Асимптотика распределения момента выхода за невозрастающую границу для обобщенных процессов восстановления

Шелепова Анастасия, НГУ, Новосибирск

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $(X_1, v_1), (X_2, v_2), \ldots$ — бесконечная последовательность независимых и одинаково распределенных пар случайных величин таких, что

$$\mathbf{E}X_1 = 0, \quad \mathbf{E}X_1^2 = 1 = \mathbf{E}v_1 \quad \text{и} \quad v_k > 0 \quad \text{п.н..} \tag{1}$$

Положим $S_0 = V_0 = 0$ и

$$S_k = X_1 + \ldots + X_k, \quad V_k = v_1 + \ldots + v_k, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

При $t \geq 0$ рассмотрим случайный процесс

$$S(t) = S_{N(t)}, \quad \text{где} \quad N(t) = \max\{k \geq 0 \,: V_k \leq t\}.$$

Таким образом, $N(t)$ — простой процесс восстановления, построенный по случайным величинам $v_1, v_2, \ldots$, а $S(t)$ называют обобщенным процессом восстановления [1].

Пусть $g(t)$ — функция, определенная при $t \geq 0$. Рассмотрим случайную величину

$$\tau := \inf\{t > 0 : S(t) \leq g(t)\} = \inf\{t > 0 : Z(t) := S(t) - g(t) \leq 0\}, \tag{2}$$

равную первому моменту пересечения сверху вниз уровня $g(t)$ нашим обобщенным процессом восстановления $S(t)$.
Основная цель — найти асимптотику для вероятности

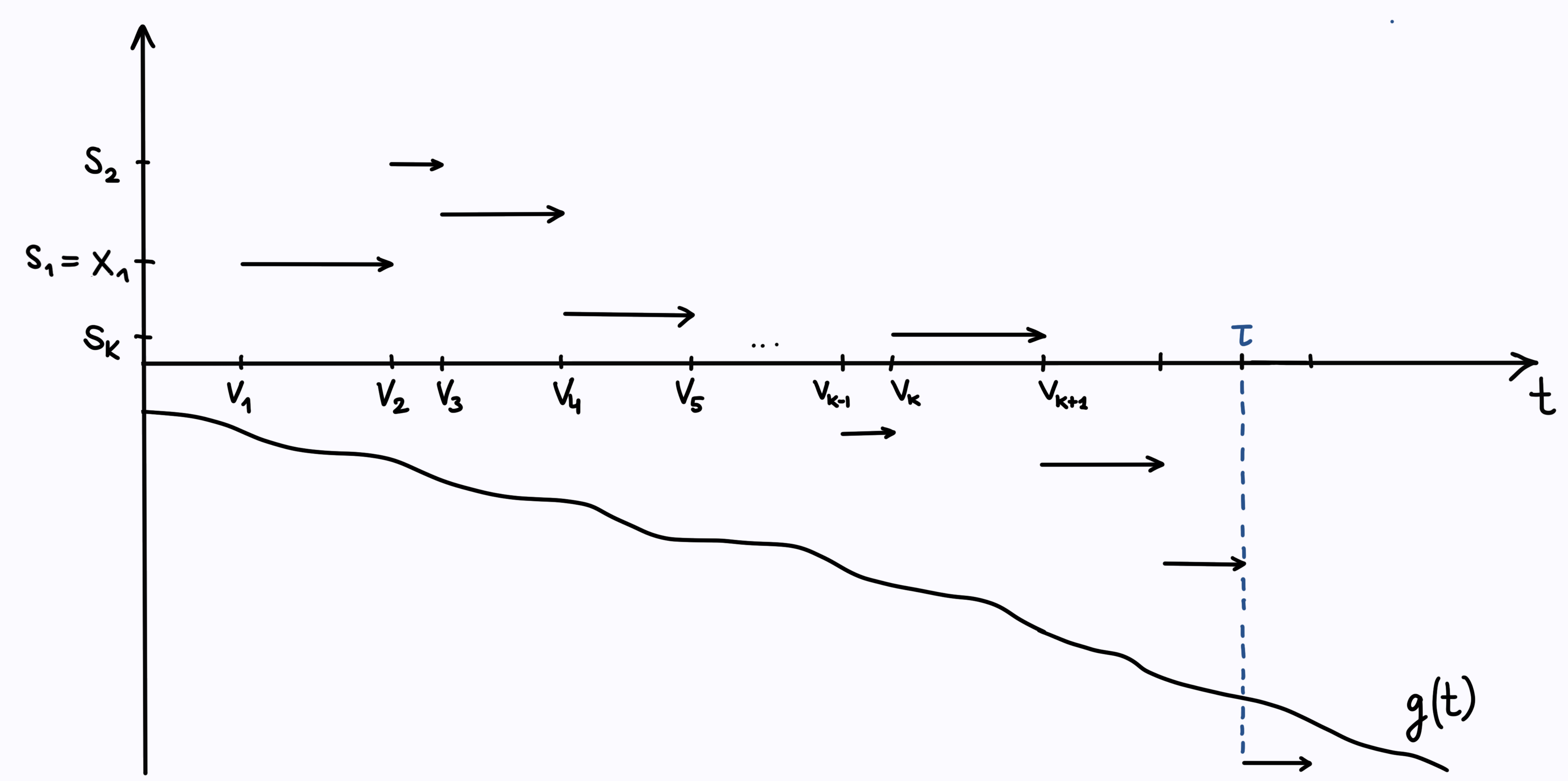
$$\mathbf{P}(\tau > T) = \mathbf{P}\Big(Z(T) := \inf_{0<t\leq T}(S(t) - g(t)) > 0\Big) \quad \text{при} \quad T \to \infty, \tag{3}$$

