МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР В АКАДЕМГОРОДКЕ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОБОЛЕВА СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Сборник тезисов международной конференции

«БОРОВКОВСКИЕ ЧТЕНИЯ»

24 – 26 августа, 2022

Новосибирск, Россия

Список участников

Организационный комитет конференции

- Лотов Владимир Иванович (lotov@math.nsc.ru)
- Прокопенко Евгений Игоревич (evgenii.prokopenko@gmail.com)
- Саханенко Александр Иванович (aisakh@mail.ru)
- Тарасенко Антон Сергеевич (dkanus@gmail.com)
- Тесемников Павел Игоревич (tesemnikov.p@gmail.com)
- Фосс Сергей Георгиевич (foss@math.nsc.ru)

При поддержке

ПАРИЖСКОЕ РАЗОРЕНИЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ДЕФИЦИТА ЗАДЕРЖКАМИ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНО-ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ЛЕВИ

Боровков Константин Александрович

✧ *Email: borovkov@unimelb.edu.au; Мельбурнский Университет, Школа Математики и Статистики, Мельбурн, Австралия.*

Мы рассматриваем интересное естественное обобщение задачи о парижском разорении в предположении, что динамика резерва риска задаётся спектрально-отрицательным процессом Леви. Отличительная особенность такого обобщения состоит в том, что распределение случайных длин для окон задержки реализации процесса может зависеть от дефицита в те моменты времени, когда процесс резерва риска становится отрицательным, тем самым начиная новый отрицательный цикл. Модель включает в себя возможность мгновенного разорения, когда дефицит достигает определенного подмножества. В такой общей постановке мы выведем аналитическое выражение для вероятности парижского разорения и совместного преобразования Лапласа для времени парижского разорения и дефицита в момент разорения. Доклад основан на совместной работе с Duy Phat Nguyen.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ВРЕМЕНИ ПЕРВОГО ПРОХОЖДЕНИЯ ДЛЯ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ

Вахтель Виталий Иванович

✧ *Email: wachtel@math.uni-bielefeld.de; Билефельдский Университет, Аугсбург, Германия.*

В докладе мы рассмотрим асимптотические разложения для хвоста распределения времени, когда осциллирующее случайное блуждание впервые достигает фиксированного уровня $-x \leq 0$. Кроме того, мы обсудим связь между такими разложениями и полигармоническими функциями для убитых случайных блужданий.

ЛОКАЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ ДЛЯ АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ НА ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Денисов Денис Эдуардович

✧ *Email: denis.denisov@manchester.ac.uk; Манчестерский Университет, Манчестер, Великобритания.*

Мы рассматриваем асимптотически устойчивое многомерное случайное блуждание $S(n) = (S_1(n), \ldots, S_d(n))$. Пусть $\tau_x := \min\{n > 0 : x_1 + S_1(n) \le 0\}$ будет момент первого выхода случайно блуждания $x + S(n)$ из полупространства. Мы изучаем асимптотики $p_n(x, y) := \mathbb{P}(x + S(n) \in y + \Delta, \tau_x > n)$ при n стремящемся к бесконечности, где Δ есть фиксированный куб. Мы получили точные асимптотики в режиме нормальных и малых уклонения и достаточно точные оценки в режиме больших уклонений. Используя эти результаты мы нашли локальные асимптотики функции Грина $G(x, y) := \sum_n p_n(x, y)$, когда $|y|$ и/или $|x|$ стремится к бесконечности. Работа выполнена совместно с В.И. Вахтелем.

СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛИНОМЫ, НЕ ИМЕЮЩИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ НУЛЕЙ

Запорожец Дмитрий Николаевич

✧ *Email: zap1979@gmail.com; Санкт-Петербургское Отделение Математического Института им. В.А.Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия.*

В своей работе 2002 года Dembo, Poonen, Shao и Zeitouni получили степенную асимптотику по n убывания вероятности того, что случайный полином четной степени n с i.i.d. коэффициентами не имеет вещественных нулей. Точный степенной показатель найден не был, однако была высказана гипотеза, что он равен $-3/4$. Лишь летом 2021 года FitzGerald, Tribe, и Zaboronski выложили работу в ArXiv с ее доказательством. В докладе мы рассмотрим аналогичную задачу для случайных полиномов, коэффициенты которых имеют биномиальную дисперсию. Данные полиномы впервые рассмотрели Kostlan, Shub и Smale в своих работах в начале 90-х годов прошлого века.

