УДК 512.54

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ СОПРЯГАЮЩИХ АВТОМОРФИЗМОВ И ГРУПП КОС НЕКОТОРЫХ МНОГООБРАЗИЙ [1]

В. Г. Бардаков

Классическая группа кос Артина B_n, $n \geq 2$, на n нитях (см. [1]) задается порождающими $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n-1}$ и соотношениями

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, ..., n-2, \tag{1}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{при } |i-j| \geq 2. \tag{2}$$

Вопрос о линейности (т. е. о точной представимости конечномерными матрицами над полем) групп кос сформулировал В. Бурау [2] в 1936 г. Отметим, что группа B_2 — бесконечная циклическая, а потому является линейной. Линейность B_3 доказал В. Магнус (см. [1, теорема 3.15]). Вопрос о линейности групп B_n при $n \geq 4$ почти 65 лет оставался открытым. Долгое время существовала гипотеза о том, что представление Бурау является точным. В 1991 г. Д. Муди [3] опроверг эту гипотезу, построив нетривиальный элемент, лежащий в ядре представления Бурау группы B_n при $n \geq 9$. Позднее Д. Лонг и М. Патон [4] показали, что представление Бурау не является точным уже при $n \geq 6$, а С. Бигелоу [5] снизил эту границу до 5. Вопрос о точности представления Бурау группы B_4 до сих пор остается открытым.

Р. Лоуренс [6] построила новые представления группы кос B_n, а в работах Д. Крамера [7] и С. Бигелоу (обзор этих работ можно найти в [8]) было показано, что одно из этих представлений является точным. Следовательно, группы кос являются линейными.

Как установил Э. Артин (см. [1, теорема 1.9]) группа кос B_n вкладывается в группу автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_n)$ свободной группы F_n со свободными порождающими $x_1, x_2, \ldots, x_n$. При этом известно [9], что сама группа $\mathrm{Aut}(F_n)$ не является линейной при $n \geq 3$. Возникает естественный

Вопрос 1. Найти максимальную по включению линейную подгруппу группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_n)$, $n \geq 3$, содержащую группу кос B_n.

По упоминавшейся теореме Э. Артина [1, теорема 1.9] автоморфизм β из $\mathrm{Aut}(F_n)$ принадлежит группе кос B_n тогда и только тогда, когда β удовлетворяет следующим двум условиям:

$$1) \quad \beta(x_i) = f_i^{-1} x_{\pi(i)} f_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$2) \quad \beta(x_1 x_2 \ldots x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n,$$

где $f_i \in F_n$, а π — некоторая перестановка множества индексов $\{1, 2, \ldots, n\}$. Автоморфизмы, удовлетворяющие условию 1) называются *сопрягающими автоморфизмами*. Очевидно, множество сопрягающих автоморфизмов образует группу, которая называется *группой сопрягающих автоморфизмов* и обозначается символом C_n. Группа кос B_n является подгруппой группы C_n. Строение группы C_n похоже на строение группы B_n [10]. Поэтому можно сформулировать вопрос (см. [11, вопрос 15.9]) о линейности группы C_n при $n \geq 3$ (группа $C_2 \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, а потому линейна). Один из возможных подходов к решению этого вопроса состоит в продолжении известных линейных представлений группы кос B_n на группу C_n.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №02–01–01118)

В предлагаемой работе мы построим продолжение представления Бурау на группу C_n, а также покажем, что точное линейное представление Лоуренс–Крамера группы B_3 продолжается на группу C_3, а при $n \geq 4$ будет построено продолжение этого представления при некоторых дополнительных ограничениях на параметры представления.

Группу кос B_n можно рассматривать как частный случай общей конструкции группы кос $B_n(M)$ на n нитях многообразия M (точное определение смотрите в § 2).

Возникает следующий

Вопрос 2. Для каких многообразий M и для каких значений n группа кос $B_n(M)$ является линейной?

Наибольший интерес представляют двумерные связные многообразия. Так как все компактные связные двумерные многообразия классифицированы, то естественно начать исследовать группы кос этих многообразий. При этом особую роль играют группы кос $B_n(S^2)$ сферы S^2 и $B_n(P^2)$ проективной плоскости P^2, так как группы кос только этих многообразий имеют кручение.

В работе мы докажем, что группа кос $B_n(S^2)$ сферы является линейной при всех $n \geq 2$. С группой $B_n(S^2)$ тесно связана группа классов отображений $M(0, n)$ сферы с n выколотыми точками. Мы докажем, что группа $M(0, n)$ является линейной для всякого $n \geq 2$. Для групп кос $B_n(P^2)$ проективной плоскости мы установим линейность при $n = 3$ (при $n = 1, 2$ она конечна). Во всех разбираемых случаях описывается метод построения точных линейных представлений.

Как уже отмечалось выше, группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_n)$ не линейна при $n \geq 3$. В работе [12] установлено, что группа $\mathrm{Aut}(F_2)$ линейна тогда и только тогда, когда линейна группа кос B_4. В последнем параграфе, используя представление Лоуренс–Крамера, мы укажем в явном виде точное линейное представление группы $\mathrm{Aut}(F_2)$.

Автор благодарит участников семинара "Эварист Галуа" за полезные обсуждения, а также А. А. Коробова, прочитавшего рукопись и внесшего ряд полезных предложений.

Результат о линейности группы кос сферы анонсирован в [20]. Пока работа готовилась к печати, мне стало известно, что С. Бигелоу и Р. Будней [21] независимо доказали линейность группы кос сферы и группы классов отображений сферы с n выколотыми точками.

§ 1. Продолжение линейных представлений группы кос на группу сопрягающих автоморфизмов

Напомним, что представление Бурау $\psi : B_n \longrightarrow \mathrm{GL}(W_n)$ отображает группу кос B_n в группу автоморфизмов $\mathrm{GL}(W_n)$ свободного n–мерного модуля W_n над кольцом лорановских многочленов $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$. Если $w_1, w_2, \ldots, w_n$ — базис модуля W_n, то элементы $\psi(\sigma_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ действуют на базисных элементах по правилу (условимся писать вместо $\psi(\sigma_i)(w_j)$ или $w_j^{\psi(\sigma_i)}$ просто $\sigma_i(w_j)$ или $w_j^{\sigma_i}$ соответственно). При этом мы рассматриваем правое действие:

$$\begin{aligned}
&\sigma_i(w_i) = (1-q)w_i + qw_{i+1},\\
&\sigma_i(w_{i+1}) = w_i,\\
&\sigma_i(w_l) = w_l, \quad \text{при} \quad l \neq i, i+1.
\end{aligned}$$

Как установила А. Г. Савушкина [13], группа сопрягающих автоморфизмов C_n порождается автоморфизмами $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ свободной группы F_n. Эти автоморфизмы действуют на свободных порождающих по правилу:

$$\sigma_i : \begin{cases} x_i \longmapsto x_i x_{i+1} x_i^{-1}, \\ x_{i+1} \longmapsto x_i, \\ x_l \longmapsto x_l \qquad\qquad \text{при} \quad l \neq i, i+1. \end{cases}$$

$$\alpha_i : \begin{cases} x_i \longmapsto x_{i+1}, \\ x_{i+1} \longmapsto x_i, \\ x_l \longmapsto x_l \qquad \text{при} \quad l \neq i, i+1. \end{cases}$$

