморфизм с алгеброй матриц. (М. §§ 8, 9; К. § 31, 32)

Образ, ядро, ранг линейного преобразования. Невырожденные преобразования. (М. § 10)

Инвариантные подпространства. Неприводимость. Одномерные инвариантные подпространства, собственные векторы и собственные значения. Характеристический многочлен линейного преобразования. Теорема Гамильтона – Кэли. Корневое разложение. (М. §§ 3, 11, 12; Х. § 48)

Нильпотентные преобразования: определение, построение кусочно-нисходящей базы, канонический вид нильпотентного преобразования (П. № 1529, Х. § 57).

Полупростые преобразования: определения, полупростота над полем, содержащим характеристические корни преобразования, полупростота над полем действительных чисел (РГ. § 15).

Разложение преобразования на полупростую и нильпотентную компоненты (РГ. § 15).

5. Теорема Жордана (4 лекции)

Задача о подобии матриц: постановка, жорданова форма, ее существование и единственность. Два способа приведения матрицы к жордановой форме: 1) через корневое разложение и кусочно-нисходящие базы; 2) через разложение на полупростую и нильпотентную компоненты. (X. § 58)

Функции от матриц: определение и свойства, многочлен Лагранжа-Сильвестера, ряды от матриц (M. § 16).

6. Евклидовы и унитарные пространства (3 лекции)

Аксиоматика евклидовых и унитарных пространств. Ортонормированные системы. Процесс ортогонализации. Изоморфизм евклидовых (унитарных) пространств. Норма вектора. Норма линейного преобразования. Сопряженные отображения. (M. §§ 17, 18; K. § 34; X. §§ 61, 87)

Ортогональные преобразования: равносильные определения в терминах скалярного произведения и в терминах матриц, группа ортогональных преобразований, канонический вид матрицы ортогонального преобразования (K. § 35; M. § 19).

Симметрические преобразования: равносильные определения в терминах скалярного произведения и в терминах матриц, характеристические корни симметрических преобразований, существование ортонормированной базы из собственных векторов, следствие для матриц (K. § 36; M. § 19).

Сингулярные числа линейного отображения. Сингулярное разложение прямоугольной матрицы. (Bo. § 78).

7. Квадратичные формы (3 лекции)

Поведение матрицы квадратичной формы при линейной невырожденной замене переменных. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Противоречащий пример в характеристике 2. Инвариантность ранга. Сигнатура и закон инерции действительной квадратичной формы. (K. §§ 26, 27; M. § 22)

Эквивалентность форм относительно данной группы линейных замен: определения, критерий эквивалентности и канонический вид комплексных квадратичных форм относительно группы $GL_n(\mathbb{C})$, критерий эквивалентности и канонический вид действительных квадратичных форм относительно группы $GL_n(\mathbb{R})$, критерий эквивалентности и канонический вид действительных квадратичных форм относительно группы $O_n(\mathbb{R})$ (приведение к главным осям). (M. §§ 21, 22; K. § 37)

Положительно определенные формы: равносильные определения в терминах значений, в терминах нормального вида и в терминах угловых миноров. Одновременная канонизация пары форм. (K. §§ 28, 37; M. §§ 22, 23)

В конце семестра – экзамен

ПРОГРАММЫ СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ
(в скобках указаны типичные задачи)

Занятие 22. Уравнения 3-й и 4-й степени. Корни из единицы. (Ф.С. №№ 167 (75), 172 (78), 173 (79), 174 (80), 175 (81), 176 (82))

Занятие 23. Отделение действительных корней. Теорема Штурма. (Ф.С. №№ 773 (696), 777 (698), 780 (701))

Занятие 24. Результант. Дискриминант. (Ф.С. №№ 723 (821), 724 (822), 725 (823), 726 (824), 731 (829), 732 (830), 733 (831), 742 (841))

Занятие 25. Разложение на множители. Простейшие дроби. (Ф.С. №№ 585 (639), 587 (582), 589 (585), 590 (584), 592 (587), 599 (593), 600 (594), 624 (655), 626 (656), 627 (658))

Занятие 26. Неразложимость над \mathbb{Q} и \mathbb{Z} (Ф.С. №№ 649 (663), 650 (664), 653 (667), 660 (), 666 (672)).

Занятие 27. Симметрические многочлены (Ф.С. №№ 693 (755), 695 (757), 699 (765), 702 (773), 706 (786), 707 (787)).

4. Линейные преобразования векторных пространств.

Занятие 28. Линейные преобразования и их матрицы (П. №№ 1441–1444, 1445, 1447, 1449, 1453, 1458, 1833, 1834).

Занятие 29. Собственные векторы, собственные значения. Диагонализуемость. (П. №№ 1463, 1465, 1467, 1477, 1479, 1480, 1070)

Занятие 30. Инвариантные подпространства. (П. №№ 1487, 1499, 1506)

Занятие 31. Корневое разложение (П. №№ 1509, 1512, 1515).

Занятие 32. Нильпотентные преобразования. Кусочно-нисходящие базы. (П. №№ 1108, 1095, 1531)

Занятие 33. Разложение на полупростую и нильпотентную компоненты (П. №№ 1511, 1512).

Занятие 34. Контрольная работа.

5. Подобие матриц и эквивалентность λ -матриц

Занятие 35. Жорданова форма произвольной матрицы: геометрический подход (П. №№ 1091, 1064, 1527, 1096, 1107).

Занятие 36. Функции от матриц – вычисление по определению и через многочлен Лагранжа-Сильвестера (П. №№ 1167, 1169, 1168).

6. Евклидовы и унитарные пространства

Занятие 37. Определения. Процесс ортогонализации (П. №№ 1362, 1363, 1365, 1371, 1419).

Занятие 38. Линейные преобразования евклидовых и унитарных пространств. Сопряженные отображения. (П. №№ 1542, 1548, 1549, 1551).

Занятие 39. Симметрические и ортогональные преобразования. (П. №№ 1571, 1572, 1574, 1575)

Занятие 40. Сингулярные числа. Сингулярное разложение матрицы. Полярное разложение матрицы (П. №№ 1585, 1599, 1600).

7. Квадратичные формы.

Занятие 41. Канонизация невырожденным преобразованием. Приведение к главным осям. (П. №№ 1175, 1182, 1183, 1254, 1204, 1205)

Занятие 42. Положительно определенные формы. Пары форм (П. №№ 1212, 1213, 1225, 1226).

Занятие 43. Контрольная работа.

Литература

Учебники:

(К) Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: Физматгиз, 1963.

(М) Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970.

Дополнительная литература:

(В) Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. М.: Наука, 1979.

(Во) Воеводин В. В. Линейная алгебра. Санкт-Петербург.: Лань, 2006.

(ОТГ) Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1994.

(Ко) Кострикин А. И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.

(АС) Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.

(РГ) Мерзляков Ю. И. Рациональные группы. М.: Наука, 1987.

(Х) Халмош П. Конечномерные векторные пространства. М.: Физматгиз, 1963.

Задачники:

(П) Проскураков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1978.

(Ф.С.) Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука, 1977.