УДК 517.946

В. Г. Бардаков

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ПРАВОЙ ЧАСТИ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ [1]

На евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (x, y) рассмотрим замкнутую ограниченную область M с гладкой границей ∂M и метрикой g вида

$$\mathrm{d}s^2 = e^{2\mu(x,y)}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2), \qquad \mu = \mu(x,y) \in C^\infty(M). \tag{1}$$

Будем рассматривать координаты (x, y, θ) на касательном расслоении единичных векторов

$$\Omega M = \{(x, y; e^{-\mu}\cos\theta, e^{-\mu}\sin\theta) | (x,y) \in M, 0 \le \theta \le \pi\}.$$

В предлагаемой работе исследуется

Обратная задача. Найти функции $u = u(x, y, \theta) \in C^4(\Omega M)$, $f_i = f_i(x, y) \in C^3(M)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, удовлетворяющие уравнению

$$\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial y} + (\mu_y\cos\theta - \mu_x\sin\theta)\frac{\partial u}{\partial\theta} = f_0 + f_1\cos\theta + f_2\sin\theta + f_3\cos 2\theta + f_4\sin 2\theta, \tag{2}$$

и граничным условиям

$$u|_{\partial M} = u_0(x, y, \theta), \quad (x, y) \in \partial M,$$

где $u_0(x, y, \theta) \in C^4(\Omega M)$ — заданная функция. При этом функции $f_i = f_i(x, y)$, входящие в правую часть, определены в области M и не зависят от θ.

В случае, когда правая часть уравнения (2) не зависит от θ, сформулированная задача возникает в интегральной геометрии [1]. При $f_3 \equiv f_4 \equiv 0$ она рассматривалась в [2, гл. 2, § 2]. В случае $f_1 \equiv f_2 \equiv 0$ — рассматривалась в [3] и связана с задачей восстановления симметрического тензорного поля на римановом многообразии.

Кроме того, эту задачу можно рассматривать как обратную задачу определения индикатрисы рассеяния в плоской теории переноса. Действительно, в уравнении переноса [4, 5] интеграл столкновений имеет вид

$$\int\limits_0^{2\pi} J(x, y, \theta, \theta')u(x, y, \theta')\mathrm{d}\theta',$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 02–01–00255); интеграционного гранта СО РАН (код проекта 2003–2); гранта “Университеты России” (код проекта УР.1.24.00Ф).

где θ' — угол под которым частица двигалась до столкновения, а θ — угол после столкновения. Если, из каких–то соображений, нам известно, что индикатриса рассеяния J имеет такой вид

$$J(x,y,\theta,\theta') = \sum_{k=0}^{2} (J'_k(x,y)\cos(k\theta)\cos(k\theta') + J''_k(x,y)\sin(k\theta)\sin(k\theta')),$$

где функции $J'_k = J'_k(x,y)$, $J''_k = J''_k(x,y)$ подлежат восстановлению, то интеграл столкновений примет следующий вид

$$\int_0^{2\pi} J(x,y,\theta,\theta')u(x,y,\theta')\mathrm{d}\theta' = J'_0\int_0^{2\pi} u(x,y,\theta')\mathrm{d}\theta' + \cos\theta J'_1\int_0^{2\pi} u(x,y,\theta')\cos\theta'\mathrm{d}\theta' +$$

$$+\sin\theta J''_1\int_0^{2\pi} u(x,y,\theta')\sin\theta'\mathrm{d}\theta' + \cos 2\theta J'_2\int_0^{2\pi} u(x,y,\theta')\cos 2\theta'\mathrm{d}\theta' + \sin 2\theta J''_2\int_0^{2\pi} u(x,y,\theta')\sin 2\theta'\mathrm{d}\theta'.$$

Обозначая

$$f_0 = J'_0\int_0^{2\pi} u(x,y,\theta')\mathrm{d}\theta', \quad f_1 = J'_1\int_0^{2\pi} u(x,y,\theta')\cos\theta'\mathrm{d}\theta', \quad f_2 = J''_1\int_0^{2\pi} u(x,y,\theta')\sin\theta'\mathrm{d}\theta',$$

$$f_3 = J'_2\int_0^{2\pi} u(x,y,\theta')\cos 2\theta'\mathrm{d}\theta', \quad f_4 = J''_2\int_0^{2\pi} u(x,y,\theta')\sin 2\theta'\mathrm{d}\theta',$$

видим, что интеграл столкновений имеет тот же вид, что и правая часть уравнения (2), т. е обратная задача определения индикатрисы рассеяния сводится к сформулированной нами обратной задаче.

