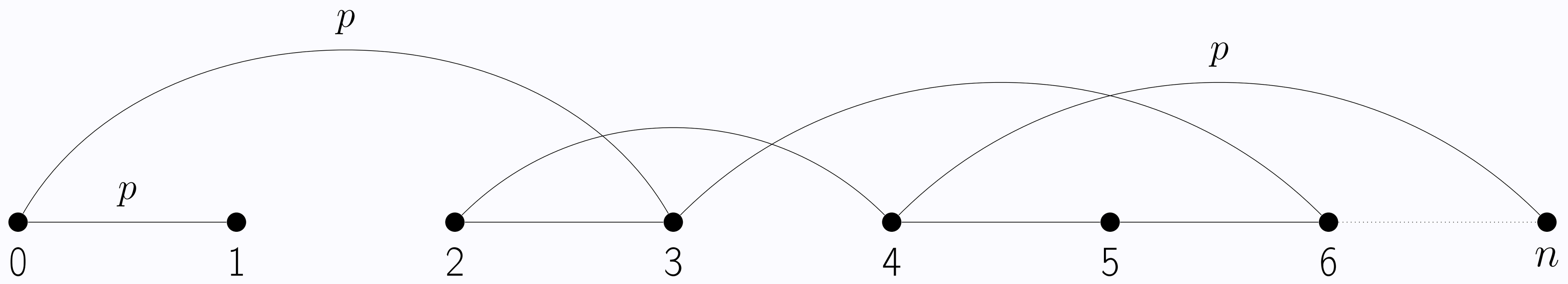
О распределении длины кратчайшего пути в обобщённом графе Барака – Эрдёша

Павел Тесемников, Новосибирский Государственный Университет и Институт Математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск, Россия

МОДЕЛЬ ОБОЩЁННОГО ГРАФА БАРАКА – ЭРДЁША

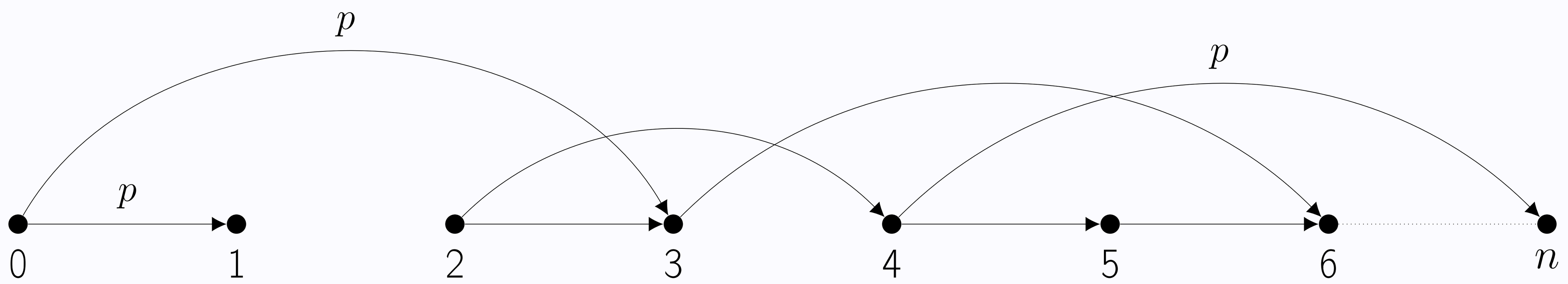
Пусть $\mathcal{V}_n = \{0, 1, \ldots, n\}$ и $\mathcal{E}_n = \{(i,j) : i, j \in \mathcal{V}_n, i \neq j\}$.

Граф Эрдёша – Реньи: $\mathcal{G}_n = (\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n)$.



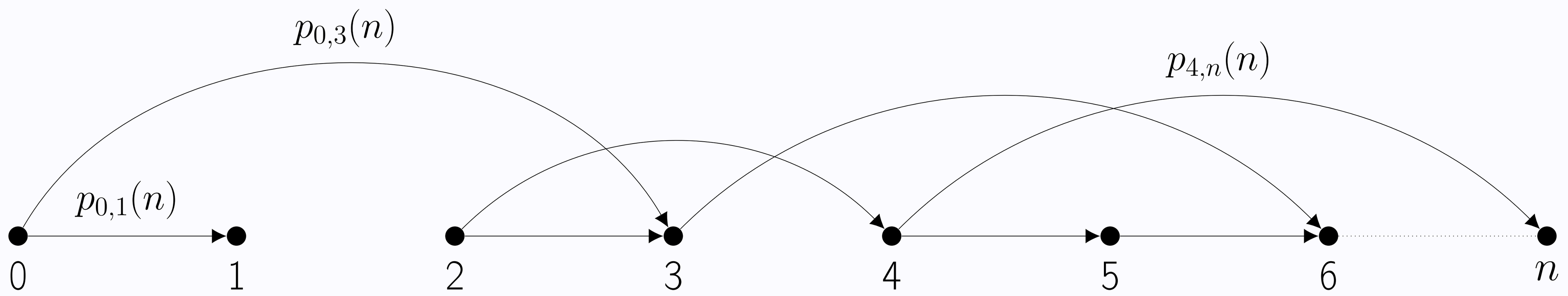
- Рёбра существуют *независимо* друг от друга.
- Вероятность $p = \mathbb{P}\left((i,j) \in \mathcal{E}_n\right)$ *фиксирована*.

