Существование моментов у времени достижения нуля случайным блужданием со сносом

Прасолов Т.В., НГУ, Новосибирск.

Обозначения и мотивация

Пусть $\xi, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ независимые случайные величины с распределением F, имеющим конечный первый момент $\mathbb{E}\xi = -a < 0$. Пусть $S_0 = 0, S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_n$ – случайное блуждание и $\tau = \min\{n \geq 1 : \ S_n \leq 0\} < \infty$ – первый нижний лестничный момент.

Задача: используя свойства субэкспоненциальных распределений, получить короткий вариант доказательства импликации

$$\mathbb{E}G(\xi^+) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}G(C\tau) < \infty,$$

для класса функций $G(x) \to \infty$ таких, что $\log x = o(\log G(x))$ и $G(x) = o(x)$ при $x \to \infty$.

Одноканальная система обслуживания. Есть один входной поток поступления вызовов и один обслуживающий прибор. Вызов с номером $n = 1, 2, \dots$ прибывает в момент времени T_n (где $t_n = T_{n+1} - T_n$ суть интервалы между моментами прихода вызовов) и должен обслуживаться в течение времени σ_n. Пусть W_n означает время ожидания n-го вызова, т.е. время от момента прихода до момента начала обслуживания и пусть $W_1 = 0$. Справедлива рекурсия

$$W_{n+1} = \max(0, W_n + \sigma_n - t_n) \quad n \geq 1.$$

Обозначим $\xi_n = \sigma_n - t_n$ и заметим, что τ – число клиентов в первом периоде занятости.

Мотивация: Нас интересует существование моментов τ в терминах моментов распределения F. В частности, хорошо известно, что существование степенных либо показательных моментов у τ влечёт соответствующие скорости сходимости к стационарному режиму в ряд систем обслуживания; смотри, например, Теоремы 2 и 11 главы 4 в Боровков (1980).

Условия на функцию G

Будем рассматривать функции вида

$$G(x) = \exp(g(x)).$$

Для функции g потребуем следующие свойства $(C1) - (C3)$:

(C1) g дифференцируема, $g(x) > 0$ и $g'(x) > 0$ для любого x;

(C2) $\lim_{x\to\infty} g'(x) = 0$;

(C3) существует константа $\gamma \in (0, 1)$, такая что

$$\int_1^{\infty} \exp(-(1-\gamma)g(x))dx < \infty$$

и положительные константы x_0 и A, такие что для любых $x_0 < y \leq x/2$,

$$g(x) - g(x - y) \leq \gamma g(y) + A.$$

Примеры:

$g_1(x) = (\log \max(x, 1))^{\alpha}$,

$g_2(x) = (x^+)^{\beta}$,

$g_3(x) = (x^+)^{\beta} \log(max(x, 1))$, где $\alpha > 1$ и $\beta \in (0, 1)$.

Основной результат

Оценивая сверху распределение ξ определённым распределением с тяжёлым хвостом, мы получили следующий результат:

Теорема Т.П. и С. Г. Фосс (2022)

Положим $\mathbb{E}\exp(c\xi) = \infty$, для любой $c > 0$. Если g удовлетворяет условиям $(C1) - (C3)$ и если

$$\mathbb{E}\exp(g(\xi)) < \infty,$$

тогда

$$\mathbb{E}\exp((1-\varepsilon)g((a-\delta)\tau)) < \infty, \quad \text{for any} \quad \varepsilon \in (0,1) \quad \text{and} \quad \delta \in (0, a).$$

СВЯЗАННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

- **Степенной случай:** Если $\mathbb{E}(\xi^+)^{\alpha} < \infty$, то $\mathbb{E}\tau^{\alpha} < \infty$ (Theorems III.3.1 в Gut (1988) или Heyde (1964)).
- **Экспоненциальный случай:** Если $\mathbb{E}\exp(\lambda\xi) < \infty$, то существует $c > 0$, зависящее от F, что $\mathbb{E}\exp(c\tau) < \infty$ (Theorems III.3.2 в Gut (1988) или Heyde (1964)).
- Foss & Sapozhnikov (2004) получили результаты для несколько иного промежуточного класса функций G с использованием подхода, использовавшегося ранее для получения экспоненциальных оценок.

Литература

- Боровков, А. А. (1980). Асимптотические методы в теории массового обслуживания. *М. Наука.*
- Gut, A. (1988) Stopped Random Walks: Limit Theorems and Applications. *Springer-Verlag New York.*
- Heyde, C. C. (1964). Two probability theorems and their application to some first passage problem. *J. Austral. Math. Soc.*, **4**, 699—710.
- Foss, S. G., Sapozhnikov, A. V. (2004). On the Existence of Moments for the Busy Period in a Single-Server Queue. *Math. Oper. Res.*, **29**, 592—601.
- Foss, S., Prasolov, T. (2022). Moments of the first descending epoch for a random walk with negative drift. *Statist. Probab. Lett.*, **189**, https://doi.org/10.1016/j.spl.2022.109547.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР В АКАДЕМГОРОДКЕ

Novosibirsk State University *THE REAL SCIENCE