При этом автоморфизмы $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ порождают группу кос B_n и удовлетворяют соотношениям (1)–(2). Автоморфизмы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ порождают группу подстановок S_n, которая задается соотношениями

$$\alpha_i^2 = 1 \quad \text{при} \quad i = 1, 2, ..., n-1, \tag{3}$$

$$\alpha_i \alpha_{i+1} \alpha_i = \alpha_{i+1} \alpha_i \alpha_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, ..., n-2, \tag{4}$$

$$\alpha_i \alpha_j = \alpha_j \alpha_i \quad \text{при } |i-j| \geq 2. \tag{5}$$

Система определяющих соотношений группы C_n помимо соотношений (1)–(5) содержит соотношения

$$\alpha_i \sigma_j = \sigma_j \alpha_i \quad \text{при } |i-j| \geq 2, \tag{6}$$

$$\sigma_i \alpha_{i+1} \alpha_i = \alpha_{i+1} \alpha_i \sigma_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, ..., n-2, \tag{7}$$

$$\sigma_{i+1} \sigma_i \alpha_{i+1} = \alpha_i \sigma_{i+1} \sigma_i \quad \text{при } i = 1, 2, ..., n-2. \tag{8}$$

Справедливо

Предложение 1. *Существует линейное представление $\widetilde{\psi} : C_n \longrightarrow \mathrm{GL}(W_n)$, являющееся продолжением представления Бурау $\psi : B_n \longrightarrow \mathrm{GL}(W_n)$.*

Доказательство. Для порождающих группы кос положим $\widetilde{\psi}(\sigma_i) = \psi(\sigma_i)$, а действие автоморфизмов $\widetilde{\psi}(\alpha_i)$ определим на базисных элементах модуля W_n равенствами

$$\begin{aligned} &\alpha_i(w_i) = w_{i+1}, \\ &\alpha_i(w_{i+1}) = w_i, \\ &\alpha_i(w_l) = w_l, \quad \text{при} \quad l \neq i, i+1. \end{aligned}$$

Так как всякий элемент группы C_n является словом от порождающих $\sigma_1^{\pm1}, \sigma_2^{\pm1}, \ldots, \sigma_{n-1}^{\pm1}$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, то тем самым мы определили отображение $\widetilde{\psi} : C_n \longrightarrow \mathrm{GL}(W_n)$. Покажем, что это отображение является гомоморфизмом. Для этого достаточно проверить, что все соотношения, выполненные в группе C_n, выполняются и в группе $\widetilde{\psi}(C_n)$. Для соотношений (1)–(5) это очевидно. Проверим, что в группе $\widetilde{\psi}(C_n)$ выполняется образ соотношения (7), т. е. выполнено равенство

$$\widetilde{\psi}(\sigma_i) \widetilde{\psi}(\alpha_{i+1}) \widetilde{\psi}(\alpha_i) = \widetilde{\psi}(\alpha_{i+1}) \widetilde{\psi}(\alpha_i) \widetilde{\psi}(\sigma_{i+1}). \tag{9}$$

Для этого надо проверить, что для всякого вектора $v \in W_n$ его образ под действием автоморфизма, стоящего в левой части равенства (9) совпадает с образом этого вектора под действием правой части равенства (9). Так как v является линейной комбинацией базисных векторов, то требуемое равенство достаточно проверить только для них. Действуя левой частью, получим

$$w_i^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} = (1-q)w_{i+1} + qw_{i+2},$$

$$w_{i+1}^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} = w_{i+1},$$

$$w_{i+2}^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} = w_i,$$

$$w_l^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} = w_l \quad \text{при} \quad l \neq i, i+1, i+2.$$

Аналогичным образом, действуя правой частью соотношения (9), получим

$$w_i^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} = (1-q)w_{i+1} + qw_{i+2},$$

$$w_{i+1}^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} = w_{i+1},$$

$$w_{i+2}^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} = w_i,$$

$$w_l^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} = w_l \quad \text{при} \quad l \neq i, i+1, i+2.$$

Следовательно, соотношение (9) выполняется. Аналогичным образом проверяется, что сохраняются и соотношения (5) и (8). Предложение доказано.

Напомним [6, 7, 8] определение точного линейного представления Лоуренс–Крамера. Пусть V_n — свободный модуль размерности $m = n(n-1)/2$ с базисом v_{ij}, $1 \leq i < j \leq n$, над кольцом лорановских многочленов $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}, q^{\pm 1}]$. Тогда представление $\rho : B_n \longrightarrow \mathrm{GL}(V_n)$ определяется действием порождающих σ_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, на базисе модуля V_n равенствами

$$\sigma_i(v_{k,i}) = (1-q)v_{k,i} + qv_{k,i+1} + q(q-1)v_{i,i+1},$$

$$\sigma_i(v_{k,i+1}) = v_{k,i} \quad \text{при} \quad k < i,$$

$$\sigma_i(v_{i,i+1}) = tq^2 v_{i,i+1},$$

$$\sigma_i(v_{i,l}) = tq(q-1)v_{i,i+1} + (1-q)v_{i,l} + qv_{i+1,l} \quad \text{при} \quad i+1 < l,$$

$$\sigma_i(v_{i+1,l}) = v_{i,l},$$

$$\sigma_i(v_{k,l}) = v_{k,l} \quad \text{при} \quad \{k, l\} \bigcap \{i, i+1\} = \emptyset.$$

Из этих формул нетрудно получить формулы действия элемента σ_i^{-1}:

$$\sigma_i^{-1}(v_{k,i}) = v_{k,i+1},$$

$$\sigma_i^{-1}(v_{k,i+1}) = q^{-1}v_{k,i} + q^{-1}(q-1)v_{k,i+1} - t^{-1}q^{-2}(q-1)v_{i,i+1} \quad \text{при} \quad k < i,$$

$$\sigma_i^{-1}(v_{i,i+1}) = t^{-1}q^{-2}v_{i,i+1},$$

$$\sigma_i^{-1}(v_{i,l}) = v_{i+1,l} \quad \text{при} \quad i+1 < l,$$

$$\sigma_i^{-1}(v_{i+1,l}) = -q^{-2}(q-1)v_{i,i+1} + q^{-1}v_{i,l} + q^{-1}(q-1)v_{i+1,l},$$

$$\sigma_i^{-1}(v_{k,l}) = v_{k,l} \quad \text{при} \quad \{k,l\}\bigcap\{i,i+1\} = \emptyset.$$

Группа крашеных кос P_n порождается элементами

$$a_{i,i+1} = \sigma_i^2, \quad a_{i,j} = \sigma_{j-1}\ldots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\ldots\sigma_{j-1}^{-1}, \quad 1 \le i < j-1 \le n-1.$$

Выпишем действие порождающих $a_{i,i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, на базисе модуля V_n:

$$a_{i,i+1}(v_{k,i}) = (q^2-q+1)v_{k,i} + q(1-q)v_{k,i+1} + q(q-1)(tq^2-q+1)v_{i,i+1},$$

$$a_{i,i+1}(v_{k,i+1}) = (1-q)v_{k,i} + qv_{k,i+1} + q(q-1)v_{i,i+1} \quad \text{при} \quad k < i,$$

$$a_{i,i+1}(v_{i,i+1}) = t^2q^4v_{i,i+1},$$

$$a_{i,i+1}(v_{i,l}) = tq(q-1)(tq^2-q+1)v_{i,i+1} + (q^2-q+1)v_{i,l} + q(1-q)v_{i+1,l} \quad \text{при} \quad i+1 < l,$$

$$a_{i,i+1}(v_{i+1,l}) = tq(q-1)v_{i,i+1} + (1-q)v_{i,l} + qv_{i+1,l},$$

$$a_{i,i+1}(v_{k,l}) = v_{k,l} \quad \text{при} \quad \{k,l\}\bigcap\{i,i+1\} = \emptyset.$$

