О распределении длины и высоты цикла регенерации у случайных блужданий со сносом

Дмитрий Юрьевич Цыбульский, Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается случайное блуждание

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n \geq 1.$$

где $\{X_i\}_{i \geq 1}$ – последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин с положительным математическим ожиданием.

Изучаются свойства случайного блуждания S_n при условии, что произошло событие

$$\Lambda = \{S_n \geq 0 \text{ при всех } n \geq 0\}.$$

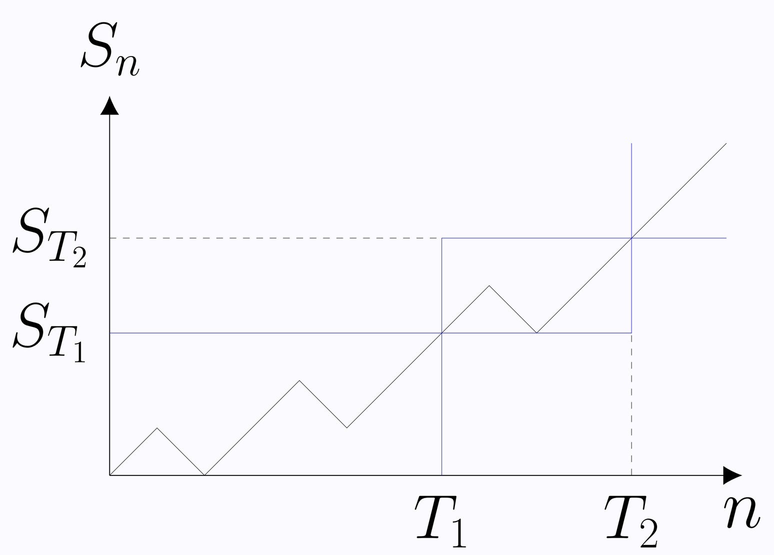
Регенерирующая структура.

Определим последовательность $\{T_i\}_{i\geq 0}$ целочисленных случайных величин по правилу

$$T_i = \begin{cases} 0, & i = 0; \\ \min\{n > T_{i-1} : S_k \geq S_n \text{ при } k > n,\ S_k < S_n \text{ при } k < n\}, & i \geq 1. \end{cases}$$

Цель работы. Поиск распределения двухмерных векторов

$$\{(T_{i+1} - T_i,\ S_{T_{i+1}} - S_{T_i})\}_{i \geq 0}$$



Случай отрицательного сноса.

$$\mathbb{P}(\cdot \mid \Lambda) := \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(\cdot \mid \tau_k < \sigma)$$

где $\tau_k = \inf(n : S_n > k)$, $\sigma = \inf(n : S_n < 0)$.
Другой вид аппроксимирующей последовательности событий описан в работах [1], [2].

ОБЗОР ИЗВЕСТНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Утверждение (см., напр., комментарии в [3])

Случайные вектора

$$\{(T_{i+1} - T_i,\ S_{T_{i+1}} - S_{T_i})\}_{i \geq 0},$$

независимы при $i \geq 0$ и одинаково распределены при $i \geq 1$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема

Для любых $m, n \in \mathbb{N}$ существует событие $E_{m,n} \in \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ такое, что справедливо

$$\mathbb{P}(T_1 = m,\ S_{T_1} = n \mid \Lambda) = \mathbb{P}(E_{m,n}),$$

где $\sigma(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ – сигма-алгебра, порождённая случайными величинами $\xi_1, \ldots, \xi_m$.

Определение. Участок траектории $(S_m, S_{m+1}, ..., S_{m+n})$ случайного блуждания называется неразложимым, если его нельзя представить в виде объединения более чем одного цикла, т.е.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{I}(m < T_i < m + n) = 0.$$

Следствие

Пусть $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - q$, тогда

$$\mathbb{P}(T_1 = m,\ S_{T_1} = n \mid \Lambda) = p^{\frac{m+n}{2}} q^{\frac{m-n}{2}} N_{m,n},$$

где $N_{m,n}$ – количество неразложимых неотрицательных путей длины m, приходящих в точку (m, n) из точки $(0, 0)$.

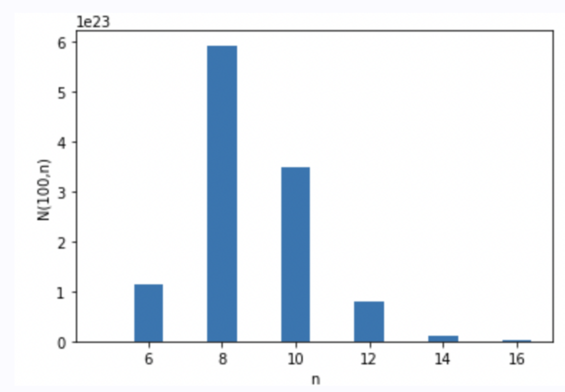
Теорема

Для любых $m \geq 2,\ n \geq 1$

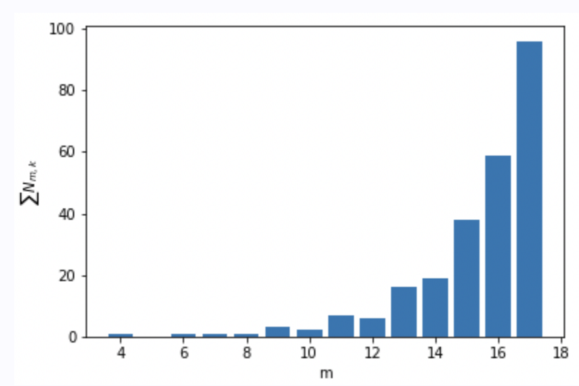
$$N^l_{m,n} = N^{l-1}_{m-1,n-1} - N^0_{m-1,n-1} + \mathbf{I}(l < 0)\left(N^{l+1}_{m-1,n+1} + N^0_{m-2,n}\right).$$

где $N^l_{m,n}$ – количество неразложимых путей длины m, приходящих в точку (m, n) из точки $(0, 0)$ и не опускающихся ниже уровня l.

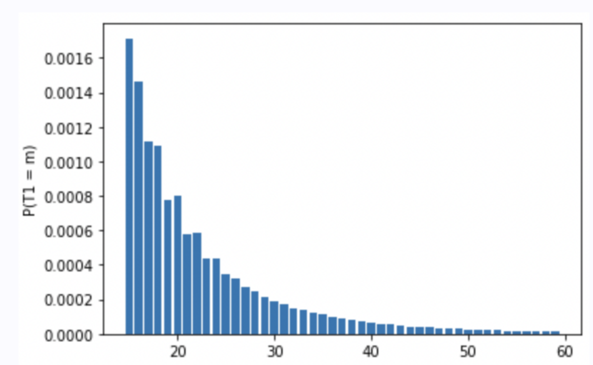
Численное моделирование.



Зависимость количества путей от высоты цикла ($m = 100$).



Количество всевозможных путей длины m.



Распределение T_1 при $p = 0.6$.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Bertoin and R.A. Doney, *On conditioning a random walk to stay positive*, The Annals of Probability, 22:4 (1994), 2152–2167.
2. R.W. Keener, *Limit theorems for random walks conditioned to stay positive*, The Annals of Probability, 20 (1992), 801–824.
3. Foss and S. Zachary, *Stochastic sequences with a regenerative structure that may depend both on the future and on the past*, Advances in Applied Probability, 45:4 (2013), 1083–1110.