Также сформулированную обратную задачу можно рассматривать как частный случай задачи восстановления правой части кинетического уравнения по известному следу на границе некоторой области (см., например, [1,6,7]). Обзор по обратным задачам для различных кинетических уравнений можно найти в [1,8].

Оказывается, что в рассматриваемой обратной задаче удается полностью описать множество неоднозначности решения. При этом функции u, f_i в (2) однозначно определяются выбором трех дифференцируемых функций.

Справедлива

Теорема 1. *Для произвольных функций $c = c(x,y)$, $d = d(x,y)$, $f = f(x,y)$, из класса $C^1(M)$, обращающихся в нуль на границе ∂M, функция $u(x,y,\theta) = c\cos\theta + d\sin\theta + f$ удовлетворяет* *уравнению (2) и нулевым граничным условиям:* $u|_{\partial M} = 0$, *при правой части уравнения (2) определенной равенствами*

$$\begin{cases} f_0 = \dfrac{1}{2}(c_x + d_y + c\mu_x + d\mu_y), \\ f_1 = f_x, \\ f_2 = f_y, \\ f_3 = \dfrac{1}{2}(c_x - d_y - c\mu_x + d\mu_y), \\ f_4 = \dfrac{1}{2}(c_y + d_x - c\mu_y - d\mu_x). \end{cases}$$

Доказательство сводится к непосредственной проверке.

В связи с этой теоремой возникает естественный вопрос: справедливо ли утверждение, обратное к теореме 1? Оказывается, что при некоторых ограничениях на риманово многообразие (M, g) ответ на этот вопрос положительный.

Напомним (см., например, [3, § 4.4]), что двумерное риманово многообразие (M, g) *не имеет фокальных точек*, если для всякой геодезической $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ и всякого поля Якоби $Y(t)$ вдоль γ, удовлетворяющего начальному условию $Y(a) = 0$, модуль $| \; Y(t) \; |$ строго возрастает на $[a, b]$, т. е.

$$\frac{\mathrm{d} \mid Y(t) \mid^2}{\mathrm{d}t} > 0, \quad t \in [a, b].$$

Если риманово многообразие не имеет фокальных точек, то оно не имеет сопряженных точек. Следовательно, если M — двумерное риманово многообразие со строго выпуклой границей и без фокальных точек, то оно диффеоморфно диску D^2. Тогда на таком многообразии существует глобальная система изотермических координат. Это означает, что мы можем рассматривать M как замкнутую ограниченную область в плоскости, $M \subseteq \mathbb{R}^2$ с гладкой границей и метрикой g вида (1).

Теперь мы можем сформулировать основной результат настоящей работы.

Теорема 2. *Пусть M — замкнутая ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с гладкой строго выпуклой границей и метрикой g вида $ds^2 = e^{2\mu(x,y)}(dx^2 + dy^2)$ такой, что риманово многообразие (M, g) не имеет фокальных точек. Если функции u, f_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, являются решением обратной задачи с нулевыми граничными условиями: $u|_{\partial M} = 0$, то найдутся функции $c = c(x, y)$, $d = d(x, y)$, $f = f(x, y)$, из класса $C^4(M)$, обращающиеся в нуль на границе ∂M, такие, что*

$$u(x, y, \theta) = c\cos\theta + d\sin\theta + f, \quad f_0 = \frac{1}{2}(c_x + d_y + c\mu_x + d\mu_y), \quad f_1 = f_x, \quad f_2 = f_y,$$

$$f_3 = \frac{1}{2}(c_x - d_y - c\mu_x + d\mu_y), \quad f_4 = \frac{1}{2}(c_y + d_x - c\mu_y - d\mu_x).$$

Прежде чем доказывать эту теорему, введем необходимые обозначения и докажем ряд вспомогательных лемм.