Можно дать геометрическую интерпретацию порождающих модуля V_n. Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ — единичный диск. Зафиксируем множество $n \ge 1$ различных точек $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, лежащих внутри диска на вещественной оси и $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$. Положим $D_n = D \setminus Y$. Тогда группа гомеоморфизмов $\mathrm{Homeo}(D_n)$ изоморфна B_n. При этом элементами $\mathrm{Homeo}(D_n)$ являются изотопные классы гомеоморфизмов $D_n \longrightarrow D_n$, оставляющие неподвижной каждую точку границы $\partial D_n = \partial D = S^1$. Каждый такой гомеоморфизм единственным образом продолжается до гомеоморфизма всего диска D, переставляющего точки $y_1, y_2, \ldots, y_n$. *Вилкой* в D_n называется дерево F, вложенное в D, имеющее три ребра и четыре различные вершины d, y_i, y_j, z, такие, что $F\bigcap\partial D = d = \sqrt{-1}$, $F\bigcap Y = \{y_i, y_j\}$ и z — общая вершина всех трех ребер. Ребро H, соединяющее d с z называется *ручкой* вилки F. Обозначим через T дугу, являющуюся объединением двух других ребер. Тогда $\partial T = \{y_i, y_j\}$. Эта дуга называется *зубьями* вилки. Вилка называется *стандартной*, если все ее точки имеют неотрицательную мнимую часть. Стандартная вилка задается с точностью до изотопии парой точек $\partial T = \{y_i, y_j\}$. Сопоставим этой стандартной вилке базисный элемент v_{ij} модуля V_n. При этом мы считаем $v_{ij} = v_{ji}$ при $i > j$.

Чтобы продолжить представление Лоуренс–Крамера на группу C_n, мы должны определить действие группы S_n на базисных элементах модуля V_n. Пусть группа S_n действует на множестве Y перестановками. Это действие индуцирует действие на множестве стандартных вилок v_{ij}, $1 \leq i < j \leq n$, а потому и на всем модуле V_n. Если π — подстановка из S_n, действующая на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, то положим $\pi(v_{ij}) = v_{\pi(i),\pi(j)}$. Тогда автоморфизмы α_i будут действовать на базисе модуля V_n по следующим формулам

$$\alpha_i(v_{k,i}) = v_{k,i+1},$$

$$\alpha_i(v_{k,i+1}) = v_{k,i} \quad \text{при} \quad k < i,$$

$$\alpha_i(v_{i,i+1}) = v_{i,i+1},$$

$$\alpha_i(v_{i,l}) = v_{i+1,l} \quad \text{при} \quad i + 1 < l,$$

$$\alpha_i(v_{i+1,l}) = v_{i,l},$$

$$\alpha_i(v_{k,l}) = v_{k,l} \quad \text{при} \quad \{k, l\} \bigcap \{i, i + 1\} = \emptyset.$$

Чтобы проверить, что так определенное действие задает гомоморфизм группы S_n в группу $\mathrm{GL}(V_n)$ достаточно проверить, что образы автоморфизмов α_i удовлетворяют соотношениям группы S_n. Для этого заметим, что формулы действия элементов α_i на базисе модуля V_n получаются из соответствующих формул действия порождающих σ_i если положить $q = t = 1$. Следовательно, при нашем представлении сохраняются соотношения (4)–(5). То, что соотношение $\alpha_i^2 = 1$ сохраняется, легко следует из формул действия элемента $a_{i,i+1} = \sigma_i^2$ на базисе модуля V_n. Таким образом, мы построили линейное представление группы S_n. Так как при $n \geq 5$ группа S_n содержит простую группу A_n индекса 2, то легко заметить, что построенное представление является точным. Следовательно, нами установлена

Лемма 1. *Построенное представление $S_n \longrightarrow \mathrm{GL}(V_n)$ является точным линейным представлением группы S_n.*

Следовательно, мы имеем отображение группы C_n в группу $\mathrm{GL}(V_n)$, заданное на порождающих $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$. При этом отображении будут сохраняться все соотношения, связывающие порождающие α_i, а также соотношения, связывающие порождающие σ_i. Проверим теперь, будут ли сохраняться соотношения, содержащие одновременно порождающие α_i и σ_i.

Каждому автоморфизму φ модуля V_n сопоставим его носитель

$$\mathrm{supp}(\varphi) = \{v_{i,j} | \varphi(v_{i,j}) \neq \lambda v_{i,j} \text{ ни для какого } \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Иными словами, носитель автоморфизма φ состоит из таких базисных векторов, которые не являются собственными для φ. Легко проверить, что

$$\mathrm{supp}(\alpha_i) = \mathrm{supp}(\sigma_i) = \{v_{k,i}, v_{k,i+1} (1 \leq k < i \leq n); v_{i,l}, v_{i+1,l} (2 \leq i + 1 < l \leq n)\}.$$

Непосредственно проверяется

Лемма 2. *Пусть натуральные числа i и j таковы, что $1 \leq i < j - 1 \leq n - 1$. Тогда справедливо равенство*

$$\mathrm{supp}(\beta_i) \bigcap \mathrm{supp}(\beta_j) = \{v_{i,j}, v_{i,j+1}, v_{i+1,j}, v_{i+1,j+1}\},$$

где $\beta_i \in \{\alpha_i, \sigma_i\}$, $\beta_j \in \{\alpha_j, \sigma_j\}$.

Покажем теперь, что определенное выше действие порождающих σ_i и α_i на модуле V_n определяет гомоморфизм $\rho : C_n \longrightarrow \mathrm{GL}(V_n)$. Для этого надо проверить, что при этом гомоморфизме сохраняются соотношения группы C_n.

Рассмотрим соотношения $\alpha_i\sigma_j = \sigma_j\alpha_i$ при $|i-j| \geq 2$. Нам надо показать, что для любого базисного вектора $v_{k,l}$ справедливо равенство $v_{k,l}^{\alpha_i\sigma_j} = v_{k,l}^{\sigma_j\alpha_i}$. Зафиксируем индексы i и j. Не уменьшая общности, можно считать, что $1 \leq i < j-1 \leq n-1$. Если $v_{k,l} \notin \mathrm{supp}(\alpha_i) \bigcap \mathrm{supp}(\sigma_j)$, то, очевидно, требуемое равенство выполняется. Рассмотрим теперь базисные векторы из пересечения $\mathrm{supp}(\alpha_i) \bigcap \mathrm{supp}(\sigma_j) = \{v_{i,j}, v_{i,j+1}, v_{i+1,j}, v_{i+1,j+1}\}$. Действуя на них произведением $\alpha_i\sigma_j$, получим

$$v_{i,j}^{\alpha_i\sigma_j} = (1-q)v_{i+1,j} + qv_{i+1,j+1} + q(q-1)v_{j,j+1},$$