СВОДИТСЯ ЛИ ГАРМОНИЯ К АЛГЕБРЕ (ХОТЯ БЫ СТАТИСТИЧЕСКИ)?

Зуев Сергей Аркадьевич

✧ *Email: sergei.zuyev@chalmers.se; Технологический Университет Чалмерс, Гётеборг, Швеция.*

В недавнем исследовании американских учёных была предложена формула оценки привлекательности лица на основе отклонения его черт от заданных “канонических” значений. Последние определяются исходя из культуроведческих исследований и включают в себя утверждения типа: равенство ширины глаз расстоянию между ними или равенство отношения расстояния от носа до подбородка к ширине носа золотому сечению. Сама формула держится в секрете и её применение доступно на коммерческой основе. Однако по опубликованным данным мы можем довольно точно ее восстановить и подвергнуть критике подход авторов к попытке свести привлекательность к единой формуле, пусть и в статистическом смысле. Прежде, чем мы перейдём к алгебре, мы обсудим последние научные исследования на пересечении физиологии, психологии, статистики и компьютерной графики в области того, что есть привлекательность и ее биологические корни.

СОВМЕСТНАЯ АСИМПТОТИКА ПРЯМОГО И ОБРАТНОГО ПРОЦЕССОВ КОЛИЧЕСТВ НЕПУСТЫХ УРН В БЕСКОНЕЧНЫХ УРНОВЫХ СХЕМАХ

Ковалевский Артём Павлович

✧ *Email: artyom.kovalevskii@gmail.com; Новосибирский Государственный Технический Университет и Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск, Россия.*

Изучается совместная асимптотика прямого и обратного процессов количеств непустых урн в бесконечной урновой схеме. Вероятности попадания шаров в урны предполагаются удовлетворяющими условиям регулярного убывания. Доказана слабая сходимость к двумерному гауссовскому процессу, ковариационная функция которого зависит только от показателя степени регулярного убывания вероятностей. Следствие основной теоремы утверждает слабую сходимость интеграла от разности прямого и обратного процессов к нормальному распределению. Получены оценки параметра, имеющие совместное нормальное распределение вместе с прямым и обратным процессами.

Эти оценки использованы для построения статистических критериев проверки однородности поведения урновой схемы по числу брошенных шаров. Статистические критерии проверены моделированием и применены к анализу однородности текстов на естественном языке.

БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОДНОРОДНЫХ ПО ПРОСТРАНСТВУ ДВУМЕРНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Коршунов Дмитрий Алексеевич

✧ *Email: d.korshunov@lancaster.ac.uk; Университет Ланкастер, Ланкастер, Великобритания.*

Мы рассматриваем цепи Маркова на решётке в положительном квадранте. Мы предполагаем, что переходные вероятности сходятся на бесконечности. В предположении положительной возвратности цепи мы изучаем большие уклонения для ее стационарного распределения при выполнении условия типа Крамера на скачки.

ПРИНЦИПЫ УМЕРЕННО БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ТРАЕКТОРИЙ НЕОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

Логачев Артём Васильевич, Могульский Анатолий Альфредович

✧ *Email: omboldovskaya@mail.ru; Институт Математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск, Россия.*

✧ *Email: mogul@math.nsc.ru; Институт Математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск, Россия.*

В докладе будет рассмотрена нормированная ломаная построенная по суммам независимых, вообще говоря, разнораспределенных случайных величин. При различных моментных условиях на случайные величины будут изложены теоремы, содержащие принципы умеренно больших уклонений для таких ломаных в пространстве непрерывных на отрезке [0,1] функций. Также будет указана связь между зоной, в которой выполнен принцип умеренно больших уклонений, и тем моментом, который существует у случайных величин.

