УДК 512.54

СТРОЕНИЕ ГРУППЫ СОПРЯГАЮЩИХ АВТОМОРФИЗМОВ [1]

В. Г. Бардаков

Классическим объектом исследования комбинаторной теории групп является группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_n)$ свободной группы F_n ранга $n \geq 2$ со свободными порождающими $x_1, x_2, ..., x_n$. Известно [1, 2], что группу $\mathrm{Aut}(F_2)$ можно построить из циклических групп при помощи свободного и полупрямого произведения. Вопрос о том, можно ли распространить этот результат на случай $n > 2$ остается открытым. Если обозначить $A_n = F_n/F_n'$ — фактор–группа группы F_n по ее коммутанту F_n', то всякий автоморфизм группы F_n индуцирует некоторый автоморфизм группы A_n, а потому существует гомоморфизм

$$\xi : \mathrm{Aut}(F_n) \longrightarrow \mathrm{Aut}(A_n).$$

Ядро этого гомоморфизма, состоящее из автоморфизмов, действующих тождественно по модулю коммутанта F_n' называется группой *IA–автоморфизмов* и обозначается символом $\mathrm{IA}(F_n)$ (см. [3, гл. 1, § 4]). Так как $A_n \simeq \mathbb{Z}^n$ — свободная абелева группа ранга n, то $\mathrm{Aut}(A_n)$ изоморфна общей линейной группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Поэтому при изучении группы $\mathrm{Aut}(F_n)$ желательно было бы изучить строение группы $\mathrm{IA}(F_n)$. Группа $\mathrm{IA}(F_2)$ изоморфна группе внутренних автоморфизмов $\mathrm{Inn}(F_2)$, которая, в свою очередь, изоморфна F_2, а потому основной интерес представляет случай $n \geq 3$.

Д. Нильсен для случая $n \leq 3$ и В. Магнус для всех n показали (см. [3, гл. 1, § 4]), что группа $\mathrm{IA}(F_n)$ порождается следующими автоморфизмами

$$\varepsilon_{ijk} : \begin{cases} x_i \longmapsto x_i[x_j, x_k] & \text{при } k \neq i, j, \\ x_l \longmapsto x_l & \text{при } l \neq i, \end{cases} \qquad \varepsilon_{ij} : \begin{cases} x_i \longmapsto x_j^{-1} x_i x_j & \text{при } i \neq j, \\ x_l \longmapsto x_l & \text{при } l \neq i, \end{cases}$$

где $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ — коммутатор элементов a и b. Определяющие соотношения группы $\mathrm{IA}(F_n)$ при $n \geq 3$ до сих пор неизвестны, а как установили С. Крстич и Д. Маккул [4] группа $\mathrm{IA}(F_3)$ не является конечно определенной.

Подгруппа группы $\mathrm{IA}(F_n)$, порожденная автоморфизмами ε_{ij}, $1 \leq i \neq j \leq n$, называется *группой сопрягающих базис автоморфизмов*. В дальнейшем будем обозначать ее символом Cb_n. Д. Маккул [5] показал, что группа Cb_n является конечно определенной и нашел ее определяющие соотношения.

Группа Cb_n является подгруппой *группы сопрягающих автоморфизмов* C_n. (Напомним, что всякий автоморфизм из C_n переводит порождающий x_i в элемент $f_i^{-1} x_{\pi(i)} f_i$, где $f_i \in F_n$, а π — некоторая подстановка из симметрической группы S_n.) Очевидно, если π — тождественная подстановка, то этот автоморфизм лежит в группе Cb_n. Множество автоморфизмов из C_n, оставляющих на месте произведение $x_1 x_2 ... x_n$ образует группу кос B_n. Группа B_n содержит нормальную подгруппу P_n, называемую *группой крашеных кос*, такую, что фактор-группа B_n/P_n изоморфна симметрической группе S_n. Как установила А. Г. Савушкина [6, лемма 3], группа кос B_n пересекается с подгруппой Cb_n по группе крашеных кос P_n. Строение группы P_n достаточно хорошо известно [7, 8]. Интересно было бы выяснить: как группа

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №02–01–01118)

P_n расположена в Cb_n? Кроме того, группа P_n разлагается в полупрямое произведение свободных групп

$$P_n = U_n \leftthreetimes (U_{n-1} \leftthreetimes (\ldots \leftthreetimes (U_3 \leftthreetimes U_2)) \ldots),$$

где $U_i \simeq F_{i-1}, i = 2, 3, \ldots, n$. Возникает естественный вопрос: можно ли группу Cb_n аналогичным образом разложить в полупрямое произведение некоторых групп?

В предлагаемой работе дается положительный ответ на этот вопрос, а точнее, доказывается

Теорема 1. *Группа сопрягающих базис автоморфизмов Cb_n, $n \geq 2$, разлагается в полупрямое произведение*

$$Cb_n = D_{n-1} \leftthreetimes (D_{n-2} \leftthreetimes (\ldots \leftthreetimes (D_2 \leftthreetimes D_1)) \ldots),$$

где подгруппа D_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, порождается элементами $\varepsilon_{i+1,1}, \varepsilon_{i+1,2}, \ldots, \varepsilon_{i+1,i}, \varepsilon_{1,i+1}, \varepsilon_{2,i+1}, \ldots$ При этом элементы $\varepsilon_{i+1,1}, \varepsilon_{i+1,2}, \ldots, \varepsilon_{i+1,i}$ порождают свободную группу ранга i, а элементы $\varepsilon_{1,i+1}, \varepsilon_{2,i+1}, \ldots, \varepsilon_{i,i+1}$ порождают свободную абелеву группу ранга i. Это разложение согласовано с соответствующим разложением группы крашеных кос P_n, т. е. имеют место включения $U_{i+1} \leq D_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Отметим, что если $G = G_1 \star G_2 \star \ldots \star G_n$ — свободное произведение и каждый множитель G_i — неразложим и не изоморфен бесконечной циклической группе, а $\overline{G} = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ — прямое произведение этих же групп, то для подгруппы группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(G)$, являющейся ядром гомоморфизма $\mathrm{Aut}(G) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\overline{G})$, аналогичная теорема установлена в работе Д. Дж. Коллинса и Н. Д. Джильберта [8].

В качестве следствия этой теоремы мы получим нормальную форму слов в группе Cb_n. Так как группа сопрягающих автоморфизмов C_n является полупрямым произведением группы Cb_n и симметрической группы S_n, то можно построить нормальную форму слов и в группе C_n.

Разложение группы Cb_n в полупрямое произведение, построенное в теореме 1 не единственно. В § 4 мы найдем другое разложение. Кроме того, будут установлены некоторые свойства групп C_n и Cb_n. В частности, будет доказано, что при $n \geq 4$ в этих группах неразрешима проблема вхождения в конечно порожденные подгруппы. Также будет доказано, что группа C_n для всякого $n \geq 2$ порождается не более четырьмя элементами и найден соответствующий генетический код. Для группы Cb_n при $n \geq 2$ будет доказано, что она не имеет собственных вербальных подгрупп конечной ширины. Это утверждение тесно связано с вопросом 14.15 из "Коуровской тетради"[9].

В связи с полученными результатами возникают следующие естественные вопросы, ответы на которые позволили бы лучше понять строение группы IA–автоморфизмов.

Вопрос 1. Как устроена группа, порожденная автоморфизмами ε_{ijk}. В частности, будет ли она конечно определенной?

Вопрос 2. Можно ли для группы $\mathrm{IA}(F_n)$, $n \geq 4$, получить разложение в полупрямое произведение, аналогичное разложению группы Cb_n из теоремы 1? Как группа Cb_n расположена в группе $\mathrm{IA}(F_n)$?

Автор благодарит О. В. Богопольского, прочитавшего рукопись и сделавшего ряд полезных замечаний, также благодарит Джона Мейера, указавшего на работу [8] и на некоторые неточности в первоначальной версии статьи.

§ 1. **Некоторые вспомогательные утверждения**

Напомним (см. [10, § 6]), что группа G является *полупрямым произведением* групп A и B, если в G существуют такие подгруппы H, K, что

$$G = HK, \quad A \simeq H \trianglelefteq G, \quad B \simeq K, \quad H \cap K = 1.$$

Обозначается полупрямое произведение символом $G = A \leftthreetimes B$. Очевидно, если

$$A = \text{гр}(a_1, a_2, \ldots, a_k \parallel A_1, A_2, \ldots, A_p), \quad B = \text{гр}(b_1, b_2, \ldots, b_l \parallel B_1, B_2, \ldots, B_q)$$

— генетические коды групп A и B соответственно, то полупрямое произведение $G = A \leftthreetimes B$ имеет следующий генетический код

$$G = \text{гр}(a_1, a_2, \ldots, a_k; b_1, b_2, \ldots, b_l \parallel A_1, A_2, \ldots, A_p; B_1, B_2, \ldots, B_q; b_i^{-1} a_j b_i = C_{ij}, \quad 1 \leq i \leq l, \quad 1 \leq j \leq k),$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_p, C_{ij}$ — слова в алфавите $\{a_1^{\pm 1}, a_2^{\pm 1}, \ldots, a_k^{\pm 1}\}$, $B_1, B_2, \ldots, B_q$ — слова в алфавите $\{b_1^{\pm 1}, b_2^{\pm 1}, \ldots, b_l^{\pm 1}\}$, элементы $C_{i1}, C_{i2}, \ldots, C_{ik}$ порождают группу A для любого $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$, и сопряжение элементом b_i индуцирует автоморфизм группы A, $i = 1, 2, \ldots, l$.

Также напомним некоторые известные факты о группах кос (см. [7,8]).