когда

$$g(0) < 0 \quad \text{и} \quad g(t) = o(\sqrt{t}) \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{4}$$

и

$$\mathbf{P}(\tau > T) > 0 \quad \text{при всех} \quad T > 0. \tag{5}$$



СВЯЗАННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

- **Случай прямолинейной границы** с помощью метода факторизационных тождеств исследован в [2].
- **Неслучайные времена скачков:** случай $v_i = 1$ в неоднородном случае изучался Д. Денисовым, А. Саханенко, В. Вахтелем в [3].

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Дополнительное предположение:

$$\boxed{\mathbf{E}v_1^{3/2} < \infty.} \tag{6}$$

Вспомогательная теорема

Пусть функция $g(t)$ — невозрастающая и выполнены условия (1), (4), (5) и (6), тогда имеет место следующая асимптотика

$$\boxed{\sqrt{n}\,\mathbf{P}(\tau > V_n) \sim \sqrt{2/\pi}\,U_n \quad \text{при} \quad n \to \infty,}$$

где

$$U_n := \mathbf{E}\left[S_n - g(V_n); \tau > V_n\right], \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{7}$$

Основная теорема

Пусть верны все предположения из предыдущей теоремы, тогда

$$\boxed{\sqrt{T}\,\mathbf{P}(\tau > T) \sim \sqrt{2/\pi}\,U(T) \quad \text{при} \quad T \to \infty,}$$

где

$$U(T) := U_{\lfloor T \rfloor} \geq U_1 > 0 \quad \text{при} \quad T \geq 1$$

— положительная неубывающая функция, которая медленно меняется при $T \to \infty$.

БЛАГОДАРНОСТИ

Доклад основан на совместной работе с Саханенко Александром Ивановичем, данное исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и DFG в рамках научного проекта №20-51-12007.

ЛИТЕРАТУРА

1. A.A. Borovkov, *Compound Renewal Processes*, Russ. Acad. Sci., Moscow, 2020, p. 455.
2. R.A. Doney, *Spitzer's condition and the ladder variables in random walks*, Probab. Theory Relat. Fields, **101**:4 (1995), 577–580.
3. D. Denisov, A. Sakhanenko, V. Wachtel, *First-passage times for random walks with non-identically distributed increments*, Ann. Probab., **46**:6 (2018), 3313—3350.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР В АКАДЕМГОРОДКЕ

Novosibirsk State University *THE REAL SCIENCE