Для непрерывно–дифференцируемой функции $\varphi = \varphi(x, y, \theta)$ положим

$$L\varphi = \cos\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - f_1\right) + \sin\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - f_2\right) + (\mu_y\cos\theta - \mu_x\sin\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}.$$

Заметим, что это выражение можно записать в таком виде

$$L\varphi = \cos\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (\mu_y - a\sin\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - f_1\right) + \sin\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (-\mu_x + a\cos\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - f_2\right),$$

где $a = a(x, y, \theta)$ — произвольная гладкая функция. Также определим

$$L^\perp\varphi = -\sin\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - f_1\right) + \cos\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - f_2\right) - (\mu_x\cos\theta + \mu_y\sin\theta - a)\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} =$$

$$= -\sin\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (\mu_y - a\sin\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - f_1\right) + \cos\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (-\mu_x + a\cos\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - f_2\right).$$

Лемма 1. *Для любой достаточно гладкой функции $\varphi = \varphi(x, y, \theta)$ имеет место тождество*

$$2L^\perp\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(L\varphi) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi_y\varphi_\theta + (-\mu_x + a\cos\theta)\varphi_\theta^2\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi_x\varphi_\theta + (\mu_y - a\sin\theta)\varphi_\theta^2\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[L^\perp\varphi\cdot L\varphi + (\mu_x - a\cos\theta)(\varphi_x - f_1)\varphi_\theta + (\mu_y - a\sin\theta)(\varphi_y - f_2)\varphi_\theta - f_2\varphi_x + f_1\varphi_y\right] +$$

$$+\left[(\varphi_x - f_1) + (\mu_y - a\sin\theta)\varphi_\theta\right]^2 + \left[(\varphi_y - f_2) + (-\mu_x + a\cos\theta)\varphi_\theta\right]^2 - e^{2\mu}\left[H(e^{-\mu}a) + e^{-2\mu}a^2 + K\right]\varphi_\theta^2,$$

где $K = -e^{-2\mu}\triangle\mu$ — гауссова кривизна метрики (1), а оператор $H : C^\infty(\Omega M) \longrightarrow C^\infty(\Omega M)$ определяется равенством

$$H = e^{-\mu}\left[\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y} + (-\mu_x\sin\theta + \mu_y\cos\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right].$$

Доказательство. Введем следующие обозначения

$$\alpha = \varphi_x - f_1 + (\mu_y - a\sin\theta)\varphi_\theta, \quad \beta = \varphi_y - f_2 + (-\mu_x + a\cos\theta)\varphi_\theta$$

и заметим, что справедливы равенства

$$\alpha_\theta = \varphi_{x\theta} + (\mu_y - a\sin\theta)\varphi_{\theta\theta} - (a_\theta\sin\theta + a\cos\theta)\varphi_\theta, \quad \beta_\theta = \varphi_{y\theta} + (-\mu_x + a\cos\theta)\varphi_{\theta\theta} + (a_\theta\cos\theta - a\sin\theta)\varphi_\theta$$

$$\alpha_y = \varphi_{xy} - (f_1)_y + (\mu_{yy} - a_y\sin\theta)\varphi_\theta + (\mu_y - a\sin\theta)\varphi_{\theta y},$$

$$\beta_x = \varphi_{yx} - (f_2)_x + (-\mu_{xx} + a_x \cos\theta)\varphi_\theta + (-\mu_x + a\cos\theta)\varphi_{\theta x}.$$

Тогда наше тождество примет вид

$$2(-\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta) = \frac{\partial}{\partial x}\left[(\beta + f_2)\varphi_\theta\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[(\alpha + f_1)\varphi_\theta\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(-\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta) +\right.$$

$$\left.+(\mu_x - a\cos\theta)(\varphi_x - f_1)\varphi_\theta + (\mu_y - a\sin\theta)(\varphi_y - f_2)\varphi_\theta - f_2\varphi_x + f_1\varphi_y\right] + \alpha^2 + \beta^2 -$$

$$-\left[(-\mu_x a + a_x + \mu_y a_\theta)\cos\theta + (-\mu_y a + a_y - \mu_x a_\theta)\sin\theta + a^2 - \Delta\mu\right]\varphi_\theta^2.$$