Группа кос B_n, $n \geq 2$, на n нитях задается порождающими элементами $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ и определяющими соотношениями

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-2, \tag{1}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{при } |i - j| \geq 2. \tag{2}$$

Существует гомоморфизм группы кос B_n на группу подстановок S_n, переводящий порождающий σ_i в транспозицию $(i, i+1)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Ядро этого гомоморфизма называется *группой крашеных кос* и обозначается символом P_n. Группа P_n порождается элементами a_{ij}, $1 \leq i < j \leq n$, которые выражаются через порождающие группы B_n следующим образом

$$a_{i,i+1} = \sigma_i^2,$$

$$a_{ij} = \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \ldots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \ldots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^{-1}, \quad i + 1 < j \leq n.$$

Группа крашеных кос P_n является полупрямым произведением нормальной подгруппы U_n, которая является свободной группой со свободными порождающими $a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{n-1,n}$ и группы P_{n-1}. Аналогично, P_{n-1} является полупрямым произведением свободной группы U_{n-1} со свободными порождающими $a_{1,n-1}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n-2,n-1}$ и подгруппы P_{n-2} и т. д. Следовательно, группа P_n имеет следующее разложение

$$P_n = U_n \leftthreetimes (U_{n-1} \leftthreetimes (\ldots \leftthreetimes (U_3 \leftthreetimes U_2)) \ldots), \quad U_i \simeq F_{i-1}, i = 2, 3, \ldots, n.$$

Группа крашеных кос P_n определяется соотношениями (при $\nu = \pm 1$)

$$a_{ik}^{-\nu} a_{kj} a_{ik}^{\nu} = (a_{ij} a_{kj})^{\nu} \, a_{kj} \, (a_{ij} a_{kj})^{-\nu},$$

$$a_{km}^{-\nu} a_{kj} a_{km}^{\nu} = (a_{kj} a_{mj})^{\nu} \, a_{kj} \, (a_{kj} a_{mj})^{-\nu}, \qquad m < j,$$

$$a_{im}^{-\nu} a_{kj} a_{im}^{\nu} = \left[a_{ij}^{-\nu}, a_{mj}^{-\nu}\right]^{\nu} a_{kj} \left[a_{ij}^{-\nu}, a_{mj}^{-\nu}\right]^{-\nu}, \qquad i < k < m,$$

$$a_{im}^{-\nu} a_{kj} a_{im}^{\nu} = a_{kj}, \qquad k < i; \quad m < j \ \text{ или } \ m < k.$$

Группа кос B_n вкладывается в группу автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_n)$. При этом порождающий σ_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, определяет автоморфизм

$$\sigma_i : \begin{cases} x_i \longmapsto x_i x_{i+1} x_i^{-1}, \\ x_{i+1} \longmapsto x_i, \\ x_l \longmapsto x_l & \text{при} \quad l \neq i, i+1. \end{cases}$$

Порождающий a_{rs} группы крашеных кос P_n определяет автоморфизм

$$a_{rs} : \begin{cases} x_i \longmapsto x_i & \text{при} \quad s < i \ \text{ или } \ i < r, \\ \\ x_r \longmapsto x_r x_s x_r x_s^{-1} x_r^{-1}, \\ \\ x_i \longmapsto [x_r^{-1}, x_s^{-1}] x_i [x_r^{-1}, x_s^{-1}]^{-1} & \text{при} \quad r < i < s, \\ \\ x_s \longmapsto x_r x_s x_r^{-1}. \end{cases}$$

Как установил Э. Артин, автоморфизм β из $\mathrm{Aut}(F_n)$ принадлежит группе кос B_n тогда и только тогда, когда β удовлетворяет следующим двум условиям:

$$1) \quad \beta(x_i) = a_i^{-1} x_{\pi(i)} a_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$2) \quad \beta(x_1 x_2 \ldots x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n,$$

где π — некоторая подстановка из S_n, а $a_i \in F_n$.

Как было отмечено выше, автоморфизмы, удовлетворяющие условию 1), называются сопрягающими автоморфизмами. Сопрягающий автоморфизм, действующий тождественно по модулю коммутанта F_n' называется *сопрягающим базис автоморфизмом.* Как показал Д. Маккул [5], группа сопрягающих базис автоморфизмов Cb_n порождается автоморфизмами ε_{ij}, $1 \leq i \neq j \leq n$, определенными во введении, и имеет следующие определяющие соотношения (условимся здесь и в дальнейшем обозначать разные индексы разными буквами):

$$\varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}, \tag{3}$$

$$\varepsilon_{ij} \varepsilon_{kj} = \varepsilon_{kj} \varepsilon_{ij}, \tag{4}$$

$$(\varepsilon_{ij} \varepsilon_{kj}) \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik} (\varepsilon_{ij} \varepsilon_{kj}). \tag{5}$$

Пусть $\Gamma = (V, E)$ — неориентированный граф с конечным множеством вершин V; множеством ребер E, которое не содержит петель и кратных ребер. *Граф–группой* $G(\Gamma)$ называется группа с множеством порождающих v_i, $v_i \in V$ и множеством определяющих соотношений $v_i v_j = v_j v_i$, если вершины v_i и v_j соединены ребром в графе Γ. Граф-группы изучались в работах [12, 13]. В работе [14] исследовалась ширина вербальных подгрупп граф–групп.

§ 2 **Доказательство основной теоремы**

Докажем вначале несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *В группе сопрягающих базис автоморфизмов Cb_n справедливы следующие формулы сопряжения (при $\nu = \pm 1$):*

$$1) \quad \varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}^{\nu} = \varepsilon_{kl},$$

$$2) \quad \varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{kj}\varepsilon_{ij}^{\nu} = \varepsilon_{kj},$$

$$3) \quad \varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{ki}\varepsilon_{ij}^{\nu} = \varepsilon_{kj}^{\nu}\varepsilon_{ki}\varepsilon_{kj}^{-\nu},$$

$$4) \quad \varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{ij}^{\nu} = \varepsilon_{kj}^{\nu}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj}^{-\nu},$$

$$5) \quad \varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ij}^{\nu} = [\varepsilon_{kj}^{-\nu}, \varepsilon_{ik}]\varepsilon_{jk}.$$

(Напомним, что мы обозначаем разные индексы разными буквами.)

Доказательство. Формулы 1)–2) легко следуют из определяющих соотношений (3)–(5) группы Cb_n.

Из соотношения (5) имеем равенство

$$(\varepsilon_{kj}\varepsilon_{ij})\varepsilon_{ki} = \varepsilon_{ki}(\varepsilon_{kj}\varepsilon_{ij}). \tag{6}$$

Домножим обе его части слева на ε_{kj}^{-1}, а справа на ε_{ij}^{-1}, получим

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ki}\varepsilon_{ij}^{-1} = \varepsilon_{kj}^{-1}\varepsilon_{ki}\varepsilon_{kj},$$

а это в точности равенство 3) при $\nu = -1$. Воспользовавшись перестановочностью элементов ε_{kj} и ε_{ij}, перепишем равенство (6) в таком виде

$$(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kj})\varepsilon_{ki} = \varepsilon_{ki}(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kj}).$$

Домножим обе части этого равенства слева на ε_{ij}^{-1}, а справа на ε_{kj}^{-1}, получим равенство

$$\varepsilon_{kj}\varepsilon_{ki}\varepsilon_{kj}^{-1} = \varepsilon_{ij}^{-1}\varepsilon_{ki}\varepsilon_{ij},$$

а это в точности равенство 3) при $\nu = 1$.

Для доказательства формулы 4) рассмотрим соотношение

$$(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kj})\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kj}), \tag{7}$$

выполненное в группе Cb_n. Домножим обе его части слева на ε_{ij}^{-1}, а справа на ε_{kj}^{-1}, получим равенство

$$\varepsilon_{kj}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj}^{-1} = \varepsilon_{ij}^{-1}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{ij},$$

а это и есть равенство 4) при $\nu = 1$. Воспользовавшись перестановочностью элементов ε_{ij} и ε_{kj}, перепишем равенство (7) в таком виде

$$(\varepsilon_{kj}\varepsilon_{ij})\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}(\varepsilon_{kj}\varepsilon_{ij}).$$

Домножая обе части слева на ε_{kj}^{-1}, а справа на ε_{ij}^{-1}, получим

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{ij}^{-1} = \varepsilon_{kj}^{-1}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj},$$

т. е равенство 4) при $\nu = -1$.

Для доказательства формулы 5) воспользуемся соотношением

$$(\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk})\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk}),$$

выполненным в группе Cb_n. Из этого соотношения следует равенство

$$\varepsilon_{ij}^{-\nu}(\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk})\varepsilon_{ij}^{\nu} = \varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk}.$$

Перепишем его в таком виде

$$(\varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{ij}^{\nu})(\varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ij}^{\nu}) = \varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk}.$$

Воспользовавшись установленным равенством 4), получим

$$(\varepsilon_{kj}^{\nu}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj}^{-\nu})(\varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ij}^{\nu}) = \varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk}.$$

Из этого равенства

$$\varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ij}^{\nu} = \varepsilon_{kj}^{\nu}\varepsilon_{ik}^{-1}\varepsilon_{kj}^{-\nu}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk} = [\varepsilon_{kj}^{-\nu}, \varepsilon_{ik}]\varepsilon_{jk}.$$

Следовательно, формула 5), а вместе с ней и лемма 1 установлены.