$$v_{i,j+1}^{\alpha_i\sigma_j} = v_{i+1,j},$$

$$v_{i+1,j}^{\alpha_i\sigma_j} = (1-q)v_{i,j} + qv_{i,j+1} + q(q-1)v_{j,j+1},$$

$$v_{i+1,j+1}^{\alpha_i\sigma_j} = v_{i,j}.$$

Подействуем теперь на эти векторы произведением $\sigma_j\alpha_i$. Имеем

$$v_{i,j}^{\sigma_j\alpha_i} = (1-q)v_{i+1,j} + qv_{i+1,j+1} + q(q-1)v_{j,j+1},$$

$$v_{i,j+1}^{\sigma_j\alpha_i} = v_{i+1,j},$$

$$v_{i+1,j}^{\sigma_j\alpha_i} = (1-q)v_{i,j} + qv_{i,j+1} + q(q-1)v_{j,j+1},$$

$$v_{i+1,j+1}^{\sigma_j\alpha_i} = v_{i,j}.$$

Сравнивая полученные равенства с предыдущими, видим, что соотношение $\alpha_i\sigma_j = \sigma_j\alpha_i$ при $|i-j| \geq 2$ действительно сохраняется.

Рассмотрим соотношение $\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i = \alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}$. Действуя его левой частью на базисных элементах, получим

$$v_{k,i}^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} = (1-q)v_{k,i+1} + qv_{k,i+2} + q(q-1)v_{i+1,i+2},$$

$$v_{k,i+1}^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} = v_{k,i+1} \quad \text{при} \quad k < i,$$

$$v_{i,i+1}^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} = tq^2 v_{i+1,i+2},$$

$$v_{i,l}^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} = tq(q-1)v_{i+1,i+2} + (1-q)v_{i+1,l} + qv_{i+2,l} \quad \text{при} \quad i+2 < l,$$

$$v_{i,i+2}^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} = tq(q-1)v_{i+1,i+2} + (1-q)v_{i,i+1} + qv_{i,i+2},$$

$$v_{i+1,l}^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} = v_{i+1,l} \quad \text{при} \quad l > i+2,$$

$$v_{i+1,i+2}^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} = v_{i,i+1},$$

$$v_{k,l}^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} = v_{k,l} \quad \text{при} \quad \{k,l\} \bigcap \{i, i+1, i+2\} = \emptyset,$$

$$v_{k,i+2}^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} = v_{k,i} \quad \text{при} \quad k < i,$$

$$v_{i+2,l}^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} = v_{i,l}.$$

Действуя правой частью, получим

$$v_{k,i}^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} = (1-q)v_{k,i+1} + qv_{k,i+2} + q(q-1)v_{i+1,i+2},$$

$$v_{k,i+1}^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} = v_{k,i+1} \quad \text{при} \quad k < i,$$

$$v_{i,i+1}^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} = tq^2 v_{i+1,i+2},$$

$$v_{i,l}^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} = tq(q-1)v_{i+1,i+2} + (1-q)v_{i+1,l} + qv_{i+2,l} \quad \text{при} \quad i+2 < l,$$

$$v_{i,i+2}^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} = (1-q)v_{i,i+1} + qv_{i,i+2} + q(q-1)v_{i+1,i+2},$$

$$v_{i+1,l}^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} = v_{i+1,l} \quad \text{при} \quad l > i+2,$$

$$v_{i+1,i+2}^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} = v_{i,i+1},$$

$$v_{k,l}^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} = v_{k,l} \quad \text{при} \quad \{k,l\} \bigcap \{i, i+1, i+2\} = \emptyset,$$

$$v_{k,i+2}^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} = v_{k,i} \quad \text{при} \quad k < i,$$

$$v_{i+2,l}^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} = v_{i,l}.$$

Сравнивая действие автоморфизмов $\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i$ и $\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}$ на элементе $v_{i,i+2}$ видим, что они совпадают тогда и только тогда, когда $t = 1$.

Аналогичным образом проверяется, что при гомоморфизме ρ сохраняются соотношения $\sigma_{i+1}\sigma_i\alpha_{i+1} = \alpha_i\sigma_{i+1}\sigma_i$ при любых значениях t и q. Следовательно, нами установлена

Предложение 2. *Определенное выше действием на порождающих отображение* $\rho : C_n \longrightarrow \mathrm{GL}(V_n)$ *является линейным представлением тогда и только тогда, когда* $t = 1$.

При $t = 1$ модуль V_n является симметрическим квадратом модуля W_n на котором определено представление Бурау. Следовательно, построенное нами представление $\rho : C_n \longrightarrow \mathrm{GL}(V_n)$ не является точным при $n \geq 5$. В случае $n = 3, 4$ вопрос о точности представления ρ остается открытым.

Как мы заметили выше, для построенного отображения ρ перестает выполняться образ соотношения $\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i = \alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}$ на элементе $v_{i,i+2}$. Можно попробовать определить действие элементов α_i на базисе модуля V_n по–другому, чтобы соотношение $\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i = \alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}$ сохранялось. Справедлива следующая, легко проверяемая

Лемма 3. *Для всякого элемента* $x \in \mathbb{R}$ *отображение* $\rho_1 : S_n \longrightarrow \mathrm{GL}(V_n)$, *заданное действием порождающих* α_i *на базисе модуля* V_n *равенствами*

$$\alpha_i(v_{k,i}) = xv_{k,i+1},$$

$$\alpha_i(v_{k,i+1}) = x^{-1}v_{k,i} \quad \textit{при} \quad k < i,$$

$$\alpha_i(v_{i,i+1}) = v_{i,i+1},$$

$$\alpha_i(v_{i,l}) = xv_{i+1,l} \quad \textit{при} \quad i+1 < l,$$

$$\alpha_i(v_{i+1,l}) = x^{-1}v_{i,l},$$

$$\alpha_i(v_{k,l}) = v_{k,l} \quad \textit{при} \quad \{k,l\}\bigcap\{i,i+1\} = \emptyset.$$

является точным.

Если продолжить отображение ρ_1 на всю группу C_n, полагая $\rho_1(\sigma_i) = \rho(\sigma_i)$, то получим отображение $\rho_1 : C_n \longrightarrow \mathrm{GL}(V_n)$. Проверяя соотношения группы C_n на образах порождающих, заметим, что если положить $x = t^{-1/3}$, то нетрудно проверить, что соотношения

$$\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i = \alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1},$$

$$\sigma_{i+1}\sigma_i\alpha_{i+1} = \alpha_i\sigma_{i+1}\sigma_i$$

будут сохраняться. Но, в этом случае, не сохраняется соотношение $\alpha_i\sigma_j = \sigma_j\alpha_i$. Действительно, так как

$$v_{i,j}^{\alpha_i\sigma_j} = x(1-q)v_{i+1,j} + xqv_{i+1,j+1} + xq(q-1)v_{j.j+1},$$
$$v_{i,j}^{\sigma_j\alpha_i} = x(1-q)v_{i+1,j} + xqv_{i+1,j+1} + q(q-1)v_{j.j+1},$$

то, чтобы выполнялось равенство $v_{i,j}^{\alpha_i\sigma_j} = v_{i,j}^{\sigma_j\alpha_i}$ мы должны положить $x = 1$. С другой стороны, группа C_3 не содержит соотношений вида $\alpha_i\sigma_j = \sigma_j\alpha_i$. Следовательно, справедливо

Предложение 3. *Линейное представление* $\rho_1 : C_3 \longrightarrow \mathrm{GL}(V_3)$ *является продолжением представления Лоуренс–Крамера на группу* C_3.