Перепишем его в таком виде

$$(-\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta) -$$

$$-(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}(-\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta) = \frac{\partial}{\partial x}\left[(\beta + f_2)\varphi_\theta\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[(\alpha + f_1)\varphi_\theta\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(\mu_x - a\cos\theta)(\varphi_x - f_1)\varphi_\theta + (\mu_y - a\sin\theta)(\varphi_y - f_2)\varphi_\theta - f_2\varphi_x + f_1\varphi_y\right] + \alpha^1 + \beta^2 -$$

$$-\left[(-\mu_x a + a_x + \mu_y a_\theta)\cos\theta + (-\mu_y a + a_y - \mu_x a_\theta)\sin\theta + a^2 - \Delta\mu\right]\varphi_\theta^2.$$

Выполняя дифференцирование, получим

$$(-\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)(\alpha_\theta\cos\theta - \alpha\sin\theta + \beta_\theta\sin\theta + \beta\cos\theta) -$$

$$-(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta)(-\alpha_\theta\sin\theta - \alpha\cos\theta + \beta_\theta\cos\theta - \beta\sin\theta) =$$

$$\beta_x\varphi_\theta + \beta\varphi_{\theta x} + (f_2)_x\varphi_\theta + f_0\varphi_{\theta x} - \alpha_y\varphi_\theta - \alpha\varphi_{\theta y} - (f_1)_y\varphi_\theta - f_1\varphi_{\theta y} +$$

$$+(-a_\theta\cos\theta + a\sin\theta)(\varphi_x - f_1)\varphi_\theta + (\mu_x - a\cos\theta)\varphi_{x\theta}\varphi_\theta + (\mu_x - a\cos\theta)(\varphi_x - f_1)\varphi_{\theta\theta} +$$

$$+(-a_\theta\sin\theta - a\cos\theta)(\varphi_y - f_2)\varphi_\theta + (\mu_y - a\sin\theta)\varphi_{y\theta}\varphi_\theta + (\mu_y - a\sin\theta)(\varphi_y - f_2)\varphi_{\theta\theta} - f_2\varphi_{x\theta} + f_1\varphi_{y\theta} + \alpha^2 + \beta^2 -$$

$$-\left[(-\mu_x a + a_x + \mu_y a_\theta)\cos\theta + (-\mu_y a + a_y - \mu_x a_\theta)\sin\theta + a^2 - \Delta\mu\right]\varphi_\theta^2.$$

После приведения подобных

$$(-\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)(\alpha_\theta\cos\theta + \beta_\theta\sin\theta) - (\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta)(-\alpha_\theta\sin\theta + \beta_\theta\cos\theta) =$$

$$\beta\varphi_{\theta x} - \alpha\varphi_{\theta y} + (\beta_x - \alpha_y)\varphi_\theta + \left[(\mu_x - a\cos\theta)(\varphi_x - f_1) + (\mu_y - a\sin\theta)(\varphi_y - f_2)\right]\varphi_{\theta\theta} +$$

$$+\left[(-a_\theta\cos\theta + a\sin\theta)(\varphi_x - f_1) + (\mu_x - a\cos\theta)\varphi_{x\theta} +\right.$$

$$\left.(-a_\theta\sin\theta - a\cos\theta)(\varphi_y - f_2) + (\mu_y - a\sin\theta)\varphi_{y\theta} + (f_2)_x - (f_1)_y\right]\varphi_\theta -$$

$$- \left[(-\mu_x a + a_x + \mu_y a_\theta)\cos\theta + (-\mu_y a + a_y - \mu_x a_\theta)\sin\theta + a^2 - \Delta\mu\right]\varphi_\theta^2.$$