В группе Cb_n определим подгруппы

$$D_i = \text{гр}(\varepsilon_{i+1,1}, \varepsilon_{i+1,2}, \ldots, \varepsilon_{i+1,i}, \varepsilon_{1,i+1}, \varepsilon_{2,i+1}, \ldots, \varepsilon_{i,i+1}), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Справедлива

Лемма 2. *Пусть k, l — натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам: $2 \leq k < l \leq n$. Тогда группа D_{k-1} лежит в нормализаторе группы D_{l-1}.*

Доказательство. По определению,

$$D_{k-1} = \text{гр}(\varepsilon_{k,1}, \varepsilon_{k,2}, \ldots, \varepsilon_{k,k-1}, \varepsilon_{1,k}, \varepsilon_{2,k}, \ldots, \varepsilon_{k-1,k}),$$

$$D_{l-1} = \text{гр}(\varepsilon_{l,1}, \varepsilon_{l,2}, \ldots, \varepsilon_{l,l-1}, \varepsilon_{1,l}, \varepsilon_{2,l}, \ldots, \varepsilon_{l-1,l}).$$

Возьмем некоторый порождающий $\varepsilon_{k,i}$, $1 \leq i \leq k-1$, группы D_{k-1} и покажем, что сопрягая им любой порождающий группы D_{l-1}, получим элемент из группы D_{l-1}. Ввиду леммы 1, имеем следующие формулы сопряжения:

$$\varepsilon_{ki}^{-\nu}\varepsilon_{lj}\varepsilon_{ki}^{\nu} = \varepsilon_{lj}, \quad \varepsilon_{ki}^{-\nu}\varepsilon_{jl}\varepsilon_{ki}^{\nu} = \varepsilon_{jl}, \quad j \neq i, k,$$

$$\varepsilon_{ki}^{-\nu}\varepsilon_{li}\varepsilon_{ki}^{\nu} = \varepsilon_{li},$$

$$\varepsilon_{ki}^{-\nu}\varepsilon_{lk}\varepsilon_{ki}^{\nu} = \varepsilon_{li}^{\nu}\varepsilon_{lk}\varepsilon_{li}^{-\nu},$$

$$\varepsilon_{ki}^{-\nu}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ki}^{\nu} = \varepsilon_{li}^{\nu}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{li}^{-\nu},$$

$$\varepsilon_{ki}^{-\nu}\varepsilon_{il}\varepsilon_{ki}^{\nu} = [\varepsilon_{li}^{-\nu}, \varepsilon_{kl}]\varepsilon_{il},$$

так как правые части этих равенств лежат в D_{l-1}, то мы получим требуемые формулы.

Рассмотрим теперь элемент ε_{ik}, $1 \leq i \leq k-1$. Опять из леммы 1 имеем равенства

$$\varepsilon_{ik}^{-\nu}\varepsilon_{lj}\varepsilon_{ik}^{\nu} = \varepsilon_{lj}, \quad \varepsilon_{ik}^{-\nu}\varepsilon_{jl}\varepsilon_{ik}^{\nu} = \varepsilon_{jl}, \quad j \neq i, k,$$

$$\varepsilon_{ik}^{-\nu}\varepsilon_{lk}\varepsilon_{ik}^{\nu} = \varepsilon_{lk},$$

$$\varepsilon_{ik}^{-\nu}\varepsilon_{li}\varepsilon_{ik}^{\nu} = \varepsilon_{lk}^{\nu}\varepsilon_{li}\varepsilon_{lk}^{-\nu},$$

$$\varepsilon_{ik}^{-\nu}\varepsilon_{il}\varepsilon_{ik}^{\nu} = \varepsilon_{lk}^{\nu}\varepsilon_{il}\varepsilon_{lk}^{-\nu},$$

$$\varepsilon_{ik}^{-\nu}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ik}^{\nu} = [\varepsilon_{lk}^{-\nu}, \varepsilon_{il}]\varepsilon_{kl}.$$

Так как правые части этих равенств лежат в D_{l-1}, то при сопряжении элементом ε_{ik}^{ν} порождающих группы D_{l-1} мы по-прежнему остаемся в группе D_{l-1}. Следовательно, D_{k-1} действительно лежит в нормализаторе группы D_{l-1}.

Используя индукцию, из этой леммы легко выводится

Следствие. *Подгруппа D_{n-1} нормальна в группе Cb_n.*

Следующая лемма является одним из утверждений основной теоремы.

Лемма 3. *Группа сопрягающих базис автоморфизмов Cb_n при $n \geq 2$ является полупрямым произведением*

$$Cb_n = D_{n-1} \leftthreetimes (D_{n-2} \leftthreetimes \ldots (\leftthreetimes(D_2 \leftthreetimes D_1)) \ldots),$$

где $D_i = \text{гр}(\varepsilon_{i+1,1}, \varepsilon_{i+1,2}, \ldots, \varepsilon_{i+1,i}, \varepsilon_{1,i+1}, \varepsilon_{2,i+1}, \ldots, \varepsilon_{i,i+1})$, *а* $\text{гр}(\varepsilon_{i+1,1}, \varepsilon_{i+1,2}, \ldots, \varepsilon_{i+1,i}) \simeq F_i$, $\text{гр}(\varepsilon_{1,i+1}, \varepsilon_2$
$\mathbb{Z}^i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Доказательство. При $n = 2$ имеем

$$Cb_2 = D_1 = \text{гр}(\varepsilon_{21}, \varepsilon_{12}).$$

Так как группа Cb_2 не содержит соотношений, то $D_1 \simeq F_2 = F_1 * \mathbb{Z}$ и базис индукции установлен.

Покажем, что $Cb_n = D_{n-1} \leftthreetimes Cb_{n-1}$. Ввиду леммы 2 подгруппа D_{n-1} нормальна в Cb_n.

Рассмотрим соотношения (3)–(5), определяющие группу Cb_n. Разобъем их на три непересекающихся подмножества. В первое подмножество будут входить соотношения, содержащие только порождающие группы D_{n-1}. Так как у любой пары порождающих группы D_{n-1} один из индексов равен n, то в первое подмножество входят только соотношения из (4) следующего вида

$$\varepsilon_{in}\varepsilon_{jn} = \varepsilon_{jn}\varepsilon_{in}, \quad 1 \leq i \neq j \leq n-1. \tag{8}$$

Следовательно, элементы $\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{2n}, \ldots, \varepsilon_{n-1,n}$ порождают абелеву подгруппу группы D_{n-1}. Также легко проверить, что элементы $\varepsilon_{n1}, \varepsilon_{n2}, \ldots, \varepsilon_{n,n-1}$ являются свободными порождающими свободной группы F_{n-1}.

Во второе подмножество соотношений входят соотношения, содержащие только порождающие группы Cb_{n-1}. Наконец, третье подмножество состоит из соотношений, содержащих одновременно порождающие групп D_{n-1} и Cb_{n-1}. Покажем, что эти соотношения определяют действие группы Cb_{n-1} на подгруппе D_{n-1}.

Рассмотрим соотношения из (3), содержащие одновременно порождающие групп D_{n-1} и Cb_{n-1}. Это соотношения одного из следующих двух видов

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kn} = \varepsilon_{kn}\varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij}\varepsilon_{nk} = \varepsilon_{nk}\varepsilon_{ij}, \quad 1 \leq i, j, k < n. \tag{9}$$

Из этих соотношений следуют формулы сопряжения

$$\varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{kn}\varepsilon_{ij}^{\nu} = \varepsilon_{kn}, \quad \varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{nk}\varepsilon_{ij}^{\nu} = \varepsilon_{nk}, \quad \nu = \pm 1. \tag{10}$$

Если соотношение из (4) содержит одновременно порождающие групп D_{n-1} и Cb_{n-1}, то оно имеет вид

$$\varepsilon_{nj}\varepsilon_{kj} = \varepsilon_{kj}\varepsilon_{nj}, \quad 1 \leq k, j < n.$$

Из этого соотношения имеем следующие формулы сопряжения

$$\varepsilon_{kj}^{-\nu}\varepsilon_{nj}\varepsilon_{kj}^{\nu} = \varepsilon_{nj}, \quad 1 \leq k, j < n \quad \nu = \pm 1. \tag{11}$$

Если соотношение из (5) содержит одновременно порождающие групп D_{n-1} и Cb_{n-1}, то оно может быть одного из следующих трех видов

$$(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{nj})\varepsilon_{in} = \varepsilon_{in}(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{nj}),$$

$$(\varepsilon_{nj}\varepsilon_{ij})\varepsilon_{ni} = \varepsilon_{ni}(\varepsilon_{nj}\varepsilon_{ij}),$$

$$(\varepsilon_{in}\varepsilon_{jn})\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\varepsilon_{in}\varepsilon_{jn}), \quad 1 \leq i, j < n.$$

Из этих соотношений так же, как и в доказательстве леммы 1, выводятся формулы сопряжения

$$\varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{in}\varepsilon_{ij}^{\nu} = \varepsilon_{nj}^{\nu}\varepsilon_{in}\varepsilon_{nj}^{-\nu}, \tag{12}$$

$$\varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{ni}\varepsilon_{ij}^{\nu} = \varepsilon_{nj}^{\nu}\varepsilon_{ni}\varepsilon_{nj}^{-\nu}, \tag{13}$$

$$\varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{jn}\varepsilon_{ij}^{\nu} = [\varepsilon_{nj}^{-\nu}, \varepsilon_{in}]\varepsilon_{jn}, \quad 1 \leq i, j < n, \quad \nu = \pm 1. \tag{14}$$

Следовательно, соотношения группы Cb_n, содержащие одновременно порождающие групп D_{n-1} и Cb_{n-1} равносильны соотношениям (10)–(14), определяющим действие группы Cb_{n-1} на подгруппе D_{n-1}. Так как $D_{n-1} \bigcap Cb_{n-1} = 1$, то $Cb_n = D_{n-1} \leftthreetimes Cb_{n-1}$. Воспользовавшись индуктивным предположением, получим требуемое разложение. Лемма доказана.

Отметим, что ввиду леммы 2, порядок расстановки скобок в полученном разложении может быть произвольным.

