УДК 512.54

К ВОПРОСУ Д. И. МОЛДАВАНСКОГО О p–ОТДЕЛИМОСТИ ПОДГРУПП СВОБОДНОЙ ГРУППЫ [1]

В. Г. Бардаков

Следуя А. И. Мальцеву [1], будем говорить, что подгруппа H группы G *финитно отделима от элемента* $g \in G \setminus H$, если существует гомоморфизм φ группы G в некоторую конечную группу, при котором $\varphi(g) \notin \varphi(H)$. Подгруппу, которая отделима от всех не входящих в нее элементов, называют *финитно отделимой.* Рассматривая вместо гомоморфных отображений на конечные группы гомоморфизмы в группы какого-либо другого класса $\mathcal{K}$, придем к определению *отделимости в классе* $\mathcal{K}$. В частности, если $\mathcal{K}$ — класс конечных p–групп, то отделимость в этом классе будем называть p–отделимостью Проблема финитной отделимости подгрупп тесно связана с проблемой вхождения элементов в подгруппу [1].

Из результата М. Холла [2] следует, что любая конечно порожденная подгруппа свободной группы является финитно отделимой.

Теорема Холла перестает быть справедливой, если класс конечных групп заменить классом конечных p–групп. Действительно, рассмотрим в бесконечной циклической группе $G = < a >$ подгруппу $H =< a^q >$, где q — простое число, отличное от p. Очевидно, $a \notin H$, но при любом гомоморфизме группы G на p–группу образ элемента a попадает в образ подгруппы H, т. е. подгруппа H не является p–отделимой.

В приведенном примере H не являлась p'–изолированной в G. Напомним, что подгруппа H группы G называется *p'–изолированной* (где p — простое число), если для любого простого числа q, отличного от p, и для произвольного элемента $g \in G$ из включения $g^q \in H$ следует, что и $g \in H$. Если же в в разобранном выше примере рассматривать только p'–изолированные подгруппы, то каждая из них является p–отделимой.

Д. И. Молдаванский высказал гипотезу о том, что последнее утверждение справедливо для любой свободной группы:

Вопрос ([3, вопрос 15.60]). *Верно ли, что любая конечно порожденная p'–изолированная подгруппа свободной группы отделима в классе конечных p–групп? Легко видеть, что это верно для циклических подгрупп.*

В пользу этой гипотезы говорит и результат Е. Д. Логиновой [4, § 3] о том, что во всякой конечно порожденной нильпотентной группе любая p'–изолированная подгруппа отделима в классе конечных p–групп.

Основным результатом настоящей заметки является

Теорема. *Во всякой свободной неабелевой группе существует конечно порожденная изолированная подгруппа, которая не отделима в классе нильпотентных групп.*

Так как всякая конечная p–группа является нильпотентной [5, с. 162], а всякая изолированная подгруппа является и p'–изолированной для любого простого p, то непосредственно из этой теоремы получается отрицательный ответ на вопрос Д. И. Молдаванского.

Следствие. *Во всякой свободной неабелевой группе для любого простого числа p существует конечно порожденная p'–изолированная подгруппа, которая не отделима в классе конечных p–групп.*

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №02–01–01118)

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Рассмотрим свободную неабелеву группу
$$F =< x, y, z_i (i \in I) >,$$
где I — некоторое, возможно, пустое множество индексов. Выберем в ней подгруппу
$$H =< x[y, x], y, z_j (j \in J) >,$$
где $[y, x] = y^{-1}x^{-1}yx$, а J — некоторое подмножество множества I. Заметим, что H является собственной подгруппой группы F и, в частности, не содержит элемента x. Действительно, если обозначить $a = x[y, x]$, $b = y$, то всякое слово, приведенное в алфавите $A = \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}, z_j^{\pm 1} (j \in J)\}$, содержащее хотя бы один из символов $a^{\pm 1}$ или $b^{\pm 1}$, является приведенным и как слово в алфавите $X = \{x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z_i^{\pm 1} (i \in I)\}$, а потому содержит либо символ y, либо y^{-1}, и, следовательно, не может быть равно x.

Покажем, что подгруппа H не отделима в классе нильпотентных групп. Для этого рассмотрим фактор–группы группы F по членам нижнего центрального ряда $\gamma_n F$, $n \in \mathbb{N}$, где
$$\gamma_1 F = F, \quad \gamma_{i+1} F = [\gamma_i F, F], \quad i = 1, 2, \ldots,$$
и соответствующие гомоморфизмы
$$\varphi_n : F \longrightarrow F/\gamma_n F, \quad n = 1, 2, \ldots$$
Заметим, что при любом из этих гомоморфизмов образ подгруппы H совпадает с образом подгруппы $< x, y, z_j (j \in J) >$. Действительно, это очевидно при $n = 1, 2$, а при $n > 2$ следует из хорошо известного факта [6, теорема 31.2.5] о том, что если нильпотентная группа G по модулю коммутанта $G' = \gamma_2 G$ порождается элементами $a_1, a_2, \ldots, a_r$, то и сама G порождается элементами $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Так как группы $F/\gamma_n F$ являются свободными нильпотентными, то подгруппа H не является отделимой в классе свободных нильпотентных групп, а потому и в классе всех нильпотентных групп.