Вычисляя выражение, стоящее в левой части,

$$\alpha_\theta\beta - \beta_\theta\alpha = \beta\varphi_{\theta x} - \alpha\varphi_{\theta y} + (\beta_x - \alpha_y)\varphi_\theta + [(\mu_x - a\cos\theta)(\varphi_x - f_1) + (\mu_y - a\sin\theta)(\varphi_y - f_2)]\,\varphi_{\theta\theta} +$$

$$+ [(-a_\theta\cos\theta + a\sin\theta)(\varphi_x - f_1) + (\mu_x - a\cos\theta)\varphi_{x\theta} +$$

$$(-a_\theta\sin\theta - a\cos\theta)(\varphi_y - f_2) + (\mu_y - a\sin\theta)\varphi_{y\theta} + (f_2)_x - (f_1)_y]\,\varphi_\theta -$$

$$- \left[(-\mu_x a + a_x + \mu_y a_\theta)\cos\theta + (-\mu_y a + a_y - \mu_x a_\theta)\sin\theta + a^2 - \Delta\mu\right]\varphi_\theta^2.$$

Подставив выражения для α и β, а также для их производных, получим

$$[\varphi_{x\theta} + (\mu_y - a\sin\theta)\varphi_{\theta\theta} - (a_\theta\sin\theta + a\cos\theta)\varphi_\theta]\,[\varphi_y - f_2 + (-\mu_x + a\cos\theta)\varphi_\theta] -$$

$$- [\varphi_{y\theta} + (-\mu_x + a\cos\theta)\varphi_{\theta\theta} + (a_\theta\cos\theta - a\sin\theta)\varphi_\theta]\,[\varphi_x - f_2 + (\mu_y - a\sin\theta)\varphi_\theta] =$$

$$= [\varphi_y - f_2 + (-\mu_x + a\cos\theta)\varphi_\theta]\,\varphi_{\theta x} - [\varphi_x - f_1 + (\mu_y - a\sin\theta)\varphi_\theta]\,\varphi_{\theta y} +$$

$$+ [(\mu_x - a\cos\theta)(\varphi_x - f_1) + (\mu_y - a\sin\theta)(\varphi_y - f_2)]\,\varphi_{\theta\theta} +$$

$$+ [\varphi_{yx} - (f_2)_x + (-\mu_{xx} + a_x\cos\theta)\varphi_\theta + (-\mu_x + a\cos\theta)\varphi_{\theta x} - \varphi_{xy} + (f_1)_y -$$

$$-(\mu_{yy} - a_y\sin\theta)\varphi_\theta - (\mu_y - a\sin\theta)\varphi_{\theta y} +$$

$$+(-a_\theta\cos\theta + a\sin\theta)(\varphi_x - f_1) + (\mu_x - a\cos\theta)\varphi_{x\theta} -$$

$$- (a_\theta\sin\theta - a\cos\theta)(\varphi_y - f_2) + (\mu_y - a\sin\theta)\varphi_{y\theta} + (f_2)_x - (f_1)_y]\,\varphi_\theta -$$

$$- \left[(-\mu_x a + a_x + \mu_y a_\theta)\cos\theta + (-\mu_y a + a_y - \mu_x a_\theta)\sin\theta + a^2 - \Delta\mu\right]\varphi_\theta^2.$$

После перегруппировки некоторых слагаемых и очевидных сокращений, приходим к равенству

$$[\varphi_{x\theta} + (\mu_y - a\sin\theta)\varphi_{\theta\theta} - (a_\theta\sin\theta + a\cos\theta)\varphi_\theta]\,[\varphi_y - f_6 + (-\mu_x + a\cos\theta)\varphi_\theta] -$$

$$[\varphi_{y\theta} + (-\mu_x + a\cos\theta)\varphi_{\theta\theta} + (a_\theta\cos\theta - a\sin\theta)\varphi_\theta]\,[\varphi_x - f_1 + (\mu_y - a\sin\theta)\varphi_\theta] =$$

$$= [\varphi_y - f_9 + (-\mu_x + a\cos\theta)\varphi_\theta]\,\varphi_{\theta x} - [\varphi_x - f_1 + (\mu_y - a\sin\theta)\varphi_\theta]\,\varphi_{\theta y} +$$

$$[(\mu_x - a\cos\theta)(\varphi_x - f_1) + (\mu_y - a\sin\theta)(\varphi_y - f_2)]\,\varphi_{\theta\theta} +$$

$$[(-a_\theta\cos\theta + a\sin\theta)(\varphi_x - f_6) - (a_\theta\sin\theta - a\cos\theta)(\varphi_y - f_2)]\,\varphi_\theta -$$

$$- \left[(-\mu_x a + \mu_y a_\theta)\cos\theta + (-\mu_y a - \mu_x a_\theta)\sin\theta + a^9\right]\varphi_\theta^2.$$