Группа сопрягающих автоморфизмов C_n содержит группу сопрягающих базис автоморфизмов Cb_n. При этом, как показано в работе [6], группа C_n является полупрямым произведением $C_n = Cb_n \leftthreetimes S_n$, где симметрическая группа S_n порождается автоморфизмами

$$\alpha_i : \begin{cases} x_i \longmapsto x_{i+1}, & \\ x_{i+1} \longmapsto x_i, & i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ x_l \longmapsto x_l, & l \neq i, i+1, \end{cases}$$

и определяется соотношениями

$$\alpha_j^2 = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{15}$$

$$\alpha_i\alpha_{i+1}\alpha_i = \alpha_{i+1}\alpha_i\alpha_{i+1}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-2, \tag{16}$$

$$\alpha_k\alpha_l = \alpha_l\alpha_k, \quad 1 \leq k, l \leq n-1, \quad |k-l| \geq 2. \tag{17}$$

При этом группа C_n порождается автоморфизмами ε_{ij}, $1 \leq i \neq j \leq n$; α_k, $1 \leq k \leq n-1$ и определяется соотношениями (3)–(5), (15)–(17) и соотношениями

$$\varepsilon_{ij}\alpha_k = \alpha_k\varepsilon_{ij}, \quad k \neq i-1, i, j-1, j, \tag{19}$$

$$\varepsilon_{ij}\alpha_i = \alpha_i\varepsilon_{i+1,j}, \quad \varepsilon_{ij}\alpha_j = \alpha_j\varepsilon_{i,i+1}, \quad \varepsilon_{i,i+1}\alpha_i = \alpha_i\varepsilon_{i+1,i}, \tag{20}$$

(см. [6, лемма 1]).

Очевидно, группа крашеных кос P_n содержится в группе Cb_n. Выразим порождающие группы P_n через порождающие группы Cb_n. Справедлива

Лемма 4. *Порождающие группы крашеных кос P_n представимы в следующем виде*

$$a_{i,i+1} = \varepsilon_{i,i+1}^{-1}\varepsilon_{i+1,i}^{-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{21}$$

$$a_{ij} = \varepsilon_{j-1,i}\varepsilon_{j-2,i}\ldots\varepsilon_{i+1,i}(\varepsilon_{ij}^{-1}\varepsilon_{ji}^{-1})\varepsilon_{i+1,i}^{-1}\ldots\varepsilon_{j-2,i}^{-1}\varepsilon_{j-1,i}^{-1} =$$
$$= \varepsilon_{j-1,j}^{-1}\varepsilon_{j-2,j}^{-1}\ldots\varepsilon_{i+1,j}^{-1}(\varepsilon_{ij}^{-1}\varepsilon_{ji}^{-1})\varepsilon_{i+1,j}\ldots\varepsilon_{j-2,j}\varepsilon_{j-1,j}, \quad 2 \leq i+1 < j \leq n. \tag{22}$$

Доказательство. Необходимо вспомнить, как действуют соответствующие элементы на порождающих свободной группы F_n. Доказательство равенства (21) заключается в непосредственной проверке. Для доказательства первого равенства из (22) достаточно проверить, что автоморфизм

$$a_{ij}\varepsilon_{ji}(\varepsilon_{j-1,i}\varepsilon_{j-2,i}\ldots\varepsilon_{i+1,i})\varepsilon_{ij}(\varepsilon_{i+1,i}^{-1}\ldots\varepsilon_{j-2,i}^{-1}\varepsilon_{j-1,i}^{-1})$$

является тождественным. Для доказательства второго равенства из (22) достаточно установить следующее соотношение

$$\varepsilon_{ki}(\varepsilon_{ij}^{-1}\varepsilon_{ji}^{-1})\varepsilon_{ki}^{-1} = \varepsilon_{kj}^{-1}(\varepsilon_{ij}^{-1}\varepsilon_{ji}^{-1})\varepsilon_{kj}, \quad i+1 \leq k \leq j-1. \tag{23}$$

Из леммы 1 имеем формулы сопряжения

$$\varepsilon_{ki}\varepsilon_{ij}^{-1}\varepsilon_{ki}^{-1} = \varepsilon_{ij}^{-1}[\varepsilon_{kj}, \varepsilon_{ji}], \quad \varepsilon_{ki}\varepsilon_{ji}^{-1}\varepsilon_{ki}^{-1} = \varepsilon_{ji}^{-1}.$$

Используя эти формулы, перепишем левую часть равенства (23) в таком виде

$$\varepsilon_{ki}(\varepsilon_{ij}^{-1}\varepsilon_{ji}^{-1})\varepsilon_{ki}^{-1} = \varepsilon_{ij}^{-1}[\varepsilon_{kj}, \varepsilon_{ji}]\varepsilon_{ji}^{-1} = \varepsilon_{ij}^{-1}\varepsilon_{kj}^{-1}\varepsilon_{ji}^{-1}\varepsilon_{kj}.$$

Воспользовавшись перестановочностью элементов ε_{ij}^{-1} и ε_{kj}^{-1}, получим требуемое равенство (23) из которого легко следует требуемое представление. Лемма доказана.

Теперь мы можем доказать оставшуюся часть теоремы 1. Вспоминаем, что

$$D_i = \text{гр}(\varepsilon_{i+1,1}, \varepsilon_{i+1,2}, \ldots, \varepsilon_{i+1,i}, \varepsilon_{1,i+1}, \varepsilon_{2,i+1}, \ldots, \varepsilon_{i,i+1}),$$

а свободная группа U_{i+1} порождается элементами $a_{1,i+1}, a_{2,i+1}, \ldots, a_{i,i+1}$. Так как ввиду леммы 4 справедливы равенства

$$a_{k,i+1} = \varepsilon_{i,i+1}^{-1}\varepsilon_{i-1,i+1}^{-1}\ldots\varepsilon_{k+1,i+1}^{-1}(\varepsilon_{k,i+1}^{-1}\varepsilon_{i+1,k}^{-1})\varepsilon_{k+1,i+1}\ldots\varepsilon_{i-1,i+1}\varepsilon_{i,i+1}, \quad 1 \leq k \leq i-1,$$

$$a_{i,i+1} = \varepsilon_{i,i+1}^{-1}\varepsilon_{i+1,i}^{-1},$$

то U_{i+1} является подгруппой группы D_i.

Более того, используя преобразования Титца, нетрудно показать, что группа D_i порождается элементами $a_{1,i+1}, a_{2,i+1}, \dots, a_{i,i+1}; \varepsilon_{1,i+1}, \varepsilon_{2,i+1}, \dots, \varepsilon_{i,i+1}$. Таким образом теорема 1 полностью доказана.

Доказанная теорема сводит описание группы Cb_n к описанию ее подгрупп $D_{n-1}, D_{n-2}, \dots, D_1$. Покажем, что последние (за исключением D_1) устроены довольно сложно. Более того, в работе [9, с. 167] высказана гипотеза о том, что они не являются конечно определенными.

По теореме 1 группа Cb_3 является полупрямым произведением $Cb_3 = D_2 \leftthreetimes D_1$, где $D_2 = \text{гр}(\varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23})$, $D_1 = \text{гр}(\varepsilon_{21}, \varepsilon_{12}) \simeq F_2$. В группе D_2 элементы ε_{13} и ε_{23} перестановочны. Покажем, что в D_2 выполняется и множество других соотношений. Действительно, как было замечено при доказательстве теоремы 1, сопряжения элементами из D_1 индуцируют автоморфизмы группы D_2. Следовательно, сопрягая соотношение перестановочности, мы опять получим соотношение, выполненное в D_2. В частности, сопрягая соотношение $\varepsilon_{13}\varepsilon_{23} = \varepsilon_{23}\varepsilon_{13}$ различными степенями элементов ε_{12} и ε_{21}, получим следующие соотношения

$$[\varepsilon_{13}\varepsilon_{23}, \varepsilon_{32}^{k}\varepsilon_{13}\varepsilon_{32}^{-k}] = 1,$$

$$[\varepsilon_{13}\varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}^{k}\varepsilon_{23}\varepsilon_{31}^{-k}] = 1,$$

справедливые для любого целого k.

§ 3. **Некоторые свойства группы сопрягающих автоморфизмов**

Найдем вначале фактор–группы C_n/C_n' и Cb_n/Cb_n'. Для этого воспользуемся следующим утверждением

Лемма 5 ([6, теорема 1]). *Группа C_n порождается автоморфизмами σ_i, α_i, $i = 1, 2, \dots, n-1$, и определяется соотношениями* (1)–(2), (15)–(17) *и соотношениями*

$$\alpha_i\sigma_j = \sigma_j\alpha_i, \qquad |i-j| \geq 2, \tag{24}$$

$$\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i = \alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}, \quad \alpha_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\alpha_{i+1}. \tag{25}$$

Из этой леммы и генетического кода группы Cb_n легко выводится

Предложение 1. а) *Фактор–группа C_n/C_n', $n \geq 2$, группы C_n по коммутанту C_n' изоморфна группе $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$.*

б) *Фактор–группа Cb_n/Cb_n', $n \geq 2$, группы Cb_n по коммутанту Cb_n' изоморфна группе $\mathbb{Z}^{n(n-1)}$.*

Группа внутренних автоморфизмов $\text{Inn}(F_n)$ свободной группы F_n содержится в группе сопрягающих базис автоморфизмов Cb_n. Справедливо

Предложение 2. *Пересечение $B_n \bigcap \text{Inn}(F_n)$, $n \geq 2$, является бесконечной циклической группой, которая порождается внутренним автоморфизмом — сопряжением элементом $x_1x_2\dots x_n$.*

Доказательство следует из описания группы кос, как подгруппы группы автоморфизмов $\text{Aut}(F_n)$, данного Артином (см. § 1). Элементы из B_n оставляют неподвижным произведение $x_1x_6\dots x_n$. Среди внутренних автоморфизмов этим свойством обладает только сопряжение посредством $(x_1x_2\dots x_n)^k$, $k \in \mathbb{Z}$. Отсюда и следует требуемое утверждение.