§ 2. Линейные представления групп кос некоторых многообразий

Напомним вначале определение группы кос многообразия (см. [1, п. 1.1]). Пусть M — связное многообразие размерности ≥ 2. *Конфигурационным пространством* $F_n(M)$, $n \in \mathbb{N}$, многообразия M называется множество

$$F_n(M) = \{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in M^n | z_i \neq z_j \ \text{ при } \ i \neq j\}$$

упорядоченных наборов n различных точек из M. Его фундаментальная группа $\pi_1(F_n(M))$ называется *n–нитиевой группой крашеных кос многообразия* M и обозначается $P_n(M)$. Симметрическая группа S_n действует на пространстве $F_n(M)$ перестановкой координат. Известно, что это действие свободно и индуцирует регулярное накрытие пространства орбит $F_n(M)/S_n$ пространством $F_n(M)$. Фундаментальная группа $B_n(M) = \pi_1(F_n(M)/S_n)$ называется *n–нитиевой группой кос многообразия* M. Накрывающее отображение $F_n(M) \longrightarrow F_n(M)/S_n$ индуцирует короткую точную последовательность

$$1 \longrightarrow P_n(M) \longrightarrow B_n(M) \longrightarrow S_n \longrightarrow 1.$$

Если M — замкнутое гладкое многообразие, то отображение $F_n(M) \longrightarrow M^n$ индуцирует эпиморфизм $P_n(M) \longrightarrow \pi_1(M) \times \ldots \times \pi_1(M)$ группы крашеных кос $P_n(M)$ на прямое произведение n экземпляров фундаментальной группы $\pi_1(M)$. Более того, если размерность многообразия M больше двух, то этот эпиморфизм является инъективным. Поэтому наибольший интерес представляют группы кос двумерных многообразий.

Среди замкнутых двумерных многообразий особую роль играют сфера S^2 и проективная плоскость P^2. Так как группы кос только этих поверхностей имеют кручение, а если M — замкнутая поверхность, отличная от S^2 и P^2, то в последовательности

$$1 \longrightarrow P_n(E^2) \longrightarrow P_n(M) \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \pi_1(M) \longrightarrow 1$$

ядро каждого гомоморфизма совпадает с нормальным замыканием образа предыдущего гомоморфизма. Здесь E^2 — евклидова плоскость, а $\prod_{i=1}^{n} \pi_1(M)$ — прямое произведение n экземпляров группы $\pi_1(M)$.

Классическая группа кос B_n, введенная Артином, является группой кос евклидовой плоскости, т. е. $B_n = B_n(E^2)$. В дальнейшем будем называть ее просто *группой кос.*

Как установили Фадель и Ван Бускирк (см. [1, теорема 1.11; 14]) группа кос $B_n(S^2)$ двумерной сферы S^2 порождается элементами $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}$ и определяется соотношениями

$$\delta_i \delta_{i+1} \delta_i = \delta_{i+1} \delta_i \delta_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, ..., n-2,$$

$$\delta_i \delta_j = \delta_j \delta_i \quad \text{при } |i-j| \geq 2,$$

$$\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_{n-2} \delta_{n-1}^2 \delta_{n-2} \ldots \delta_2 \delta_1 = 1.$$

Отсюда видно, что группа $B_n(S^2)$ является гомоморфным образом группы B_n. В частности, группа $B_2(S^2)$ — циклическая группа порядка два, а $B_3(S^2)$ — метациклическая группа порядка 12. Поэтому далее будем считать, что $n > 3$.

Строение группы $B_n(S^2)$ исследовалось в работе Жилета и Ван Бускирка [15]. Напомним полученные там результаты. Определим элементы

$$a_{i,i} = 1, \quad a_{i,j} = \delta_i^{-1}\delta_{i+1}^{-1}\ldots\delta_{j-2}^{-1}\delta_{j-1}^2\delta_{j-2}\ldots\delta_{i+1}\delta_i, \quad 1 \le i < j \le n. \tag{1}$$

Легко проверить, что они лежат в группе $P_n(S^2)$, которая является ядром гомоморфизма $\nu : B_n(S^2) \longrightarrow S_n$, переводящего порождающий δ_i в транспозицию $(i, i+1)$, $1 \le i \le n-1$. Более того, $P_n(S^2)$ порождается элементами (1). Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n-1$ определим подгруппу A_{n-i+1}, порожденную элементами $a_{i,i+1}, a_{i,i+2}, \ldots, a_{i,n}$. Группа A_n нормальна в $P_n(S^2)$ и мы можем рассмотреть короткую точную последовательность

$$1 \longrightarrow A_n \longrightarrow P_n(S^2) \longrightarrow P_{n-1}(S^2) \longrightarrow 1.$$

При этом $P_n(S^2)$ является полупрямым произведением: $P_n(S^2) = A_n \leftthreetimes P_{n-1}(S^2)$, а в группе A_n порождающие связаны соотношением

$$a_{1,2}a_{1,3}\ldots a_{1,n} = 1.$$

Кроме того, в группе $P_n(S^2)$ выполнены соотношения

$$a_{i,i+1}a_{i,i+2}\ldots a_{i,i+n-1} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

где мы полагаем $a_{j,i} = a_{i,j}$ при $j > i$ и все индексы берутся по модулю n. Из этих соотношений получаются следующие равенства:

$$a_{i,n} = a_{i,n-1}^{-1}\ldots a_{i,i+1}^{-1}a_{i-1,i}^{-1}\ldots a_{1,i}^{-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Используя эти равенства, мы можем исключить $a_{1,n}, a_{2,n}, \ldots, a_{n-1,n}$ из системы порождающих группы $P_n(S^2)$. Подгруппа A_{n-i+1} свободно порождается элементами $a_{i,i+1}, a_{i,i+2}, \ldots, a_{i,n-1}$.

Центр группы $B_n(S^2)$ порождается элементом

$$\Delta_n = (\delta_1\delta_2\ldots\delta_{n-2})^{n-1} = (a_{1,2}a_{1,3}\ldots a_{1,n-1})(a_{2,3}a_{2,4}\ldots a_{2,n-1})\ldots(a_{n-2,n-1})$$

и имеет порядок 2.

Группа $P_n(S^2)$ распадается в полупрямое произведение

$$P_n(S^2) = A_n \leftthreetimes (A_{n-1} \leftthreetimes (\ldots \leftthreetimes A_3)\ldots).$$

Обозначим $L_n = A_n \leftthreetimes (A_{n-1} \leftthreetimes (\ldots \leftthreetimes A_4)\ldots)$. Так как A_3 — циклическая подгруппа с порождающим $a_{n-2,n-1}$, то можно заметить, что $P_n(S^2) = L_n \times < \Delta_n > \simeq L_n \times \mathbb{Z}_2$. Далее, группа L_n изоморфна группе $U_n \leftthreetimes (U_{n-1} \leftthreetimes (\ldots \leftthreetimes U_4)\ldots) \le P_n$.