Граф Барака – Эрдёша: $\mathcal{G}_n = (\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n)$.



- Направленные рёбра из меньших вершин в большие существуют *независимо* друг от друга.
- Вероятность $p = \mathbb{P}\left((i,j) \in \mathcal{E}_n\right)$ *фиксирована* $(i < j)$.

Обобщённый граф Барака – Эрдёша: $\mathcal{G}_n = (\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n)$.



- Направленные рёбра из меньших вершин в большие существуют *независимо* друг от друга.
- Вероятность $p_{i,j}(n) = \mathbb{P}\left((i,j) \in \mathcal{E}_n\right)$ – функция количества вершин n и номеров i, j $(i < j)$.

Минимальный путь между крайними вершинами:

$$\boxed{L_n := \min_{\pi \in \Pi_{0,n}} |\pi| \xrightarrow[n\to\infty]{d} L \sim ?,}$$

где $\Pi_{0,n}$ – множество всех путей из 0 в n, а $|\pi|$ – количество рёбер в π.

СВЯЗАННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

- **Неоднородный случай:** $p_{i,j}(n) = p_{j-i}$ – изучался П.Т. в [2].
- **«Двойственная» задача** об асимптотических свойствах максимальной длины пути между крайними вершигами в неоднородном случае изучалась Д. Денисовым и др. в [3].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Основное предположение:

$$\boxed{p_{i,j}(n) = f(i/n, j/n)/n^{\gamma},}$$

где $\gamma \in (0,1)$, а f положительна и интегрируема по Риману на $[0,1]^2$.

Теорема (Б. Маллейн и П.Т., 2022)

Пусть $\gamma = 1 - 1/k$. Тогда

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(L_n = k+1) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(L_n = k) = \exp\left(-c_k(f)\right),}$$

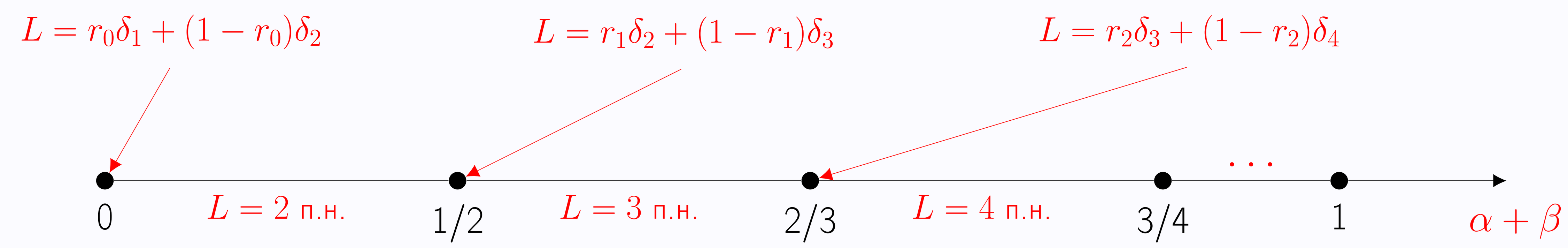
где $c_k(f) = \int_{0<u_1<\ldots<u_{k-1}<1} \prod_{j=0}^{k-1} f(u_j, u_{j+1}) du_1 \cdots du_{k-1} \in [0, \infty]$, $u_0 = 0$ и $u_k = 1$

Следствие (Б. Маллейн и П.Т., 2022)

Пусть $k \geq 2$. Тогда

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(L_n \leq k) = \begin{cases} 0 & \text{если } k < \frac{1}{1-\gamma}, \\ 1 - e^{-c_k(f)} & \text{если } k = \frac{1}{1-\gamma}, \\ 1 & \text{иначе.} \end{cases}}$$

Частный случай: $p_{i,j}(n) = \theta n^{-\alpha}(j-i)^{-\beta}$ т.е. $(f(x,y) = (y-x)^{-\beta},\ \alpha = \gamma - \beta)$.



Вероятности $r_0, r_1, \ldots$ вычисляются в явном виде!

БЛАГОДАРНОСТИ

Доклад основан на совместной работе с Бастиеном Маллейном и подготовлен при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2022-282.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. Mallein, P. Tesemnikov, *On the length of the shortest path in a sparse Barak-Erdős graph*, Statistics and Probability Letters, **190** (2022).
2. P. Tesemnikov, *On the asymptotics for the minimal distance between extreme vertices in a generalised Barak-Erdős graph*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **15** (2018), 1556–1565.
3. D. Denisov, S. Foss, T. Konstantopoulos, *Limit theorems for a random directed slab graph*, The Annals of Applied Probability, **22**:2 (2012), 702–733.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР В АКАДЕМГОРОДКЕ

Novosibirsk State University *THE REAL SCIENCE