Покажем теперь, что группа C_n, $n \geq 7$, порождается не более четырьмя элементами. Действительно, непосредственно из леммы 1 следует, что

$$C_2 = \text{гр}(\alpha_1, \sigma_1 \parallel \alpha_1^2 = 1) \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}.$$

При $n \geq 3$ справедливо

Предложение 3. *Группа сопрягающих автомрфизмов C_n, $n \geq 3$, порождается элементами α_1, α, σ_1, σ и определяется соотношениями*

$$\sigma^n = (\sigma\sigma_1)^{n-1}, \quad \sigma_1(\sigma^{-j}\sigma_8\sigma^j) = (\sigma^{-j}\sigma_1\sigma^j)\sigma_1, \quad 1 \leq j \leq n/6, \tag{26}$$

$$\alpha^2 = 1, \quad \alpha^n = (\alpha_1\alpha)^{n-1}, \quad \alpha_1(\alpha^{-j}\alpha_1\alpha^j) = (\alpha^{-j}\alpha_1\alpha^j)\alpha_1, \quad 2 \leq j \leq n/2, \tag{21}$$

$$\alpha^{-i}\alpha_1\alpha^i\sigma^j\sigma_1\sigma^{-j} = \sigma^j\sigma_1\sigma^{-j}\alpha^{-i}\alpha_1\alpha^i, \quad 1 \leq i, j \leq n-2, \quad |i-j| \geq 2, \tag{25}$$

$$\sigma^{i-1}\sigma_1\sigma^{-(i-1)}\alpha^{-i}\alpha_1\alpha\alpha_1\alpha^{i-1} = \alpha^{-i}\alpha_1\alpha\alpha_1\alpha^{i-1}\sigma^i\sigma_6\sigma^{-i}, \quad 5 \leq i \leq n-1, \tag{22}$$

$$\sigma^{i-1}\sigma_1\sigma\sigma_9\sigma^{-i}\alpha^{-(i-1)}\alpha_1\alpha^{i-1} = \alpha^{-i}\alpha_1\alpha^i\sigma^{i-1}\sigma_1\sigma\sigma_1\sigma^{-i}, \quad 2 \leq i \leq n-1. \tag{30}$$

При этом новые и старые порождающие связаны формулами

$$\sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{n-1}, \quad \alpha = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\ldots\alpha_1, \tag{31}$$

$$\sigma_{i+1} = \sigma^i\sigma_1\sigma^{-i}, \quad \alpha_{i+1} = \alpha^{-i}\alpha_1\alpha^i, \quad 1 \leq i \leq n-2. \tag{32}$$

Доказательство. Хорошо известно [15, гл. 6], что группа кос B_n, $n \geq 3$, порождается элементами σ_1 и σ и определяется соотношениями (26). Аналогично, симметрическая группа S_n порождается элементами α_1, α и определяется соотношениями (27). При этом связь между старыми и новыми порождающими дается формулами (31) и (32). Следовательно, в представлении группы C_n из леммы 5, мы можем заменить порождающие α_i, σ_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, порождающими α_1, α, σ_1, σ, соотношения (1)–(2) соотношениями (26), соотношения (15)–(17) — соотношениями (27). Подставив в соотношения (24)–(25) выражения порождающих α_i, σ_j через порождающие α, α_1, σ_1, σ, получим соотношения (28)–(30). Предложение доказано.

Покажем теперь, что в группе сопрягающих автоморфизмов C_n можно определить нормальную форму.

Для этого в группе D_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, упорядочим порождающие свободной абелевой группы гр$(\varepsilon_{1,i+1}, \varepsilon_{2,i+1}, \ldots, \varepsilon_{i,i+1}) \simeq \mathbb{Z}^i$ следующим образом:

$$\varepsilon_{1,i+1} < \varepsilon_{2,i+1} < \ldots < \varepsilon_{i,i+1}.$$

Тогда всякий элемент из этой группы однозначно представим в виде $\varepsilon_{1,i+1}^{\beta_1}\varepsilon_{2,i+1}^{\beta_2}\ldots\varepsilon_{i,i+1}^{\beta_i}$ для некоторых целых $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i$.

Положим далее $\omega_{ij} = \alpha_{i-1}\alpha_{i-2}\ldots\alpha_j$ при $1 \leq j < i \leq n-1$ и $\omega_{ij} = 1$ в противном случае. Введем множество

$$\Omega_n = \{\prod_{i=1}^{n}\omega_{ij} | 1 \leq j \leq i\}.$$

Справедливо

Предложение 4. *Всякий элемент c из группы C_n представим в виде*

$$c = d_1 d_2 \ldots d_n \beta,$$

где $d_i \in D_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $\beta \in \Omega_n$.

Доказательство. Как было отмечено выше, группа C_n порождается элементами ε_{ij}, $1 \leq i \neq j \leq n$, α_k, $1 \leq k \leq n-1$. При этом элементы ε_{ij} порождают группу сопрягающих базис автоморфизмов Cb_n, а элементы α_k — симметрическую группу S_n. Пусть элемент c

представлен некоторым словом в алфавите $\{\varepsilon_{ij}^{\pm 1}, \alpha_k | 1 \leq i \neq j \leq n, \quad 1 \leq k \leq n-1\}$. Так как группа C_n является полупрямым произведением группы Cb_n и S_n, то, используя соотношения (19)–(20), мы можем передвинуть все порождающие α_k вправо и представить элемент c в виде $c = dw$, где d — некоторое слово, содержащее только порождающие $\varepsilon_{ij}^{\pm 1}$, а w — слово, содержащее только порождающие α_k. Так как слово w представляет некоторый элемент из группы S_n, то этот элемент равен некоторому элементу из множества Ω_n. Этот элемент мы и обозначим через β.

Рассмотрим теперь слово d. Воспользовавшись разложением группы Cb_n в полупрямое произведение групп D_i из теоремы 1, представим элемент d в виде произведения

$$d = d_1 d_2 \dots d_{n-1}, \quad d_i \in D_i.$$

Предложение доказано.

Пусть теперь V — множество теоретико–групповых слов. *Шириной* (см. [16, § 12] $\mathrm{wid}(G, V)$ вербальной подгруппы $V(G)$, определенной в группе G множеством слов V, относительно этого V, называется наименьшее $m \in \mathbb{N} \bigcup \{+\infty\}$ такое, что всякий элемент подгруппы $V(G)$ записывается в виде произведения $\leq m$ значений слов из V.

Подгруппа называется *собственной*, если она отлична от единичной и всей группы. Множество V называется *собственным множеством слов*, если вербальная подгруппа $V(F_2)$ является собственной подгруппой свободной группы F_2. В противном случае V называется *несобственным множеством слов*. Ширина вербальной подгруппы относительно несобственного множества слов всегда конечна [17, лемма 1]. Если в группе G всякое собственное множество слов определяет собственную вербальную подгруппу, то говорят, что G *богата вербальными подгруппами*. Иными словами, группа, богатая вербальными подгруппами, содержит столько же собственных вербальных подгрупп, сколько и свободная группа F_2. Будем говорить, что группа G *не имеет собственных вербальных подгрупп конечной ширины*, если для всякого конечного собственного множества слов V ширина $\mathrm{wid}(G, V)$ бесконечна.

Далее нам потребуется

Лемма 6 ([14, лемма 3]). *Если существует эпиморфизм группы G на группу, не имеющую собственных вербальных подгрупп конечной ширины и богатую вербальными подгруппами, то и сама G не имеет собственных вербальных подгрупп конечной ширины.*

Используя эту лемму, установим

Предложение 5. *Группа сопрягающих базис автоморфизмов Cb_n, $n \geq 2$, не имеет собственных вербальных подгрупп конечной ширины.*

Доказательство Из теоремы 1 следует, что существует эпиморфизм группы Cb_n, $n \geq 2$, на группу Cb_2. Последняя, в свою очередь, изоморфна свободной группе F_2 и для нее требуемое утверждение непосредственно следует из результата А. Х. Ремтуллы [18]. Для завершения доказательства остается воспользоваться леммой 6

В работе [19] установлено, что группа кос B_n при $n \geq 3$ не имеет собственных вербальных подгрупп конечной ширины. Возможно, что используя развитую там технику, можно установить аналогичное утверждение и для группы сопрягающих автоморфизмов C_n при $n \geq 2$.

§ 4. **О других разложениях группы сопрягающих базис автоморфизмов**

Разложение группы Cb_n в полупрямое произведение, построенное в теореме 1 не единственно. В этом параграфе мы найдем некоторое другое разложение, а также покажем, что группа Cb_3 является HNN–расширением некоторой граф–группы.

Замечание. Нетрудно проверить, что генетический код группы Cb_n, $n \geq 3$, с множеством порождающих ε_{ij}, $1 \leq i \neq j \leq n$, и определяющими соотношениями (3)–(5) обладает следующими свойствами:

а) число соотношений вида (3) равно $(n-3)(n-2)(n-1)n/2$ при $n \geq 4$;

б) число соотношений вида (4) равно $(n-2)(n-1)n/2$;

в) число соотношений вида (5) равно $(n-2)(n-1)n$;

г) всякий порождающий ε_{ij} группы Cb_n входит в $3(n-2)$ соотношения вида (5).

Также нам потребуется

Лемма 7. *Каждая из подгрупп* $\text{гр}(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ji})$, $\text{гр}(\varepsilon_{ki}, \varepsilon_{kj})$, $1 \leq i < j \leq n$, $k \neq i, j$, $1 \leq k \leq n$, *группы* Cb_n *изоморфна свободной группе* F_2.

Доказательство. 1) Положим $G = \text{гр}(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ji}) \leq \text{Aut}(F_n)$. Очевидно, G содержится в группе автоморфизмов $\text{Aut}(F_2)$ свободной группы F_2 с порождающими x_i и x_j. Можно показать, что на самом деле $G \simeq \text{IA}(F_2)$, а так как последняя группа изоморфна F_2, то отсюда и следует требуемое утверждение.