Для завершения доказательства теоремы нам осталось доказать, что подгруппа H изолирована в F. Для простоты доказательства ограничимся случаем, когда порождающие z_i отсутствуют. Общий случай разбирается аналогично. Справедлива

Лемма. *Подгруппа $H =< x[y, x], y >$ изолирована в свободной группе $F =< x, y >$.*

Доказательство. Обозначим $a = x[y, x]$, $b = y$. Будем рассматривать элементы группы F, как слова в алфавите $X = \{x^{\pm 1}, y^{\pm 1}\}$, а элементы подгруппы H либо, как слова в алфавите $A = \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$, либо, как слова в алфавите X, подставляя вместо a и b их выражения в алфавите X. Символом “ $\equiv$ ” будем обозначать графическое равенство слов а алфавите X, а символом “ $=$ ” — равенство элементов в группе F.

Предположим, что для некоторого приведенного слова f из F и некоторого ненулевого целого m элемент f^m лежит в H. Не уменьшая общности, будем считать, что $m > 0$. Тогда для некоторых целых чисел $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_k, \beta_k$, отличных от нуля за исключением возможно α_1 и β_k справедливо равенство
$$f^m = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \ldots a^{\alpha_k} b^{\beta_k}. \tag{1}$$
Заметим, что если правая часть этого равенства приведена в алфавите A, то она приведена и в алфавите X. Покажем, что мы можем считать приведенное слово f^m циклически приведенным. Действительно, рассмотрим последнюю букву приведенного слова f^m. Если этой

буквой является y, то $\beta_k > 0$. Если, далее, первая буква слова f^m отлична от y^{-1}, то это слово циклически приведено. Если же f^m начинается с y^{-1}, то $\alpha_1 = 0$, а $\beta_1 < 0$, т. е. слово, стоящее в правой части равенства (1) также не является циклически приведенным и в алфавите A. Сопряжем обе части равенства (1) элементом $y^{-1} = b^{-1}$. Получим элемент, являющийся m–й степенью элемента из F и лежащий в H. Аналогичным образом разбирается случай, когда f^m оканчивается буквой y^{-1}. Предположим теперь, что f^m оканчивается буквой x. Тогда $\beta_k = 0$, $\alpha_k > 0$. Если f^m начинается с буквы отличной от x^{-1}, то f^m циклически приведено. Если же f^m начинается с буквы x^{-1}, то $\alpha_1 < 0$. Сопряжем обе части равенства (1) элементом a^{-1}, получим элемент, являющийся m–й степенью элемента группы F и лежащий в H. Если же f^m оканчивается буквой x^{-1}, то рассуждаем аналогично. Повторяем описанную процедуру до тех пор, пока не придем к равенству типа (1) в котором слово f^m уже циклически приведено.

Далее рассматриваем равенство (1) считая слово f^m циклически приведенным. Это означает, что $f^m \equiv f_1 f_2 \dots f_m$, где $f_i \equiv f$, т. е. в произведении $f_i f_{i+1}$ уже нет сокращений, $i = 1, 2, \dots, m-1$. Рассматриваем равенство

$$f_1 f_2 \dots f_m = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \dots a^{\alpha_k} b^{\beta_k}. \tag{2}$$

Если окажется, что f_1 равно начальному подслову слова, стоящего в правой части равенства (2), то это будет означать, что f_1 равно слову в алфавите A, т. е. $f = f_1 \in H$ и требуемое утверждение справедливо.

Покажем, что другие случаи невозможны.

Предположим, что f_1 равно произведению начального подслова, стоящего в правой части равенства (2) и подслова слова a или a^{-1}, т. е. для некоторого показателя α_l, $1 \le l \le k$, имеем $a^{\alpha_l} \equiv a^{\gamma} a_0 a_1 a^{\delta}$, $|\alpha_l| = |\gamma| + |\delta| + 1$, и

$$f_1 \equiv a^{\alpha_1} b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \dots b^{\beta_{l-1}} a^{\gamma} a_0,$$

где $a \equiv a_0 a_1$ при $\alpha_l > 0$ и $a^{-1} \equiv a_0 a_1$ при $\alpha_l < 0$. В зависимости от начальной буквы слова f_1 рассмотрим несколько случаев.