ПОДХОД MULTI-NORMEX ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ СУММЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ С ТЯЖЕЛЫМИ ХВОСТАМИ

Прокопенко Евгений Игоревич

✧ *Email: evgenii.prokopenko@gmail.com; Институт Математики им. С.Л. Соболева и Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск, Россия.*

Мы рассмотрим точную аппроксимацию распределения суммы н.о.р. случайных векторов с тяжелыми хвостами, комбинируя среднее и экстремальное поведение. Данных подход обобщает так называемый подход «Normex» с одномерной модели на многомерную. Мы предложим два возможных распределения, названные d-Normex и MRV-Normex. Оба основываются на нормальном распределение для описания среднего поведения через ЦПТ, в то время как разница между двумя версиями заключается в использовании точного распределения или экстремальной теоремы для максимума. Поговорим о скорости сходимости для каждого распределения к распределению суммы, предполагая, что норма случайного вектора является правильно-меняющейся случайной величиной второго порядка при рассмотрении случая MRV-Normex. Приведем численные иллюстрации с использованием квантиль-квантиль графиков на основе геометрических квантилей. Работа выполнена совместно с Marie Kratz.

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С ВОЗНИКНОВЕНИЕМ АЛЬФА РИТМА КОРЫ ГОЛОВНОГО МОЗГА

Рыбко Александр Николаевич

✧ *Email: arybko@gmail.com; Институт Проблем Передачи Информации РАН, Математическая Лаборатория им. Добрушина, Москва, Россия.*

Изучается следующий класс динамических систем. На единичной окружности расположены N точек, синхронно вращающихся по часовой стрелке с единичной скоростью. Задан связный ориентированный граф F с вершинами в этих N точках. Имеется (неизвестная) действительнозначная функция $f(x)$ на окружности, равная $f(x) = 0$ в выделенной точке $x = 0$ на окружности. Вращающиеся точки совершают прыжки: в момент t, когда какая либо точка $n = 1, ..., N$ вращаясь, попадает в 0 на окружности, каждая точка m из соседних по графу F с точкой n прыгает на расстояние $f(m(t))$. Функция $f(x)$ зависит от N, а граф F является случайным. Ясно, что у таких динамических систем имеется простейшее инвариантное состояние, когда все точки слипаются в один большой атом, вращающийся по окружности. Как правило, находятся и другие инвариантные состояния для таких динамических систем. Задача заключается в нахождении таких естественных функций $f(x)$, для которых при растущем t с близкой к единице вероятностью мы сойдемся этому простейшему инвариантному состоянию при больших N.

ОБ АСИМПТОТИКЕ ВЕРОЯТНОСТИ НЕВЫХОДА СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА ЗА КРИВОЛИНЕЙНУЮ ГРАНИЦУ

Саханенко Александр Иванович

✧ *Email: aisakh@mail.ru; Институт Математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск, Россия.*

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые случайные величины. Будем предполагать, что случайное блуждание $S_n := X_1 + \ldots + X_n,\ n = 1, 2, \ldots,$ принадлежит области притяжения нормального распределения, т.е. что существует возрастающая стремящаяся к бесконечности последовательность $\{b_n > 0\}$ такая, что S_n/b_n при $n \to \infty$ сходится по распределению к стандартному нормальному закону.

Пусть $T := \inf\{k \geq 1 : S_k \leq g_k\}$ – момент первого пересечения случайным блужданием $\{S_n\}$ движущейся границы $\{g_n = o(b_n)\}$. В докладе мы рассмотрим асимптотическое поведение правого хвоста $\mathbf{P}(T > n)$.

Известный классический случай – это случай, когда случайное блуждание имеет нулевое среднее, конечную дисперсию и $B_n^2 := \mathbf{E}[S_n^2] \to \infty$. Если выполнено условие Линдберга, то

$$\mathbf{P}(T > n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{U_n}{B_n}, \quad \text{где} \quad U_n := \mathbf{E}[S_n - g_n; T_g > n]. \tag{1}$$

(См. *Ann. Probab.*, 2018, pp. 3313-3350.)

В настоящем докладе мы сконцентрируемся на дальнейших результатах в этом направлении.

В частности, мы не будем предполагать, что все слагаемые имеют конечную дисперсию или, даже, конечное среднее. Обозначим через $X_n^{[u_n]}$ срезку случайной величины X_n на уровнях $\pm u_n$, где $u_n/b_n \to 0$ достаточно медленно. В этом случае

$$\mathbf{P}(T > n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{U_n(u_n)}{b_n} + J_n(u_n, b_n), \tag{2}$$

где $U_n(u_n)$ определяется аналогично U_n в (1), но для случайного блуждания $X_1^{[u_n]} + \cdots + X_n^{[u_n]}$ вместо S_n. Отметим, что величина $J_n(u_n, b_n)$ из (2) найдена в явном виде как функция распределений положительных частей случайных величин $X_1 - u_n, \ldots, X_n - u_n$.