2) Положим $G = \text{гр}(\varepsilon_{ki}, \varepsilon_{kj})$ и рассмотрим некоторое слово w в алфавите $\{\varepsilon_{ki}^{\pm 1}, \varepsilon_{kj}^{\pm 1}\}$, которое непусто и свободно приведено. Покажем, что оно будет определять нетривиальный автоморфизм. Действительно, пусть

$$w = \varepsilon_{ki}^{\alpha_1} \varepsilon_{kj}^{\beta_1} \ldots \varepsilon_{ki}^{\alpha_p} \varepsilon_{kj}^{\beta_p},$$

где все показатели являются целыми числами и все, за исключением, возможно, α_1 и β_p отличны от нуля. Подействуем этим автоморфизмом на порождающий x_k группы F_n. Тогда x_k перейдет в элемент

$$x_j^{-\beta_p} x_i^{-\alpha_p} \ldots x_j^{-\beta_1} x_i^{-\alpha_1} x_k x_i^{\alpha_1} x_j^{\beta_1} \ldots x_i^{\alpha_p} x_j^{\beta_p},$$

который, очевидно, отличен от x_k. Следовательно, w определяет нетривиальный автоморфизм. Лемма доказана.

Рассмотрим группу Cb_3. Она порождается элементами ε_{21}, ε_{31}, ε_{12}, ε_{32}, ε_{13}, ε_{23}. Определим элементы

$$a = \varepsilon_{21}\varepsilon_{31}, \quad b = \varepsilon_{12}\varepsilon_{32}, \quad c = \varepsilon_{13}\varepsilon_{23}. \tag{33}$$

Справедливо

Предложение 6. *Группа* Cb_3 *является HNN–расширением:*

$$Cb_3 = \text{гр}(G, c \parallel c^{-1}Ac = A, \varphi)$$

граф–группы $G = \text{гр}(a, b, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{23} \parallel a\varepsilon_{31} = \varepsilon_{31}a, a\varepsilon_{23} = \varepsilon_{23}a, a\varepsilon_{32} = \varepsilon_{32}a, b\varepsilon_{32} = \varepsilon_{32}b)$ *с проходной буквой* c, *связанной подгруппой* $A = \text{гр}(a\varepsilon_{31}^{-1}, b, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{32})$ *и изоморфизмом* φ, *определенным действием на порождающих*:

$$\varphi : \begin{cases} a\varepsilon_{31}^{-1} \longmapsto a\varepsilon_{31}^{-1}, \\ \varepsilon_{23} \longmapsto \varepsilon_{23}, \\ b \longmapsto \varepsilon_{23}^{-1} b \varepsilon_{23}, \\ \varepsilon_{32} \longmapsto \left(\varepsilon_{23}^{-1} b^{-1} \varepsilon_{23} b \varepsilon_{32}^{-1}\right)^{-1}. \end{cases}$$

Доказательство. Из равенства (33) выразим порождающие ε_{21}, ε_{12}, ε_{13}:

$$\varepsilon_{21} = a\varepsilon_{31}^{-1}, \quad \varepsilon_{12} = b\varepsilon_{32}^{-1}, \quad \varepsilon_{13} = c\varepsilon_{23}^{-1}.$$

Подставив эти выражения в определяющие соотношения группы Cb_3, получим новое представление:

$$Cb_3 = \text{гр}(a, \varepsilon_{31}, b, \varepsilon_{32}, c, \varepsilon_{23} \parallel a\varepsilon_{31} = \varepsilon_{31}a, \quad a\varepsilon_{23} = \varepsilon_{23}a, \quad a\varepsilon_{32} = \varepsilon_{32}a, \quad b\varepsilon_{32} = \varepsilon_{32}b,$$
$$b\varepsilon_{31} = \varepsilon_{31}b, \quad c^{-1}(a\varepsilon_{31}^{-1})c = a\varepsilon_{31}^{-1}, \quad c^{-1}\varepsilon_{23}c = \varepsilon_{23}, \quad c^{-1}(b\varepsilon_{32}^{-1})c = b\varepsilon_{32}^{-1}, \quad c^{-1}(b\varepsilon_{23}^{-1})c = \varepsilon_{23}^{-1}b).$$

Заметим, что последнее соотношение можно переписать в таком виде

$$(c^{-1}bc)(c^{-1}\varepsilon_{23}^{-1}c) = \varepsilon_{23}^{-1}b$$

и, воспользовавшись перестановочностью ε_{23} и c, получим соотношение

$$c^{-1}bc = \varepsilon_{23}^{-1}b\varepsilon_{23}.$$

Определим подгруппы

$$A = \text{гр}(a\varepsilon_{31}^{-1}, \varepsilon_{23}, b\varepsilon_{32}^{-1}, b), \quad B = \text{гр}(a\varepsilon_{31}^{-1}, \varepsilon_{23}, b\varepsilon_{32}^{-1}, \varepsilon_{23}^{-1}b\varepsilon_{23}).$$

Легко заметить, что на самом деле

$$A = B = \text{гр}(a\varepsilon_{31}^{-1}, b, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{32}),$$

и сопряжение элементом c определяет автоморфизм

$$\varphi : \begin{cases} a\varepsilon_{31}^{-1} \longmapsto a\varepsilon_{31}^{-1}, \\ \varepsilon_{23} \longmapsto \varepsilon_{23}, \\ b \longmapsto \varepsilon_{23}^{-1}b\varepsilon_{23}, \\ \varepsilon_{32} \longmapsto \varepsilon_{23}^{-1}b^{-1}\varepsilon_{23}b\varepsilon_{32}^{-1}. \end{cases}$$

Отсюда и из нового генетического кода группы Cb_3 получим требуемое HNN–расширение.

Предложение доказано.

Рассмотрим теперь группу Cb_n для произвольного $n \geq 3$. Положим $m = [n/2]$, где квадратные скобки означают взятие целой части. В группе Cb_n выделим подгруппу H_n, порожденную элементами $\varepsilon_{2i-1,2i}$, $\varepsilon_{2i,2i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. По лемме 7, подгруппа, порожденная элементами $\varepsilon_{2i-1,2i}$, $\varepsilon_{2i,2i-1}$ изоморфна свободной группе F_2, а учитывая, что элементы $\varepsilon_{2i-1,2i}$ и $\varepsilon_{2i,2i-1}$ перестановочны со всеми остальными порождающими группы H_n, видим, что $H_n \simeq F_2 \times F_2 \times \ldots \times F_2$ — прямое произведение m экземпляров свободной группы F_2. Символом G_n обозначим подгруппу, порожденную порождающими группы Cb_n, которые не вошли в систему порождающих группы H_n. В этих обозначениях справедлива

Теорема 2. *Группа Cb_n, $n \geq 3$, разлагается в полупрямое произведение $Cb_n = G_n \leftthreetimes H_n$, где $H_n \simeq F_2^m$, $m = [n/2]$.*

Доказательство. Покажем, что группа G_n нормальна в группе Cb_n. Для этого рассмотрим порождающий $\varepsilon_{2i-1,2i}$, $1 \leq i \leq m$, и выясним, что происходит с порождающими группы G_n при сопряжении этим элементом. Ввиду леммы 1 справедливы следующие формулы сопряжения:

$$\varepsilon_{2i-1,2i}^{-\nu}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{2i-1,2i}^{\nu} = \varepsilon_{kl},$$

$$\varepsilon_{2i-1,2i}^{-\nu}\varepsilon_{k,2i}\varepsilon_{2i-1,2i}^{\nu} = \varepsilon_{k,2i},$$

$$\varepsilon_{2i-1,2i}^{-\nu}\varepsilon_{k,2i-1}\varepsilon_{2i-1,2i}^{\nu} = \varepsilon_{k,2i}^{\nu}\varepsilon_{k,2i-1}\varepsilon_{k,2i}^{-\nu},$$

$$\varepsilon_{2i-1,2i}^{-\nu}\varepsilon_{2i-1,k}\varepsilon_{2i-1,2i}^{\nu} = \varepsilon_{k,2i}^{\nu}\varepsilon_{2i-1,k}\varepsilon_{k,2i}^{-\nu},$$

$$\varepsilon_{2i-1,2i}^{-\nu}\varepsilon_{2i,k}\varepsilon_{2i-1,2i}^{\nu} = [\varepsilon_{k,2i}^{-\nu}, \varepsilon_{2i-1,k}]\varepsilon_{2i,k}.$$

Заметим, что при этом сопряжении порождающие группы G_n переходят в элементы группы G_n. Для первой и второй формул это очевидно, а для трех оставшихся это следует из того, что $k \neq 2i-1, 2i$.

Аналогичным образом, для элемента $\varepsilon_{2i,2i-1}$, $1 \leq i \leq m$, ввиду леммы 1 справедливы следующие формулы сопряжения:

$$\varepsilon_{2i,2i-1}^{-\nu}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{2i,2i-1}^{\nu} = \varepsilon_{kl},$$

$$\varepsilon_{2i,2i-1}^{-\nu}\varepsilon_{k,2i-1}\varepsilon_{2i,2i-1}^{\nu} = \varepsilon_{k,2i-1},$$

$$\varepsilon_{2i,2i-1}^{-\nu}\varepsilon_{k,2i}\varepsilon_{2i,2i-1}^{\nu} = \varepsilon_{k,2i-1}^{\nu}\varepsilon_{k,2i}\varepsilon_{k,2i-1}^{-\nu},$$

$$\varepsilon_{2i,2i-1}^{-\nu}\varepsilon_{2i,k}\varepsilon_{2i,2i-1}^{\nu} = \varepsilon_{k,2i-1}^{\nu}\varepsilon_{2i,k}\varepsilon_{k,2i-1}^{-\nu},$$

$$\varepsilon_{2i,2i-1}^{-\nu}\varepsilon_{2i-1,k}\varepsilon_{2i,2i-1}^{\nu} = [\varepsilon_{k,2i-1}^{-\nu}, \varepsilon_{2i,k}]\varepsilon_{2i-1,k},$$

которые, как легко заметить, переводят порождающие группы G_n в элементы из G_n.