С группой кос сферы тесно связана группа классов отображений сферы с n выколотыми точками, которую мы обозначим $M(0, n)$. Группа $M(0, n)$ является фактор–группой группы $B_n(S^2)$ по центру [1, теорема 4.5], т. е. генетический код группы $M(0, n)$ получается из генетического кода группы $B_n(S^2)$ введением дополнительного соотношения: $\Delta_n = (\delta_1\delta_2\ldots\delta_{n-2})^{n-1} = 1$. Поэтому существует эпиморфизм из $B_n(S^2)$ на $M(0, n)$ ядро которого совпадает с центром группы $B_n(S^2)$. Можно сказать, что $M(0, n)$ это фактор–группа группы сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов сферы S^2 с n выколотыми точками по нормальной подгруппе, состоящей из гомеоморфизмов, изотопных тождественному.

Для группы $M(0,n)$ существует короткая точная последовательность

$$1 \longrightarrow L_n \longrightarrow M(0,n) \longrightarrow S_n \longrightarrow 1,$$

где подгруппа L_n является ядром эпиморфизма $\nu : M(0,n) \longrightarrow S_n$, посылающего порождающий δ_i в транспозицию $(i, i+1)$, $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

В работе А. И. Мальцева [16, лемма 1; 18, § 12] установлено, что если подгруппа H конечного индекса группы G является линейной, то и сама группа G является линейной. Пусть $|G : H| = m$ и $\psi : H \longrightarrow \mathrm{GL}_l(F)$ — точное представление группы H матрицами порядка l над полем F. Группа G является объединением правых смежных классов

$$G = He \bigcup Hg_2 \bigcup \ldots \bigcup Hg_m.$$

Произведение $g_i g$, где g — произвольный элемент из G, можно единственным образом записать в виде $h_i g_{n_i}$, $h_i \in H$. Таким образом, каждому элементу g соответствует последовательность элементов $h_1, h_2, \ldots, h_m$ из H и последовательность чисел $n_1, n_2, \ldots, n_m$. Последовательности $\{n_i\}$ поставим в соответствие матрицу $D(n_i)$, определенную следующим образом:

$$D(n_i) = \| \, d_{j,k} \, \| \in M_{lm}(\mathbb{Z}), \quad d_{j,n_j} = E_l, \quad d_{j,k} = 0 \quad \text{если} \quad k \neq n_j,$$

E_l — единичная матрица порядка l. Тогда элементу $g \in G$ поставим в соответствие матрицу

$$\mathrm{diag}(\psi(h_1), \psi(h_2), \ldots, \psi(h_m)) D(n_i).$$

Тем самым определено линейное представление группы G в группу $\mathrm{GL}_{lm}(F)$. Это представление является точным.

Справедлива

Теорема 1. *Пусть $R = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, q^{\pm 1}]$ — кольцо лорановских многочленов. Группы $M(0,n)$ и $B_n(S^2)$ являются линейными для любого $n \geq 2$. Для всякого $n \geq 4$ существуют вложения* $\varphi : M(0,n) \longrightarrow \mathrm{GL}_m(R)$ и $\varphi_1 : B_n(S^2) \longrightarrow \mathrm{GL}_{2m}(R)$, где $m = (n-1)(n-2)n!/2$.

Доказательство. Как было отмечено выше, при $n = 2, 3$ группы $M(0,n)$ и $B_n(S^2)$ конечны, а потому являются линейными. Так как группа L_n изоморфно вкладывается в группу кос B_n, то существует точное линейное представление $\rho : L_n \longrightarrow \mathrm{GL}_l(R)$, где $l = (n-1)(n-2)/2$ индуцированное представлением Лоуренс–Крамера.

Чтобы построить представление группы M_n воспользуемся описанной выше конструкцией.

Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_{n!}$ — представители правых смежных классов группы $M(0,n)$ по подгруппе L_n. Так как группа $M(0,n)$ порождается элементами $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}$, то нам достаточно сопоставить матрицы этим порождающим. Каждый порождающий δ_k действует на множестве правых смежных классов перестановками. Найдем

$$m_i \delta_k = h_i^k m_{\pi_k(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n!, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

где символ k, стоящий вверху, означает индекс, а не показатель степени. Это соглашение будет действовать до конца доказательства теоремы. Сопоставим порождающему δ_k матрицу

$$\varphi(\delta_k) = \mathrm{diag}(\rho(h_1^k), \rho(h_2^k), \ldots, \rho(h_{n!}^k)) \pi(\delta_k) \in \mathrm{GL}_m(R),$$

где $\mathrm{diag}(\rho(h_1^k), \rho(h_2^k), \ldots, \rho(h_{n!}^k))$ — блочно диагональная матрица, а $\pi(\delta_k)$ — блочно мономиальная матрица у которой блок, стоящий на месте $(j, \pi(j))$ является единичной матрицей порядка l, а блок, стоящий на месте (j,s) при $s\neq\pi(j)$ является нулевой матрицей порядка l. Определенное таким образом представление φ является точным линейным представлением группы $M(0,n)$.

Рассмотрим теперь группу $B_n(S^2)$. Она содержит линейную подгруппу L_n индекса $2n!$. В качестве представителей правых смежных классов группы $B_n(S^2)$ по подгруппе L_n можно выбрать элементы $m_i\Delta_n^\epsilon$, $i=1,2,\ldots,n!$, $\epsilon=0,1$, где Δ_n — порождающий центра группы $B_n(S^2)$. Так как группа $B_n(S^2)$ порождается элементами $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_{n-1}$, то нам достаточно определить представление φ_1 на этих элементах. Упорядочим представители смежных классов $m_i\Delta_n^\epsilon$ и обозначим их символами $n_1,n_2,\ldots,n_{2n!}$. Каждый порождающий δ_k группы $B_n(S^2)$ действует на этих представителях по формуле

$$n_j\delta_k=g_j^k n_{\pi_k(j)},\quad j=1,2,\ldots,2n!,\quad k=1,2,\ldots,n-1.$$

Сопоставим порождающему δ_k матрицу

$$\varphi_1(\delta_k)=\mathrm{diag}(\rho(g_1^k),\rho(g_2^k),\ldots,\rho(g_{2n!}^k))\pi(\delta_k)\in\mathrm{GL}_{2m}(R),$$

где $\mathrm{diag}(\rho(g_1^k),\rho(g_2^k),\ldots,\rho(g_{2n!}^k))$ — блочно диагональная матрица, а $\pi(\delta_k)$ — блочно мономиальная матрица у которой блок, стоящий на месте $(j,\pi(j))$ является единичной матрицей порядка l, а блок, стоящий на месте (j,s) при $s\neq\pi(j)$ является нулевой матрицей порядка l. Построенное представление φ_1 является точным линейным представлением группы $B_n(S^2)$ над кольцом R. Так как кольцо R вложимо в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ (достаточно в качестве t и q взять обратимые, трансцендентные над $\mathbb{Q}$ комплексные числа), то мы получаем требуемое утверждение.