Пусть слово f_1 начинается с буквы x. Так как $f_1 \equiv f_2$, то f_2 также должно начинаться с буквы x, а это возможно в следующих двух случаях:

$$f_1 \equiv a^{\alpha_1} b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \dots b^{\beta_{l-1}} a^{\gamma} x y^{-1} x^{-1} y, \quad \gamma \ge 0, \quad a_0 \equiv x y^{-1} x^{-1} y,$$

или

$$f_1 \equiv a^{\alpha_1} b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \dots b^{\beta_{l-1}} a^{\gamma} x^{-1} y^{-1}, \quad \gamma \le 0, \quad a_0 \equiv x^{-1} y^{-1}.$$

В первом случае

$$f_2 \equiv x a^{\delta} b^{\beta_l} a^{\alpha_{l+1}} w,$$

где w — некоторое приведенное слово. Так как f_1 начинается с буквы x, то $\alpha_1 > 0$ и

$$f_1 \equiv x y^{-1} x^{-1} y x a^{\alpha_1 - 1} b^{\beta_1} \dots a^{\gamma} x y^{-1} x^{-1} y.$$

Для того, чтобы первые три буквы слова f_2 совпадали с первыми тремя буквами слова f_1 необходимо, чтобы $\delta = 0$, $\beta_l = -1$, $\alpha_{l+1} < 0$, но тогда

$$f_2 \equiv x y^{-1} x^{-1} y^{-1} x y x^{-1} a^{\alpha_{l+1}+1} w$$

и, сравнивая четвертые буквы у f_1 и f_2, видим, что $f_1 \not\equiv f_2$, т. е. этот случай невозможен.

Аналогичным образом доказывается, что f_1 не может начинаться и с буквы x^{-1}.

Разберем случай, когда f_1 начинается с буквы y. В этом случае $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 > 0$. Чтобы f_2 также начиналось с y, необходимо, чтобы

$$f_1 \equiv b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \dots a^{\gamma} x y^{-1} x^{-1}, \quad \gamma \geq 0,$$

или

$$f_1 \equiv b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \dots a^{\gamma} x^{-1} y^{-1} x, \quad \gamma \leq 0,$$

и легко заметить, что в обоих случаях $\beta_1 = 1$. Тогда, в первом случае

$$f_2 \equiv y x a^{\delta} b^{\beta_l} a^{\alpha_{l+1}} w, \quad \delta \geq 0,$$

где w — некоторое приведенное слово. Чтобы при этом вторая буква у f_1 была той же, что и у f_2 необходимо, чтобы $\alpha_2 > 0$, т. е.

$$f_1 \equiv y x y^{-1} x^{-1} y x a^{\alpha_2 - 1} b^{\beta_2} \dots a^{\gamma} x y^{-1} x^{-1},$$

а чтобы третья и четвертая буквы у f_2 совпадали соответственно с третьей и четвертой буквами у f_1 необходимо, чтобы $\delta = 0$, $\beta_l = -1$, $\alpha_{l+1} < 0$, т. е.

$$f_2 \equiv y x y^{-1} x^{-1} y^{-1} x y x a^{\alpha_{l+1} - 1} w,$$

но, сравнивая пятые буквы у f_1 и f_2, видим, что $f_1 \not\equiv f_2$. Во втором случае

$$f_2 \equiv y x^{-1} a^{\delta} b^{\beta_l} a^{\alpha_{l+1}} w, \quad \delta \leq 0.$$

Чтобы вторая буква у f_1 была той же, что и у f_2 необходимо, чтобы $\alpha_2 < 0$, т. е

$$f_1 \equiv y x^{-1} y^{-1} x y x^{-1} a^{\alpha_2 + 1} b^{\beta_2} \dots a^{\gamma} x^{-1} y^{-1} x.$$

Чтобы третья и четвертая буквы у f_2 совпадали соответственно с третьей и четвертой буквами у f_1 необходимо, чтобы $\delta = 0$, $\beta_l = -1$, $\alpha_{l+1} > 0$, т. е.

$$f_2 \equiv y x^{-1} y^{-1} x y^{-1} x^{-1} y x a^{\alpha_{l+1} - 1} w,$$

но сравнивая пятые буквы у f_1 и f_2, видим, что $f_1 \not\equiv f_2$. Следовательно, f_1 не может начинаться с буквы y.

Аналогичным образом проверяется, что f_1 не может начинаться и с буквы y^{-1}. Таким образом лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

Благодарю М. В. Нещадима за плодотворные беседы и обсуждения настоящей работы. Также благодарю всех участников семинара "Эварист Галуа", прослушавших доказельства и внесших ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мальцев, О гомоморфизмах на конечные группы, Учен. зап. Ивановск. пед. ин–та, 18, № 5 (1958), 49–60 (или "Избранные труды", т. 1, Классическая алгебра, 1976, 450–462).

2. M. Hall, Jr., Coset representations in free groups, TAMS, 67, № 2 (1949), 421–432.

3. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп, 15–е изд., Новосибирск, Ин–т матем. СО РАН, 2002.

4. Е. Д. Логинова, Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами, Сиб. матем. журн., 40, № 2 (1999), 395–407.

5. М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, Основы теории групп, 4–е изд., М.: Наука, 1996.

6. Х. Нейман, Многообразия групп, М.: Мир, 1969.

РОССИЯ,
Бардаков Валерий Георгиевич,
630090, г. Новосибирск, 90,
пр. Ак. Коптюга, д. 4,
ИМ СО РАН,
E–mail: bardakov@math.nsc.ru.