Доклад основан на совместных работах с Д. Э. Денисовым и В. И. Вахтелем. Исследование выполнено при поддержке РФФИ и DFG в рамках научного проекта №20-51-12007.

О ЯДРАХ НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Смородина Наталия Васильевна

✧ *Email: smorodina@pdmi.ras.ru; Санкт-Петербургское Отделение Математического Института им. В.А.Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия.*

Пусть $\xi_x(t)$ – решение стохастического дифференциального уравнения

$$d\xi_x(t) = b(\xi_x(t))b'(\xi_x(t))\,dt + b(\xi_x(t))\,dw(t), \qquad \xi_x(0) = x.$$

В пространстве $L_2(\mathbb{R})$ рассмотрим самосопряженный оператор

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\big(b^2(x)\frac{d}{dx}\big) + V(x),$$

заданный на области определения $W_2^2(\mathbb{R})$. Относительно функций $b(x), V(x)$ мы будем предполагать выполнение следующих условий: 1. $V \in L_1(\mathbb{R})$. 2. $b \in C_b^2$ и отделена от нуля. 3. Существует $b_0 > 0$ такое что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} b(x) = b_0$. 4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} b'(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} b''(x) = 0$. 5. $\int_{\mathbb{R}} x^2(|b(x) - b_0| + |b'(x)|)\,dx < \infty$.

Из условий 1-5 вытекает, что спектр оператора $\mathcal{A}$ состоит из интервала $[0,\infty)$ и, возможно, нескольких отрицательных однократных собственных значений. Через $H_a \subset L_2(\mathbb{R})$ обозначим абсолютно непрерывное подпространство оператора $\mathcal{A}$, а через P_a – ортогональный проектор в $L_2(\mathbb{R})$ на H_a. Через $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}P_a$ обозначим сужение оператора $\mathcal{A}$ на H_a.

Для каждого λ, удовлетворяющего условию $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ определим случайный оператор $\mathcal{R}_\lambda^t$, полагая

$$\mathcal{R}_\lambda^t f(x) = \int_0^t e^{\lambda\tau}(P_a f)(\xi_x(\tau))e^{-\int_0^\tau V(\xi_x(s))\,ds}\,d\tau.$$

Теорема 1. 1. С вероятностью 1 оператор $\mathcal{R}_\lambda^t$ является ограниченным интегральным оператором в $L_2(\mathbb{R})$ вида

$$\mathcal{R}_\lambda^t f(x) = \int_{\mathbb{R}} r_\lambda(t,x,y)f(y)\,dy,$$

причем при $\operatorname{Re}\lambda < 0$ последнее равенство справедливо также для $t = \infty$.

2. Для любых λ, t, x функция $r_\lambda(t,x,\cdot) \in W_2^\alpha$ для любого $\alpha \in [0,\frac{1}{2})$.

Теорема 2. 1. Если $\operatorname{Re}\lambda < 0$ то для любого $f \in H_a$ выполнено

$$\mathbb{E}\int_{\mathbb{R}} r_\lambda(\infty,\cdot,y)f(y)\,dy = (\mathcal{A}_0 - \lambda I)^{-1}f. \tag{1}$$

2. Если $\operatorname{Re}\lambda = 0$ и $\lambda \neq 0$ то для любого $f \in H_a$ выполнено

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\int_{\mathbb{R}} r_\lambda(t,\cdot,y)f(y)\,dy = (\mathcal{A}_0 - \lambda I)^{-1}f. \tag{2}$$

При $\lambda = 0$ равенство (2) выполнено для любого $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0 - \lambda I)^{-1}$.

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект №22-21-00016.

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИК CUSUM ПРОЦЕДУРЫ В ЗАДАЧЕ ОБНАРУЖЕНИЯ РАЗЛАДКИ

Тарасенко Антон Сергеевич, Лотов Владимир Иванович

✧ *Email: dkanus@gmail.com; Институт Математики им. С.Л. Соболева и Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск, Россия.*

✧ *Email: lotov@math.nsc.ru; Институт Математики им. С.Л. Соболева и Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск, Россия.*

Получены оценки в виде неравенств для среднего времени задержки с реагированием на наличие разладки и для среднего времени до ложной тревоги при обнаружении разладки с помощью CUSUM процедуры.

ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ХВОСТОВЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В МОДЕЛИ ВЕТВЯЩЕГОСЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ В СЛУЧАЕ ТЯЖЁЛЫХ ХВОСТОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПРИРАЩЕНИЙ

Тесемников Павел Игоревич, Фосс Сергей Георгиевич

✧ *Email: tesemnikov.p@gmail.com; Новосибирский Государственный Университет и Институт Математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск, Россия.*

✧ *Email: foss@math.nsc.ru; Университет Хериот-Ватта, Эдинбург, Великобритания и Институт Математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск, Россия.*

Рассмотрим двумерный массив $\{\xi_{i,j}\}_{i,j\geq 1}$ независимых случайных величин (с.в.), распределённых согласно закону F. Мы будем предполагать, что F центрировано, т.е.

$$\mathbb{E}\xi_{1,1} = 0,$$

и имеет тяжёлый правый хвост, т.е.

$$\mathbb{E}e^{\lambda\xi_{1,1}} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} F(dt) = \infty$$

при любом $\lambda > 0$.

Определим семейство случайных блужданий $S_{i,n}$ по правилу:

$$S_{i,0} = 0, \qquad S_{i,n} = \sum_{j=1}^{n} \xi_{i,j} \text{ при } n \geq 1.$$

Рассмотрим также целочисленную с.в. $Z > 0$ п.н. Мы изучаем асимптотику хвоста распределения супремума

$$R^g_{\mu,Z} = \max_{1\leq i\leq Z} \max_{0\leq n\leq \mu} (S_{i,n} - g(n)),$$

где $\mu \leq \infty$ – произвольная целочисленная с.в., а g – неотрицательная функция, стремящаяся к бесконечности с ростом n.

Мы приведём условия, при которых нижняя оценка

$$\mathbb{P}\left(R^g_{\mu,Z} > x\right) \geq (1 + o(1))H^g_{\mu,Z}(x)$$

и верхняя оценка

$$\mathbb{P}\left(R^g_{\mu,Z} > x\right) \leq (1 + o(1))H^g_{\mu,Z}(x)$$

справедливы равномерно по некоторым классам моментов времени μ и границ g. Здесь

$$H^g_{\mu,Z}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[Z\mathbb{I}(\mu \geq n)\right] \overline{F}(x + g(n)).$$

Отметим, что рассматриваемая модель является частным случаем модели ветвящегося случайного блуждания, в котором ветвление возможно лишь в первом поколении.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2022-282.

КРИТИЧЕСКИЕ ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ СО СЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ ТИПОВ ЧАСТИЦ И СЛУЧАЙНЫЕ ГРАФЫ

Топчий Валентин Алексеевич

✧ *Email: topchij@gmail.com; Институт Математики им. С.Л. Соболева (Омский филиал), Омск, Россия.*

Рассмотрены генеалогические деревья ветвящихся процессов Гальтона – Ватсона. Изучается критический случай, соответствующий одновершинному случайному дереву с независимым одинаково распределенным количеством ребер для всех вершин. Среднее количество ребер, выходящих из вершины более низкого уровня равно 1. Одной из основополагающих теорем для данных процессов является теорема Яглома, утверждающая, что не вырождающиеся к далекому моменту времени n процессы содержат в данный момент времени количество частиц равное этому времени n, умноженному на экспоненциально распределенную случайную величину. Эти условные процессы удобно описывать в терминах редуцированных деревьев, которые получаются из генеалогических деревьев путем исключения поддеревьев, не доходящих до уровня n. Более сложная модель ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона со счетным числом типов частиц, у которых типы потомков получаются суммированием типа родителя с независимыми одинаково распределенными многомерными случайными величинами можно представить как определенные выше в одномерном случае деревья с весами ребер и вершин.

Описаны средние и дисперсии ряда характеристик редуцированных деревьев с весом, включая суммарный вес всех вершин на фиксированном уровне. Доказан ряд предельных теорем для редуцированных деревьев.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0003.