Пусть P^2 — проективная плоскость. Ее группа кос $B_n(P^2)$, $n\geq 1$, порождается элементами $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_{n-1}$, $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n$ и определяется соотношениями (см. [17]):

$$\delta_i\delta_{i+1}\delta_i=\delta_{i+1}\delta_i\delta_{i+1}\quad \text{при } i=1,2,...,n-2,$$

$$\delta_i\delta_j=\delta_j\delta_i\quad \text{при } |i-j|\geq 2,$$

$$\delta_i\rho_j=\rho_j\delta_i,\quad j\neq i,i+1,$$

$$\rho_i=\delta_i\rho_{i+1}\delta_i\quad \text{при } i=1,2,...,n-1,$$

$$\rho_{i+1}^{-1}\rho_i^{-1}\rho_{i+1}\rho_i=\delta_i^2\quad \text{при } i=1,2,...,n-1,$$

$$\delta_1\delta_2\ldots\delta_{n-2}\delta_{n-1}^2\delta_{n-2}\ldots\delta_2\delta_1=\rho_1^2.$$

Существует гомоморфизм $B_n(P^2)\longrightarrow S_n$, посылающий порождающий δ_i в транспозицию $(i,i+1)$, $i=1,2,\ldots,n-1$, и все порождающие ρ_j — в тождественную подстановку. Ядром этого гомоморфизма является группа крашеных кос $P_n(P^2)$ проективной плоскости P^2.

Группа $B_1(P^2)$ — циклическая порядка 2, группа $B_2(P^2)$ — конечна порядка 16, а при $n\geq 3$ группа $B_n(P^2)$ бесконечна. Рассмотрим случай $n=3$. Группа $P_3(P^2)$ содержит свободную подгруппу $A_3(P^2)=\text{гр}(\rho_1,a_2,a_3\parallel a_2a_3=\rho_1^2)$, где $a_2=\delta_1^2$, $a_3=\delta_1^{-1}\delta_2^2\delta_1$. При этом фактор–группа $P_3(P^2)/A_3(P^2)\simeq P_2(P^2)$ — группа кватернионов порядка 8. Множество

$$\{1,\delta_1,\delta_2,\delta_2\delta_1,\delta_1\delta_2,\delta_1\delta_2\delta_1\}$$

образует множество представителей правых смежных классов $B_3(P^2)$ по подгруппе $P_3(P^2)$. Заметим, что группа $P_2(P^2)$ имеет генетический код

$$P_2(P^2) = \text{гр}(\rho_2, \rho_3 \parallel \rho_2^2 = \rho_3^2 = (\rho_3\rho_2)^2).$$

В группе $P_3(P^2)$ справедливы следующие равенства

$$\rho_3^{-\epsilon} a_2 \rho_3^{\epsilon} = a_2, \quad \epsilon = \pm 1, \quad \rho_j^{-1}\rho_1\rho_j = \rho_1 a_j^{-1}, \quad j = 2, 3,$$

$$\rho_2^{-1} a_3 \rho_2 = a_2 a_3 a_2^{-1}, \quad \rho_2^{-1} a_2 \rho_2 = \rho_1 a_2^{-1} \rho_1^{-1}.$$

Из определяющих соотношений группы $B_3(P^2)$ легко выводятся следующие формулы сопряжения порождающими δ_1, δ_2.

Лемма 4. *В группе $B_3(P^2)$ справедливы равенства*

$$a_2^{\delta_1} = a_2, \ \ \rho_1^{\delta_1} = \rho_2 a_2, \ \ \rho_2^{\delta_1} = a_2^{-1}\rho_1, \ \ \rho_3^{\delta_1} = \rho_3, \ \ a_2^{\delta_2} = \rho_1^2 a_2^{-1}, \ \ \rho_1^{\delta_2} = \rho_1, \ \ \rho_2^{\delta_2} = \rho_3\delta_2^2, \ \ \rho_3^{\delta_2} = \delta_2^{-2}\rho_2.$$

Так как группа $A_3(P^2)$ является свободной группой со свободными порождающими ρ_1, a_2, то воспользовавшись представлением Санова [18, § 14], мы можем вложить $A_3(P^2)$ в группу $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, полагая

$$\overline{\rho}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

— образы элементов ρ_1 и a_2 соответственно.

Группа $P_3(P^2)$ получается из $A_3(P^2)$ расширением при помощи группы кватернионов порядка 8. В качестве множества представителей правых смежных классов группы $P_3(P^2)$ по подгруппе $A_3(P^2)$ можно выбрать множество

$$\{e, \rho_2, \rho_2^2, \rho_2^3, \rho_3, \rho_3\rho_2, \rho_3\rho_2^2, \rho_3\rho_2^3\}.$$

Таким образом, свободная группа $A_3(P^2)$ имеет индекс 48 в группе кос $B_3(P^2)$. Следовательно, справедлива

Теорема 2. *Группа кос $B_3(P^2)$ проективной плоскости P^2 на трех нитях вкладывается в группу $\mathrm{SL}_{96}(\mathbb{Z})$.*

§ 3. Точное линейное представления группы $\mathrm{Aut}(F_2)$

Известно [9], что группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_n)$ свободной группы F_n не является линейной при $n \geq 3$. С другой стороны, как установлено в работе [12], группа $\mathrm{Aut}(F_2)$ линейна тогда и только тогда, когда линейна группа кос на четырех нитях B_4. Так как последняя является линейной, то можно построить в явном виде точное линейное представление группы $\mathrm{Aut}(F_2)$. Для этого нам потребуются некоторые результаты из работы [12]. Напомним их.

Обозначим $B_4^* = B_4/Z(B_4)$, где $Z(B_4)$ — центр группы B_4. Как было отмечено выше, $Z(B_4)$ — бесконечная циклическая группа, порожденная элементом $\Delta_4 = (\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^4$. Группа B_4^* изоморфна группе $\mathrm{Aut}^+(F_2)$, которая является прообразом подгруппы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ при гомоморфизме $\xi : \mathrm{Aut}(F_2) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, переводящем автоморфизм группы F_2 в автоморфизм свободной абелевой группы ранга 2. При этом $\mathrm{Aut}^+(F_2)$ является подгруппой индекса 2 группы $\mathrm{Aut}(F_2)$.

Пусть $\rho : B_4 \longrightarrow \mathrm{GL}_6(\mathbb{C})$ — точное представление Лоуренс–Крамера, которое, как заметил М. Зино [19], является неприводимым.

Символом F обозначим подгруппу группы B_4, порожденную элементами $x = \sigma_1\sigma_3^{-1}$, $y = \sigma_2\sigma_1\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}$. Эта группа является свободной группой со свободными порождающими x и y и, кроме того, F нормальна в B_4. Внутренние автоморфизмы группы B_4 индуцируют автоморфизмы группы F, т. е. существует эпиморфизм $h : B_4 \longrightarrow \mathrm{Aut}^+(F_2)$. Ядро этого эпиморфизма совпадает с центром группы B_4, а образы порождающих σ_1, σ_2, σ_3 определяют автоморфизмы

$$h(\sigma_1) = \alpha_1 : \begin{cases} x \longmapsto x, \\ y \longmapsto yx^{-1}, \end{cases} \qquad h(\sigma_2) = \alpha_2 : \begin{cases} x \longmapsto y, \\ y \longmapsto yx^{-1}y, \end{cases} \qquad h(\sigma_3) = \alpha_3 : \begin{cases} x \longmapsto x, \\ y \longmapsto x^{-1}y. \end{cases}$$

Вся группа $\mathrm{Aut}(F_2)$ порождается автоморфизмами

$$P : \begin{cases} x \longmapsto y, \\ y \longmapsto x, \end{cases} \qquad \omega : \begin{cases} x \longmapsto x^{-1}, \\ y \longmapsto y, \end{cases} \qquad U : \begin{cases} x \longmapsto xy, \\ y \longmapsto y, \end{cases}$$