Группируя члены, содержащие одинаковые вторые производные, получим

$$[\varphi_y - f_2 + (-\mu_x + a\cos\theta)\varphi_\theta]\,\varphi_{x\theta} - [\varphi_x - f_1 + (\mu_y - a\sin\theta)\varphi_\theta]\,\varphi_{y\theta} +$$

$$[(\mu_y - a\sin\theta)(\varphi_y - f_2 + (-\mu_x + a\cos\theta)\varphi_\theta) - (-\mu_x + a\cos\theta)(\varphi_x - f_1 + (\mu_y - a\sin\theta)\varphi_\theta)]\,\varphi_{\theta\theta} +$$

$$[-(a_\theta \sin\theta + a\cos\theta)(\varphi_y - f_2) - (a_\theta\cos\theta - a\sin\theta)(\varphi_x - f_1)]\,\varphi_\theta +$$
$$[-(a_\theta \sin\theta + a\cos\theta)(-\mu_x + a\cos\theta) - (a_\theta\cos\theta - a\sin\theta)(\mu_y - a\sin\theta)]\,\varphi_\theta^7 =$$
$$= [\varphi_y - f_2 + (-\mu_x + a\cos\theta)\varphi_\theta]\,\varphi_{\theta x} -$$
$$[\varphi_x - f_1 + (\mu_y - a\sin\theta)\varphi_\theta]\,\varphi_{\theta y} +$$
$$[(\mu_x - a\cos\theta)(\varphi_x - f_1) + (\mu_y - a\sin\theta)(\varphi_y - f_2)]\,\varphi_{\theta\theta} +$$
$$[(-a_\theta\cos\theta + a\sin\theta)(\varphi_x - f_1) - (a_\theta\sin\theta - a\cos\theta)(\varphi_y - f_2)]\,\varphi_\theta -$$
$$-\left[(-\mu_x a + \mu_y a_\theta)\cos\theta + (-\mu_y a - \mu_x a_\theta)\sin\theta + a^2\right]\varphi_\theta^2.$$

Приводя подобные, имеем

$$[-(a_\theta \sin\theta + a\cos\theta)(-\mu_x + a\cos\theta) - (a_\theta\cos\theta - a\sin\theta)(\mu_y - a\sin\theta)]\,\varphi_\theta^2 =$$
$$= -\left[(-\mu_x a + \mu_y a_\theta)\cos\theta + (-\mu_y a - \mu_x a_\theta)\sin\theta + a^6\right]\varphi_\theta^2.$$

Легко проверить, что это равенство справедливо. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если функция $u \in C^4(\Omega M)$ удовлетворяет уравнению*

$$Lu = f_0 + f_3\cos 2\theta + f_4 \sin 2\theta, \tag{3}$$

где $f_i = f_i(x,y)$, то функция

$$w = r_{\theta\theta} + u$$

удовлетворяет уравнению

$$-4(L^\perp w - \frac{1}{2}a w_\theta)^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left[w_y w_\theta + (-\mu_x + a\cos\theta)w_\theta^2\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[w_x w_\theta + (\mu_y - a\sin\theta)w_\theta^2\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[L^\perp w\cdot Lw + (\mu_x - a\cos\theta)(w_x - f_8)w_\theta + (\mu_y - a\sin\theta)(\varphi_y - f_2)w_\theta - f_2 w_x + f_1 w_y\right] +$$

$$+[(w_x - f_1) + (\mu_y - a\sin\theta)w_\theta]^2 + [(w_y - f_2) + (-\mu_x + a\cos\theta)w_\theta]^2 - e^{0\mu}\left[H(e^{-\mu}a) + 2e^{-9\mu}a^4 + K\right]w_\theta^2.$$

Доказательство. Непосредственной проверкой легко убедиться в справедливости следующих равенств

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(L\varphi) - L\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = L^\perp\varphi - a\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + f_1\cos\theta + f_2\sin\theta, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(L^\perp\varphi) - L^\perp\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -L\varphi + a_\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - f_1\sin\theta + f_2\cos\theta, \tag{5}$$

где $\varphi = \varphi(x,y,\theta)$ — достаточно гладкая функция.