ЭРГОДИЧНОСТЬ ПО ХАРРИСУ РАЗДЕЛЁННОГО ПРОТОКОЛА УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕДАЧЕЙ ИНФОРМАЦИИ

Чебунин Михаил Георгиевич

✧ *Email: chebuninmikhail@gmail.com; Технологический Институт Карлсруэ, Карлсруэ, Германия.*

Протоколы управления передачей информации TCP с аддитивным ростом и мультипликативным сбросом интенсивности хорошо известны и изучены в многочисленных работах. Намного более сложным оказывается исследование свойств систем взаимодействующих протоколов. Мы рассматриваем систему обслуживания, в которой как интенсивность входного потока, так и интенсивность обслуживания следуют такому протоколу и динамика последней зависит от обеих интенсивностей. Такого рода стохастическая система была предложена в работе Баччелли, Карофиглио и Фосса в 2009 году, где при частных вероятностных предположениях была доказана положительная возвратность описывающей её марковской цепи и изучен ряд статистических свойств модели. В данной работе мы рассматриваем более общую вероятностную модель и приводим доказательство более сильного утверждения: эргодичности по Харрису соответствующей цепи Маркова. Работа выполнена совместно с С.Г. Фоссом.

ИНФОРМАЦИЯ ХЕЛЛИНГЕРА В ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ОЦЕНИВАНИИ И ПОСТРОЕНИИ ОБЪЕКТИВНЫХ АПРИОРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Шемякин Аркадий Евгеньевич

✧ *Email: a9shemyakin@stthomas.edu; Университет Св. Томаса, Миннесота, США.*

Информация Хеллингера как локальная характеристика параметрических семейств распределений впервые была рассмотрена в работе Шемякин (1992). Она определяется через расстояние Хеллингера между двумя вероятностными мерами. При выполнении определенных условий регулярности, построение нижних границ байесовского риска тесно связано с информацией Фишера и структурой римановых многообразий. Нарушение условий регулярности (недифференцируемая плотность распределения или неопределенная информация Фишера), включая случай равномерного распределения, предполагает использование аналогов или обобщений фишеровской информации. Информация Хеллингера может использоваться для построения информационных неравенств типа Рао-Крамера. Нижние границы байесовского риска, известные как неравенства Боровкова-Саханенко (1980), могут быть расширены на нерегулярный случай (Шемякин, 1991).

Конструкция объективных или неинформативных априорных распределений, основанная на информации Хеллингера, была предложена в работе Шемякин (2014). Хеллингеровские априорные обобщают правило Джеффриса при нарушении условий регулярности. Во многих примерах они идентичны или близки к референтным априорным (см. Бергер, Бернардо и Сун, 2009) или априорным, полученным по методу соответствия вероятностей (Гхосал и Саманта, 1997). Большая часть работы Шемякин (2014) посвящена одномерному случаю, но общее определение матрицы Хеллингера и хеллингеровских априорных приведены для случая векторного параметра. Условия существования и положительной определенности матрицы информации Хеллингера в работе не рассматривались.

Информация Хеллингера применялась также в работе Линь, Мартин и Янг (2019) к задачам оптимального дизайна экспериментов. Рассматривался специальный одномерный случай, для которого построение матрицы Хеллингера не обязательно. В настоящей работе общее определение, условия существования и положительной определенности матрицы информации Хеллингера исследуются в нерегулярных случаях, рассмотренных Ибрагимовым и Хасьминским (1976).

СТЕНДОВЫЕ ДОКЛАДЫ

ПРИНЦИП УМЕРЕННО БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ M-ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН В ПРОСТРАНСТВЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ЗАДАННЫМ СУБЛИНЕЙНЫМ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОЖИДАНИЕМ

Ефремов Егор Владимирович

✧ *Email: e.efremov@g.nsu.ru; Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск, Россия.*

В докладе будет рассказано о результате полученном в области теории больших уклонений в пространстве случайных величин с нелинейным математическим ожиданием. Был получен принцип умеренно больших уклонений для строго стационарной последовательности m-зависимых случайных величин в пространстве случайных величин с заданным сублинейным математическим ожиданием. При этом для случайных величин требовалось выполнение более слабого моментного условия, чем в полученных ранее результатах.

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ЗАРАЖЕНИЯ В СИСТЕМАХ ОБСЛУЖИВАНИЯ $M/M/K/0$

Ишков Роман Сергеевич

✧ *Email: ishkov.roman2009@yandex.ru; Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск, Россия.*

В докладе рассматривается усложнённая модель систем обслуживания, созданная для моделирования эпидемий. Рассматривается зависимость скорости заражения от количества людей в системе и эффективность карантина в зависимости от различных параметров болезни (процент заражённого населения, контагиозность и т.д.).

