

ВОПРОСЫ ПО ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЕ
II-й семестр

- 1) Результат двух многочленов от одного неизвестного: определение, формула вычисления через множество корней.
- 2) Определитель Вандермонда. Формулы Виета.
- 3) Критерий совместности двух уравнений с одним неизвестным.
- 4) Исключение неизвестных.
- 5) Дискриминант: определение, связь с результатом.
- 6) Кольцо многочленов от нескольких переменных.
- 7) Словарное упорядочивание многочленов. Лемма о высшем члене произведения двух многочленов.
- 8) Подкольцо симметрических многочленов.
- 9) Симметрические многочлены от корней многочлена от одной переменной.
- 10) Алгебраическая независимость элементарных симметрических многочленов.
- 11) Лемма о модуле старшего члена.
- 12) Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел.
- 13) Вложение целостного кольца в поле: существование.
- 14) Вложение целостного кольца в поле: единственность.
- 15) Поле рациональных дробей.
- 16) База векторного пространства $P(x)$ над полем P (простейшие дроби).
- 17) Равносильные определения кольца с однозначным разложением.
- 18) Лемма о примитивных многочленах.
- 19) Кольцо многочленов над кольцом с однозначным разложением – само кольцо с однозначным разложением.

- 20) Линейные преобразования векторного пространства и его матрица в данной базе.
- 21) Координаты образа вектора. Связь между матрицами линейного преобразования в различных базах.
- 22) Алгебра линейных преобразований. Изоморфизм с алгеброй матриц.
- 23) Образ и ядро линейного преобразования – подпространства векторного пространства.
- 24) Связь размерностей ядра и образа линейного преобразования.
- 25) Теорема о невырожденных линейных преобразованиях.
- 26) Инвариантные подпространства и неприводимость. Связь этих понятий.
- 27) Индуцированные преобразования.

- 28) Одномерные инвариантные подпространства, собственные векторы и собственные значения.
- 29) Теорема Гамильтона-Кэли.
- 30) Свойства нильпотентных преобразований.
- 31) Свойства полупростых преобразований.
- 32) Полупростота над полем, содержащим характеристические корни преобразования.
- 33) Разложение преобразования на полупростую и нильпотентную компоненты: построение компонент и проверка требований.
- 34) Разложение преобразования на полупростую и нильпотентную компоненты: единственность.
- 35) Полупростота над полем действительных чисел.
- 36) Задача о подобии матриц: постановка, жорданова форма, формулировка теоремы Жордана.
- 37) Корневые векторы, корневое подпространство.
- 38) Теорема о корневом разложении.
- 39) Канонический вид нильпотентного преобразования.
- 40) Теорема Жордана.
- 41) Многочлены от матриц.
- 42) Функции от матриц. Многочлен Лагранжа-Сильвестера.
- 43) Ряды от матриц.
- 44) Евклидовы и унитарные пространства: аксиоматика и примеры.
- 45) Ортонормированные системы векторов. Процесс ортогонализации.
- 46) Изоморфизм евклидовых пространств.
- 47) Норма вектора, ее свойства.
- 48) Лемма об ограниченности линейного преобразования евклидова пространства.
- 49) Норма линейного преобразования, ее свойства.
- 50) Сопряженные отображения.
- 51) Определения и свойства ортогональных преобразований.
- 52) Канонический вид матрицы ортогонального преобразования.
- 53) Определение и свойства симметрических преобразований.
- 54) Характеристические корни симметрического преобразования.
- 55) Существование ортонормированной базы из собственных векторов для симметрического преобразования.
- 56) Канонический вид матрицы симметрического преобразования.
- 57) Полярное разложение: единственность.
- 58) Полярное разложение: существование.

- 59) Поведение матрицы квадратичной формы при линейной замене переменных.
- 60) Приведение квадратичной формы к каноническому виду.
- 61) Приведение квадратичной формы к каноническому виду: противоречащий пример в характеристике 2, инвариантность ранга.
- 62) Сигнатура и закон инерции действительной квадратичной формы.
- 63) Критерий эквивалентности и канонический вид комплексных квадратичных форм относительно группы $GL_n(\mathbb{C})$.
- 64) Критерий эквивалентности и канонический вид действительных квадратичных форм относительно группы $GL_n(\mathbb{R})$.
- 65) Критерий эквивалентности и канонический вид действительных квадратичных форм относительно группы $O_n(\mathbb{R})$.
- 66) Положительно определенные квадратичные формы: равносильные определения.
- 67) Одновременная канонизация пары действительных квадратичных форм.