и определяется соотношениями

$$P^2 = \omega^2 = (\omega P)^4 = (P\omega PU)^2 = (UP\omega)^3 = [\omega, \omega U\omega] = 1.$$

При этом справедливы равенства

$$\alpha_1 = PU^{-1}P, \quad \alpha_2 = PU\omega U^{-1}, \quad \alpha_3 = P\omega U\omega P.$$

Воспользуемся представлением Лоуренс–Крамера $\rho : B_4 \longrightarrow \mathrm{GL}_6(\mathbb{C})$ и найдем образы порождающих группы B_4:

$$\rho_1 = \rho(\sigma_1) = \begin{pmatrix} tq^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ tq(q-1) & 1-q & 0 & q & 0 & 0 \\ tq(q-1) & 0 & 1-q & 0 & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\rho_2 = \rho(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1-q & q & 0 & q(q-1) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & tq^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & tq(q-1) & 1-q & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho_3 = \rho(\sigma_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-q & q & 0 & 0 & q(q-1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-q & q & q(q-1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & tq^2 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что $(\rho_1\rho_2\rho_3)^4 = t^2q^8E_6$ — образ центра группы B_4. Положим $\mu = 1/\sqrt[12]{t^2q^8}$ и $\overline{\rho}(\sigma_i) = \mu\rho(\sigma_i) = \mu\rho_i$. Тогда $\overline{\rho}$ индуцирует точное представление группы $B_4^* \simeq \mathrm{Aut}^+F_2$. Построим теперь точное линейное представление группы $\mathrm{Aut}F_2$.

Подгруппа Aut^+F_2 имеет индекс 2 в группе $\mathrm{Aut}F_2$ и в качестве представителей правых смежных классов можно взять элементы e и ω. Справедлива следующая, легко проверяемая

Лемма 5. *В группе* $\mathrm{Aut}F_2$ *справедливы равенства*

$$\begin{array}{ll} 1) & \omega\alpha_1 = \alpha_1^{-1}\omega, \\ 2) & \omega\alpha_2 = \alpha_3\alpha_1\alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}\alpha_3^{-1}\omega, \\ 3) & \omega\alpha_3 = \alpha_3^{-1}\omega. \end{array}$$

Так как группа $\mathrm{Aut}F_2$ порождается автоморфизмами α_1, α_2, α_3, ω, то действуя на смежные классы группы $\mathrm{Aut}F_2$ по подгруппе Aut^+F_2 находим соответствующие диагональные и мономиальные матрицы. Положим

$$\psi(\alpha_1) = \mathrm{diag}(\overline{\rho}_1, (\overline{\rho}_1)^{-1}), \quad \psi(\alpha_2) = \mathrm{diag}(\overline{\rho}_2, \overline{\rho}_3\overline{\rho}_1(\overline{\rho}_2)^{-1}(\overline{\rho}_1)^{-1}(\overline{\rho}_3)^{-1}),$$

$$\psi(\alpha_3) = \mathrm{diag}(\overline{\rho}_3, (\overline{\rho}_3)^{-1}), \quad \psi(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & E_6 \\ E_6 & 0 \end{pmatrix},$$

где E_6 — единичная матрица порядка 6, а матрицы $\overline{\rho}_i$ определены выше. Сопрягая это представление матрицей $c = \mathrm{diag}(E_6, \overline{\rho}_3\overline{\rho}_1)$, получим новое представление:

$$\overline{\psi}(\alpha_i) = c^{-1}\psi(\alpha_i)c = \begin{pmatrix} \overline{\rho}_i & 0 \\ 0 & \overline{\rho}_i^{-1} \end{pmatrix}, \quad i = 1,2,3; \quad \overline{\psi}(\omega) = c^{-1}\psi(\omega)c = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\rho}_3\overline{\rho}_1 \\ (\overline{\rho}_3\overline{\rho}_1)^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Тогда справедлива

Теорема 3. *Отображение* $\overline{\psi} : \mathrm{Aut}F_2 \longrightarrow \mathrm{GL}_{12}(\mathbb{Z}[t^{\pm1}, q^{\pm1}])$, *заданное на порождающих равенствами (1) определяет точное линейное представление группы* $\mathrm{Aut}F_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Birman J. S. Braids, links and mapping class group, Princeton–Tokyo: Univ. press, 1974.

2. Burau W. Uber Zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte Verkettungen // Abh. Math. Semin. Hamburg Univ, 1936. V. 11, P. 179–186.

3. Moody J. A. The Burau representation of the braid group B_n is unfaithful for large n // Bull. Amer. Math. Soc. 1991. V. 25, N 2. P. 379-384.

4. Long D. D. and Paton M. The Burau representation is not faithful for $n \geq 5$ // Topology 1993. V. 32, N 2. P. 439-447.

5. Bigelow S. The Burau representation is not faithful for $n \geq 6$ // Geom. Topology 1999. V. 3, P. 397-404.

6. Lawrence R. J. Homological representation of the Hecke Algebra // Commun. Math. Phys. 1990. V. 135, N 1. P. 141-191.

7. Krammer D. Braid groups are linear // Annals of. Math. 2002. V. 155, N 1. P. 131-156.

8. Turaev V. Faithful linear representation of the braid group, In "Seminaire Bourbaki", Volume 1999/2000, exposes 865-879, Societe Mathematique de France 2002, P. 389-409.

9. Formanek E. and Procesi C. The automorphism groups of a free group is not linear // J. Algebra 1992. V. 149, N 2. P. 494-499.

10. Бардаков В. Г. Строение группы сопрягающих автоморфизмов // Алгебра и логика 2003. V. 42, N 5. P. 515-541.

11. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп, 15-е изд., Новосибирск, Ин–т матем. СО РАН, 2002.

12. Dyer J. L., Formanek E. and Grossman E. K. On the linearity of automorphism groups of free groups // Arch. Math. 1982. V. 38, N 5. P. 404-409.

13. Савушкина А. Г. О группе сопрягающих автоморфизмов свободной группы // Матем. заметки 1996. Т. 60, N 1. 92-108.

14. Fadell E. and Van Buskirk J. The braid groups of E^2 and S^2 // Duke. Math. J. 1962. V. 29, N 2. 243-258.

15. Gillette R. and Van Buskirk J. The word problem and consequences for the braid groups and mapping class groups of the 2–sphere // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 131, N 2. 277-296.

16. Мальцев А. И. Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Матем. сб. 1940. Т. 8, N 3. 405-422.

17. Van Buskirk J. Braid groups of compact 2–manifolds with elements of finite order // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 122, N 1. P. 81-97.

18. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп, 4–е изд., М.: Наука, 1996.

19. Zinno M. G. On Krammer's representation of the braid group // Math. Ann. 2000. V. 321, N 1. P. 197-211.

20. Бардаков В. Г., Нещадим М. В. Некоторые свойства групп кос компактных ориентируемых 2–многообразий // IV Междун. алгебр. конф., посвященная 60–летию профессора Ю. И. Мерзлякова, Новосибирск, 2000, С. 9-13.

21. Bigelow S. J. and Budney R. D. The mapping class group of a genus two surface is linear // Algebr. Geom. Topol. 2001. V. 1. P. 699-708.