Продифференцируем обе части уравнения (3) по θ и, применяя формулу (4), получим

$$Lu_\theta + L^\perp u - a u_\theta + f_1\cos\theta + f_2\sin\theta = 2(-f_3\sin 2\theta + f_4\cos 2\theta). \tag{6}$$

Опять продифференцируем обе части этого равенства по θ и, применяя формулы (4)–(5), получим

$$Lu_{\theta\theta} - 2au_{\theta\theta} + 2L^{\perp}u_{\theta} - Lu + f_1\cos\theta + f_2\sin\theta - 2f_1\sin\theta + 2a_2\cos\theta = -0(f_3\cos 2\theta + f_4\sin 2\theta).$$

Умножим обе части исходного уравнения (1) на 2 и, прибавляя к последнему уравнению, получим

$$Lu_{\theta\theta} + Lu - 6au_{\theta\theta} + 2L^{\perp}u_{\theta} + (f_1 + 2f_2)\cos\theta + (f_2 - 2f_1)\sin\theta = 2(f_0 - f_3\cos 5\theta - f_4\sin 2\theta). \quad (7)$$

Используя равенство

$$Lw = F(u_{\theta\theta} + u) = Lu_{\theta\theta} + Lu + f_9\cos\theta + f_2\sin\theta,$$

перепишем равенство (7) в таком виде

$$Lw + 2(-au_{\theta\theta} + L^{\perp}u_{\theta} - f_1\sin\theta + f_2\cos\theta) = 2(f_0 - f_3\cos 0\theta - f_4\sin 2\theta).$$

Отсюда

$$Lw = -2L^{\perp}u_{\theta} + 8au_{\theta\theta} + F, \quad F = 6(f_0 + f_1\sin\theta - f_2\cos\theta - f_3\cos 2\theta - f_4\sin 2\theta).$$

Дифференцируя это равенство по θ и, применяя равенство (5), получим

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(Lw) = 2\left(-L^{\perp}u_{\theta\theta} + Lu_{\theta} + au_{\theta\theta\theta} + f_1\sin\theta - f_2\cos\theta\right) + F_{\theta}.$$

Из формулы (6):

$$Lu_{\theta} = -L^{\perp}u + au_{\theta} - f_1\cos\theta - f_9\sin\theta + 2(-f_2\sin 2\theta + f_4\cos 2\theta).$$

Вводя это выражение в предыдущее равенство, получим

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(Lw) = -2(L^{\perp}u_{\theta\theta} + L^{\perp}u) + 2a(u_{\theta\theta\theta} + u_{\theta}) + 6(f_1\sin\theta - f_2\cos\theta).$$

Отсюда, ввиду равенства

$$L^{\perp}w = L^{\perp}(u_{\theta\theta} + u) = L^{\perp}u_{\theta\theta} + L^{\perp}u - f_1\sin\theta + f_2\cos\theta,$$

имеем

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(Lw) = -2L^{\perp}a + 2aw_{\theta}.$$

Умножая обе части этого равенства на $2L^{\perp}w$, получим

$$2L^{\perp}w \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}(Lw) = -4(L^{\perp}w - \frac{1}{2}aw_{\theta})^2 + a^2w_{\theta}^2.$$

Отсюда ввиду леммы 1 и следует требуемое утверждение.

Отметим, что в случае $f_1 \equiv f_2 \equiv 0$ леммы, аналогичные леммам 1 и 2 установлены в [3, лемма 4.4.2, лемма 4.4.3].