МЕТОД ДВОЙНОГО БУТСТРАПА ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ СТЕПЕННОГО ИНДЕКСА ПО ЭКСПЕКТИЛЯМ

Лукьянов Андрей Евгеньевич

✧ *Email: a.lukyanov2@g.nsu.ru; Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск, Россия.*

Оценивание степенного индекса является важной задачей в теории экстремальных значений и имеет обширные приложения в финансовой и актуарной математике. Степенной индекс в распределении отвечает за существование моментов высших порядков и позволяет понять характер убывания хвоста распределения. С прикладной точки зрения, оценивание индекса позволяет застраховать ситуации, подверженные возникновению экстремальных случаев, описываемых при помощи степенного класса распределений.

Существует множество подходов для оценивания степенного индекса. Наиболее известными является группа оценок, использующих свойства порядковых статистик распределения. Самым популярным из них является оценка Хилла (Hill, [1975]). Однако общей проблемой искомых методов является их зависимость от количества выбранных порядковых статистик k(n). Для поиска оптимального количества был представлен метод двойного бутстрапа (Draisma, [1999]). Доказана состоятельность и асимптотическая нормальность оценок, получаемых этим методом, найдены оптимальные значения k(n).

Другие методы оценки степенного индекса используют экспектили (Phillips, [2022]; Daouia, [2020]). Экспектили являются решением оптимизационной задачи о взвешенном наилучшем среднеквадратичном прогнозе и имеют схожие свойства с квантилями распределения, но при этом обладают и более обширными свойствами: например, экспектильная функция является непрерывной, монотонно возрастающей функцией на отрезке [0,1]. Как и в случае оценок типа Хилла, методы, использующие экспектили, требуют нахождения оптимальной доли используемых данных в выборке.

Целью данной работы является создание метода двойного бутстрапа поиска оптимального уровня для оценок степенного индекса по экспектилям, а также исследование их статистических свойств. Также планируется реализовать искомый метод на языке Python и сравнить его с уже созданным методом двойного бутстрапа для оценок типа Хилла.

СУЩЕСТВОВАНИЕ МОМЕНТОВ У ВРЕМЕНИ ПЕРВОГО ДОСТИЖЕНИЯ НУЛЯ СЛУЧАЙНЫМ БЛУЖДАНИЕМ СО СНОСОМ

Прасолов Тимофей Вячеславович

✧ *Email: prasolov.tv@yandex.ru; Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск, Россия.*

Мы рассматриваем время достижения нулевого уровня справа $\tau = \min\{n \geq 1 : S_n \leq 0\}$ для случайного блуждания $S_n = \sum_1^n \xi_i, n \geq 1$ с независимыми одинаково распределёнными слагаемыми и отрицательным сносом $\mathbb{E}\xi = -a < 0$. Пусть $\xi^+ = \max(0, \xi_1)$. Хорошо известно, что для любых $\alpha > 1$ конечность $\mathbb{E}(\xi^+)^\alpha$ влечёт конечность $\mathbb{E}\tau^\alpha$ и, для любых $\lambda > 0$, конечность $\mathbb{E}\exp(\lambda\xi^+)$ влечёт конечность $\mathbb{E}\exp(c\tau)$, где $c > 0$ константа, которая, в общем случае, зависит от распределения ξ_1. Мы рассматриваем промежуточный случай, когда $\mathbb{E}\exp(g(\xi^+)) < \infty$ для положительной возрастающей функции g, такой что $\liminf_{x\to\infty} g(x)/\log x = \infty$ и $\limsup_{x\to\infty} g(x)/x = 0$, и $\mathbb{E}\exp(\lambda\xi^+) = \infty$ для любых $\lambda > 0$. В предположении дополнительных технических условий, мы показываем, что $\mathbb{E}\exp((1-\varepsilon)g((1-\delta)a\tau)) < \infty$ для любых $\varepsilon, \delta \in (0, 1)$.