Следовательно, мы показали, что группа G_n нормальна в Cb_n. Тогда очевидно, что $Cb_n = G_n H_n$. Все соотношения группы Cb_n разбиваются на три подмножества. Первое подмножество состоит из соотношений, содержащих только порождающие группы H_n, второе — из соотношений, содержащих только порождающие группы G_n, а третье — из соотношений, содержащих одновременно порождающие из H_n и G_n. Соотношения из последнего подмножества мы переписали в виде формул сопряжения порождающих группы G_n порождающими группы H_n. Отсюда и следует, что $G_n \bigcap H_n = 1$ и требуемое утверждение установлено.

В случае $n = 3$ имеем

$$H_3 = \text{гр}(\varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}), \quad G_3 = \text{гр}(\varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}).$$

Так как H_3 и G_3 изоморфны группам D_1 и D_2 из теоремы 1, соответственно, то мы имеем тоже разложение, что и в теореме 1. Но уже в случае $n = 4$ разложение $Cb_4 = G_4 \leftthreetimes H_4$ будет отличаться от разложения, полученного в теореме 1. Действительно, в этом случае

$$H_4 = \text{гр}(\varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{34}, \varepsilon_{43} \parallel \varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}) \simeq F_2 \times F_2,$$

$$G_4 = \text{гр}(\varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{41}, \varepsilon_{42}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{14}, \varepsilon_{24}).$$

Непосредственно из этого разложения легко получается

Предложение 7. *В группах C_n и Cb_n при $n \geq 4$ неразрешима проблема вхождения в конечно порожденные подгруппы.*

Доказательство. Так как Cb_n является подгруппой группы C_n, то предложение достаточно доказать для группы Cb_n, $n \geq 4$. Группа Cb_4 содержит в качестве подгруппы группу $H_4 \simeq F_2 \times F_2$. Следовательно, ввиду результата К. А. Михайловой (см. [3, гл. 4, § 4]), в Cb_4 неразрешима проблема вхождения в конечно порожденные подгрупппы. Для завершения доказательства осталось заметить, что Cb_4 является подгруппой группы Cb_n при $n \geq 4$. Предложение доказано.

В дальнейшем нам будет удобно использовать следующие обозначения. Если ε_{ij}, $1 \leq i < j \leq n$, — некоторый порождающий группы Cb_n, то символом ε_{ij}^* будем обозначать пару порождающих: ε_{ij}, ε_{ji}, т. е. $\varepsilon_{ij}^* = \{\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ji}\}$.

Теорема 3. *В случае нечетного $n = 2m+1$, $m = 2, 3, \ldots$, группа G_n разлагается в полупрямое произведение*

$$G_n = (\ldots((K_m \leftthreetimes K_{m-1}) \leftthreetimes K_{m-2}) \leftthreetimes \ldots) \leftthreetimes K_1,$$

где

$$K_1 = \text{гр}(\varepsilon^*_{1n}, \varepsilon^*_{2n}),$$

$$K_i = \text{гр}(\varepsilon^*_{n-2i,n-1}, \varepsilon^*_{n-2i,n-2}, \ldots, \varepsilon^*_{n-2i,n-2i+2}; \varepsilon^*_{n-2i+1,n-1}, \varepsilon^*_{n-2i+1,n-2}, \ldots, \varepsilon^*_{n-2i+1,n-2i+2}), \quad 1 < i < m,$$

$$K_m = \text{гр}(\varepsilon^*_{1,n-1}, \varepsilon^*_{1,n-2}, \ldots, \varepsilon^*_{1,3}; \varepsilon^*_{2,n-1}, \varepsilon^*_{2,n-2}, \ldots, \varepsilon^*_{2,3}; \varepsilon^*_{3,n}, \varepsilon^*_{4,n}, \ldots, \varepsilon^*_{n-1,n}).$$

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$G_{n,j} = \text{гр}(K_m, K_{m-1}, \ldots, K_j), \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Очевидно, $G_{n,m} = K_m$, $G_{n,j-1} = \text{гр}(G_{n,j}, K_{j-1})$, $j = 2, 3, \ldots, m$, $G_{n,1} = G_n$.

Покажем вначале, что в группе $G_{n,1} = \text{гр}(G_{n,2}, K_1)$ подгруппа $G_{n,2}$ является нормальной. Для этого проверим, куда переходят порождающие группы $G_{n,2}$ при сопряжении порождающими группы $K_1 = \text{гр}(\varepsilon^*_{1,n}, \varepsilon^*_{2,n})$. Для порождающего $\varepsilon_{i,n}$, $i = 1, 2$, из леммы 1 имеем следующие формулы сопряжения

$$\varepsilon_{in}^{-\nu} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{in}^{\nu} = \varepsilon_{kl}, \tag{38}$$

$$\varepsilon_{in}^{-\nu} \varepsilon_{kn} \varepsilon_{in}^{\nu} = \varepsilon_{kn}, \tag{39}$$

$$\varepsilon_{in}^{-\nu} \varepsilon_{ki} \varepsilon_{in}^{\nu} = \varepsilon_{kn}^{\nu} \varepsilon_{ki} \varepsilon_{kn}^{-\nu}, \tag{40}$$

$$\varepsilon_{in}^{-\nu} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{in}^{\nu} = \varepsilon_{kn}^{\nu} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kn}^{-\nu}, \tag{41}$$

$$\varepsilon_{in}^{-\nu} \varepsilon_{nk} \varepsilon_{in}^{\nu} = [\varepsilon_{kn}^{-\nu}, \varepsilon_{ik}] \varepsilon_{nk}. \tag{42}$$

Тогда группа $G_{n,2}$ порождается всеми порождающими группы Cb_n, за исключением ε^*_{1n}, ε^*_{2n}, — порождающих группы K_1 и $\varepsilon^*_{2i-1,2i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, — порождающих группы H_n. Рассмотрим порождающий ε_{1n}. Разобьем все порождающие группы G_{n2} в объединение следующих непересекающихся подмножеств

$$A_1 = \{\varepsilon^*_{kl} \in G_{n,2} \parallel 1 \le k < l \le n, \quad k, l \ne 1, n\},$$

$$A_2 = \{\varepsilon^*_{kn} \parallel 3 \le k \le n-1\},$$

$$A_3 = \{\varepsilon^*_{1k} \parallel 3 \le k \le n-1\}.$$

Тогда на порождающих из A_1 элемент ε_{1n} действует по формулам (38), на порождающих из A_2 по формулам (39) и (42). При этом порождающие ε_{kn}, ε_{1k}, стоящие в правой части формулы (42), лежат в подмножествах A_2 и A_3 соответственно, а потому правая часть равенства (42) лежит в группе $G_{n,2}$. На порождающих из A_3 элемент ε_{1n} действует по формулам (40) и (41). Порождающий ε_{kn}, стоящий в правых частях этих равенств, лежит в A_2, а потому, — и в группе $G_{n,2}$. Следовательно, мы показали, что при сопряжении элементом ε_{1n} подгруппа $G_{n,2}$ переходит в себя. Аналогичным образом устанавливается, что при сопряжении порождающим ε_{2n} подгруппа $G_{n,2}$ переходит в себя.

Рассмотрим порождающий ε_{ni}, $i=1,2$, и покажем, что $\varepsilon_{ni}^{-\nu}G_{n,2}\varepsilon_{ni}^{\nu}\subseteq G_{n,2}$. Ввиду леммы 1 справедливы следующие формулы сопряжения:

$$\varepsilon_{ni}^{-\nu}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ni}^{\nu}=\varepsilon_{kl}, \tag{43}$$

$$\varepsilon_{ni}^{-\nu}\varepsilon_{ki}\varepsilon_{ni}^{\nu}=\varepsilon_{ki}, \tag{44}$$

$$\varepsilon_{ni}^{-\nu}\varepsilon_{kn}\varepsilon_{ni}^{\nu}=\varepsilon_{ki}^{\nu}\varepsilon_{kn}\varepsilon_{ki}^{-\nu}, \tag{45}$$

$$\varepsilon_{ni}^{-\nu}\varepsilon_{nk}\varepsilon_{ni}^{\nu}=\varepsilon_{ki}^{\nu}\varepsilon_{nk}\varepsilon_{ki}^{-\nu}, \tag{46}$$

$$\varepsilon_{ni}^{-\nu}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{ni}^{\nu}=[\varepsilon_{ki}^{-\nu},\varepsilon_{nk}]\varepsilon_{ik}. \tag{47}$$

Рассмотрим далее порождающий ε_{n1} (порождающий ε_{n2} рассматривается аналогично). Используем то же разбиение порождающих группы $G_{n,2}$, что и выше. Тогда на порождающих из A_1 элемент ε_{n1} действует по формулам (43), на порождающих из A_2 — по формулам (45)–(46). При этом порождающие ε_{k1}, входящие в правую часть, лежат в подмножестве A_3. На порождающих из A_3 элемент ε_{n1} действует по формулам (44), (47), а элементы ε_{k1} и ε_{nk}, входящие в правую часть равенства (47), лежат в подмножествах A_3 и A_2 соответственно, т. е. принадлежат группе $G_{n,2}$. Следовательно, $\varepsilon_{n1}^{-\nu}G_{n,2}\varepsilon_{n1}^{\nu}\subseteq G_{n,2}$. Таким образом, мы доказали, что подгруппа $G_{n,2}$ нормальна в группе $G_n=G_{n,1}$.