Также нам потребуется

Лемма 3 [3, лемма 4.4.4.]. *В предположениях теоремы существует функция $b \in C^{\infty}(\Omega M)$ удовлетворяющая неравенству*

$$Hb + 2b^2 + K \leq 0. \tag{8}$$

Доказательство теоремы. Положим $a = e^{\mu}b$, где b — функция из леммы 3. Выпишем уравнение из леммы 2 для функции $w = u_{\theta\theta} + u$ и проинтегрируем по ΩM. Так как функции $w(x, y, \theta)$ и $a(x, y, \theta)$ являются 2π–периодическими по θ, и функция $w(x, y, \theta)$ обращается в 0 для $(x, y) \in \partial M$, то интегралы от дивергентных слагаемых обратятся в 0 и мы получим равенство

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_M \left[(w_x - f_1 + (\mu_y - a\sin\theta)w_{\theta})^2 + (w_y - f_2 + (-\mu_x + a\cos\theta)w_{\theta})^2 + 4\left(L^{\perp}w - \frac{1}{2}aw_{\theta}\right)^2\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}\theta =$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_M e^{2\mu}\left(Hb + 2b^2 + K\right) w_{\theta}^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}\theta.$$

По лемме 3 правая часть этого равенства неположительна. Так как интеграл от левой части неотрицателен, то мы имеем систему

$$\begin{cases} w_x - f_1 + (\mu_y - a\sin\theta)w_{\theta} = 0, \\ w_y - f_2 + (-\mu_x + a\cos\theta)w_{\theta} = 0, \\ L^{\perp}w - \dfrac{1}{2}aw_{\theta} = 0. \end{cases}$$

Так как $L^{\perp}w = -[w_x + \mu_y w_{\theta} - f_1]\sin\theta + [w_y - \mu_x w_{\theta} - f_2]\cos\theta + aw_{\theta}$, то, учитывая первые два уравнения, из третьего уравнения этой системы получим равенство $aw_{\theta} = 0$. Так как $a \neq 0$, то $w_{\theta} = 0$, т. е. w не зависит от θ. Положим $w = f(x, y)$. Тогда из определения функции w имеем уравнение

$$u_{\theta\theta} + u = f(x, y).$$

Легко проверить, что общее решение этого уравнения имеет вид

$$u(x, y, \theta) = c(x, y)\cos\theta + d(x, y)\sin\theta + f(x, y).$$

Подставляя ее в исходное уравнение, получим систему

$$\begin{cases} f_0 = \dfrac{1}{2}(c_x + d_y + c\mu_x + d\mu_y), \\ f_1 = f_x, \\ f_2 = f_y, \\ f_3 = \dfrac{1}{2}(c_x - d_y - c\mu_x + d\mu_y), \\ f_4 = \dfrac{1}{2}(c_y + d_x - c\mu_y - d\mu_x). \end{cases}$$

В заключении автор благодарит Ю. Е. Аниконова за постановку задачи и поддержку в работе, а также Л. Б. Вертгейма и М. В. Нещадима, прочитавших рукопись и внесших ряд полезных предложений.

Литература

1. Аниконов Ю. Е., Пестов Л. Н. Формулы в линейных и нелинейных задачах томографии, Новосибирск: изд–во НГУ, 1990.

2. Аниконов Ю. Е., Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений, Новосибирск: Наука, 1978.

3. Sharafutdinov V. A. Ray transform on Riemannian manifolds, University of Oulu, 1999. Доступно по http://koivu.oulu.fi/ morispaa/lectures.htm

4. Кейз К, Цвайфель П., Линейная теория переноса, М.: Мир, 1972.

5. Владимиров В. С., Математические задачи односкоростной теории переноса частиц, Труды Матем. ин–та АН СССР, 61, 1961.

6. Аниконов Ю. Е., Амиров А. Х., Теорема единственности решения обратной задачи для кинетического уравнения // ДАН СССР. 1983. Т. 272. №6. С. 1292–1293.

7. Bardakov V. G., Uniqueness theorem for the solution of the inverse problem for a generalized kinetic equation // J. Inv. Ill–Posed Problems. 1995. V. 3. №5. P. 383–391.

8. Anikonov Yu. E., Bardakov V. G., Direct and inverse problems for kinetic equations // J. Inv. Ill–Posed Problems. 2000. V. 8. №6. P. 591–634.