Покажем теперь, что подгруппа $G_{n,j}$, $3\leq i\leq m$, нормальна в группе $G_{n,j-1}=\text{гр}(G_{n,j},K_{j-1})$. Вспоминаем, что подгруппа K_{j-1} порождается следующими элементами

$$K_{j-1}=\text{гр}(\varepsilon^*_{n-2j+3,n-1},\varepsilon^*_{n-2j+3,n-2},\dots,\varepsilon^*_{n-2j+3,n-2j+4};\quad \varepsilon^*_{n-2j+2,n-1},\varepsilon^*_{n-2j+2,n-2},\dots,\varepsilon^*_{n-2j+2,n-2j+4}),$$

а группа

$$G_{n,j}=\text{гр}(\varepsilon^*_{kn},\quad k=3,4,\dots,n-1;\quad \varepsilon^*_{n-2i+1,n-1},\varepsilon^*_{n-2i+1,n-2},\dots,\varepsilon^*_{n-2i+1,n-2i+2};$$
$$\varepsilon^*_{n-2i,n-1},\varepsilon^*_{n-2i,n-2},\dots,\varepsilon^*_{n-2i+1,n-2i+2},\quad i=j,j+1,\dots,m).$$

Рассмотрим некоторый порождающий ε_{pq}, где $p\in\{n-2j+2,n-2j+3\}$, $\quad n-2j+4\leq q\leq n-1$. Из леммы 1 имеем следующие формулы сопряжения

$$\varepsilon_{pq}^{-\nu}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{pq}^{\nu}=\varepsilon_{kl}, \tag{48}$$

$$\varepsilon_{pq}^{-\nu}\varepsilon_{kq}\varepsilon_{pq}^{\nu}=\varepsilon_{kq}, \tag{49}$$

$$\varepsilon_{pq}^{-\nu}\varepsilon_{kp}\varepsilon_{pq}^{\nu}=\varepsilon_{kq}^{\nu}\varepsilon_{kp}\varepsilon_{kq}^{-\nu}, \tag{50}$$

$$\varepsilon_{pq}^{-\nu}\varepsilon_{pk}\varepsilon_{pq}^{\nu}=\varepsilon_{kq}^{\nu}\varepsilon_{pk}\varepsilon_{kq}^{-\nu}, \tag{51}$$

$$\varepsilon_{pq}^{-\nu}\varepsilon_{qk}\varepsilon_{pq}^{\nu}=[\varepsilon_{kq}^{-\nu},\varepsilon_{pk}]\varepsilon_{qk}. \tag{52}$$

Пусть для определенности $p=n-2j+2$ (случай $p=n-2j+3$ разбирается аналогично). Разобьем все порождающие группы $G_{n,j}$ в объединение следующих непересекающихся подмножеств

$$D^1_{pq} = \{\varepsilon^*_{kl} \in G_{nj} \mid 1 \le k < l \le n, \quad k,l \ne p,q\},$$

$$D^2_{pq} = \{\varepsilon^*_{kq} \mid 1 \le k < p\},$$

$$D^3_{pq} = \{\varepsilon^*_{kp} \mid 1 \le k < p\}.$$

Тогда порождающий ε_{pq} действует на элементах из множества D^1_{pq} по формулам (48); на элементах из множества D^2_{pq} по формулам (49) и (52). При этом порождающие ε_{kq} и ε_{pk}, стоящие в правой части равенства (52), лежат в подмножествах D^2_{pq} и D^3_{pq} соответственно. На порождающих из D^3_{pq} элемент ε_{pq} действует по формулам (50)–(51) и переводит их в элементы группы $G_{n,j}$. Следовательно, мы показали, что $\varepsilon^{-\nu}_{pq} G_{n,j} \varepsilon^{\nu}_{pq} \subseteq G_{n,j}$.

Рассмотрим теперь порождающий ε_{qp}, где $p \in \{n-2j+2, n-2j+3\}$, $\quad n-2j+4 \le q \le n-1$. Ввиду леммы 1 имеем следующие формулы сопряжения:

$$\varepsilon^{-\nu}_{qp} \varepsilon_{kl} \varepsilon^{\nu}_{qp} = \varepsilon_{kl}, \tag{53}$$

$$\varepsilon^{-\nu}_{qp} \varepsilon_{kp} \varepsilon^{\nu}_{qp} = \varepsilon_{kp}, \tag{54}$$

$$\varepsilon^{-\nu}_{qp} \varepsilon_{kq} \varepsilon^{\nu}_{qp} = \varepsilon^{\nu}_{kp} \varepsilon_{kq} \varepsilon^{-\nu}_{kp}, \tag{55}$$

$$\varepsilon^{-\nu}_{qp} \varepsilon_{qk} \varepsilon^{\nu}_{qp} = \varepsilon^{\nu}_{kp} \varepsilon_{qk} \varepsilon^{-\nu}_{kp}, \tag{56}$$

$$\varepsilon^{-\nu}_{qp} \varepsilon_{pk} \varepsilon^{\nu}_{qp} = [\varepsilon^{-\nu}_{kp}, \varepsilon_{qk}] \varepsilon_{pk}. \tag{57}$$

Разберем случай $p = n-2j+2$ (случай $p = n-2j+3$ разбирается аналогично). Видим, что элемент ε_{qp} действует на порождающих из D^1_{pq} по формулам (53), на порождающих из D^2_{pq} — по формулам (55)–(56). При этом порождающие ε_{kp}, входящие в правую часть, лежат в подмножестве D^3_{pq}. Наконец, на множестве D^3_{pq} элемент ε_{qp} действует по формулам (54) и (57), а элементы ε_{kp} и ε_{qk}, входящие в правую часть равенства (57), лежат в подмножествах D^3_{pq} и D^2_{pq} соответственно.

Таким образом, мы показали, что подгруппа G_{nj} нормальна в группе $G_{n,j-1}$. Из генетического кода группы $G_{n,j-1}$ видим, что $G_{nj} \bigcap K_{j-1} = 1$. Следовательно, $G_{n,j-1} = G_{nj} \leftthreetimes K_{j-1}$. Используя индукцию по m, получим требуемое разложение группы G_n. Теорема доказана.

Разберем теперь случай четного n. Справедлива

Теорема 4. *В случае четного $n = 2m$, $m = 2, 3, \ldots$, группа G_n разлагается в полупрямое произведение*

$$G_n = (\ldots((L_m \leftthreetimes L_{m-1}) \leftthreetimes L_{m-2}) \leftthreetimes \ldots) \leftthreetimes L_2,$$

где

$$L_i = \text{гр}(\varepsilon^*_{n-2i+1,n}, \varepsilon^*_{n-2i+1,n-1}, \ldots \varepsilon^*_{n-2i+1,n-2i+3}; \quad \varepsilon^*_{n-2i+2,n}, \varepsilon^*_{n-2i+2,n-1}, \ldots \varepsilon^*_{n-2i+2,n-2i+3}), \quad 2 \le i \le m.$$

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$G_{n,j} = \text{гр}(L_m, K_{m-1}, \ldots, L_j), \quad j = 2, 3, \ldots, m.$$

Так же, как и в теореме 3 проверяется, что подгруппа G_{nj} нормальна в группе $G_{n,j-1}$, а из генетического кода группы $G_{n,j-1}$ следует, что $G_{nj} \bigcap L_{j-1} = 1$. Следовательно, $G_{n,j-1} = G_{nj} \leftthreetimes L_{j-1}$. Используя индукцию по m, получим требуемое разложение группы G_n. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Z. Djokovic, The structure of the automorphism group of a free group on two generators, Proc. Amer. Math. Soc., 88, №2 (1983), 218–220.

2. Г. Т. Козлов, Строение группы $\mathrm{Aut}(F_2)$, Алгебра, логика и приложения, Иркутск, Иркутский гос. ун–т, 1994, 28–32.

3. Р. Линдон, П. Шупп, Комбинаторная теория групп, М.: Мир, 1980.

4. S. Krstic, J. McCool, The non-finite presentability of $\mathrm{IA}(F_3)$ and $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$, Inven. Math., 129, №3 (1997), 595–606.

5. J. McCool, On basis–conjugating automorphisms of free groups, Can. J. Math., 38, №6 (1986), 1525–1529.

6. А. Г. Савушкина, О группе сопрягающих автоморфизмов свободной группы, Матем. заметки, 60, №1 (1996), 92–108.

7. А. А. Марков, Основы алгебраической теории кос, Тр. МИАН, 1945, 16, 1–54.

8. J. S. Birman, Braids, links and mapping class group, Princeton–Tokyo: Univ. press, 1974.

9. D. J. Collins, N. D. Gilbert, Structure and torsion in automorphism groups of free products, Quart. J. Math. Oxford, 41, №162 (1990), 155–178.

10. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп, 14-е изд., Новосибирск, Ин–т матем. СО РАН, 1999.

11. М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, Основы теории групп, 4–е изд., М.: Наука, 1996.

12. H. Servatius, Automorphisms of graph groups, J. Algebra, 126, №1 (1989), 34–60.

13. H. Servatius, C. Droms, B. Servatius, Surface subgroups of graph groups, Proc. Amer. Math. Soc., 106, №3 (1989), 573–578.

14. В. Г. Бардаков. Ширина вербальных подгрупп некоторых групп Артина, Групповые и метрические свойства отображений: Сборник работ, посвящённых памяти Ю. И. Мерзлякова, НГУ, Новосибирск, 1995, 8–18.

15. Г. С. Коксетер, У. О. Мозер, Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп, М.: Наука, 1980.

16. Ю. И. Мерзляков, Рациональные группы, 2–е изд., М.: Наука, 1987.

17. В. Г. Бардаков, О ширине вербальных подгрупп некоторых свободных конструкций, Алгебра и логика, 36, №5 (1997), 494–517.

18. A. H. Rhemtulla, A problem of bounded expressibility in free products, Proc. Cambridge Phil. Soc., 64, №3 (1969), 573–584.

19. В. Г. Бардаков, К теории групп кос, Матем. сб., 183, №6 (1992), 3–42.

РОССИЯ,
Бардаков Валерий Георгиевич,
630090, г. Новосибирск, 90,
пр. Ак. Коптюга, д. 4,
ИМ СО РАН,
E–mail: bardakov@math.nsc.ru.