СТАБИЛЬНОСТЬ И НЕСТАБИЛЬНОСТЬ СИСТЕМ СЛУЧАЙНОГО МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА С МЕХАНИЗМОМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ПОДПИТКИ

Резлер Александр Вадимович

✧ *Email: rezlers123@gmail.com; Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск, Россия.*

В докладе будут изложены результаты статьи А.В. Резлера и М.Г. Чебунина «Стабильность и нестабильность систем случайного множественного доступа с механизмом энергетической подпитки». Статья основана на работе С.Г. Фосса, Д.К. Кима и А.М. Тюрликова «Stability and instability of a random multiple access model with adaptive energy harvesting», в которой были исследованы области стабильности и нестабильности модели классической синхронизированной системы случайного множественного доступа с одним передающим прибором, управляемой протоколом передачи данных ALOHA и дополнительно снабженной механизмом энергетической подпитки. В отличие от стандартной системы ALOHA, в данной модели предполагается, что у каждого сообщения есть батарейка, принимающая одну единицу заряда, и при том только сообщения с заряженной батарейкой могут быть переданы на передающий прибор. Помимо практических приложений, такая модификация позволяет расширить область стабильности системы. Основным объектом изучения нашей работы является обобщение вышеупомянутой модели, состоящее в предположении, что сообщения вместо батарейки с одной ячейкой заряда имеют батарейку неограниченной вместимости. Результатом работы является теорема о сохранении областей стабильности обобщенной модели. В настоящее время мы работаем над модификацией модели, заключающейся в том, что “залежавшиеся” заряженные сообщения со временем теряют свой заряд. Актуальность модификации возникла из практических приложений исследуемых систем.

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К ИГРЕ В УГАДЫВАНИЕ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

Смирнов Иван Андреевич

✧ *Email: i.smirnov@g.nsu.ru; Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск, Россия.*

Рассмотрим следующую игру: Пусть задан некоторый вопрос, на который существует n возможных вариантов ответа $O_1, \dots, O_n$. В каждом раунде игры правильный ответ на вопрос выбирается случайно. Вероятность для каждого возможного варианта ответа O_i быть правильным задана и равна $r_i \quad r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n > 0$. Игрок $\mathcal{A}$ знает вопрос и вероятности $r_1, \dots, r_n$. Игрок $\mathcal{B}$, помимо этого, знает правильный ответ. $\mathcal{B}$ предлагает $\mathcal{A}$ угадать, какой ответ правильный, выбирая из к вариантов. Задача $\mathcal{B}$ – по правильному ответу подобрать $k-1$ вариант так, чтобы вероятность угадать $\mathcal{A}$ была наименьшей. Задача $\mathcal{A}$ – получить алгоритм угадывания из k вариантов, при котором вероятность угадывания будет наибольшей.

Целями данной работы являются: построение математической модели для этой игры, получение оптимальных смешанных стратегий для обоих игроков, а так же нахождение вероятностей угадывания правильного ответа, если игроки придерживаются оптимальных смешанных стратегий.

Математическая модель данной задачи представляет собой матричную игру с нулевой суммой. В терминах теории игр удалось получить верхнюю и нижнюю цену игры, а также чистые стратегии обоих игроков. Из чего можно сделать вывод, что решения в чистых стратегиях у игры нет. К сожалению, для решения игры в смешанных стратегиях и получения цены игры данная постановка не пригодна с вычислительной точки зрения. Платежная матрица имеет размерность $(C_{k-1}^{n-1})^n \times k^{C_k^n}$. Классический подход решения матричных игр предполагает решения задачи линейного программирования с системой ограничений — платежной матрицей. Так как матрица имеет скорость роста много выше экспоненциальной (по количеству вариантов ответа), решение получить невозможно даже для малых n и k. В рамках этой работы предложен подход к построению системы уравнений размерности много меньшей, чем исходная, основывающиеся на применении байесовской теории.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДЛИНЫ КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ В ОБОБЩЁННОМ ГРАФЕ БАРАКА – ЭРДЁША

Тесемников Павел Игоревич

✧ *Email: tesemnikov.p@gmail.com; Новосибирский Государственный Университет и Институт Математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск, Россия.*

Мы рассматриваем ориентированную версию графа Эрдёша – Реньи – случайный граф $\mathcal{G}_n$ с множеством вершин $\mathcal{V}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ и случайным множеством направленных рёбер $\mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{V}_n^2$. Будем предполагать, что все рёбра направлены из меньших вершин в бóльшие и при $i < j$ обозначать через

$$p_{i,j}(n) := \mathbb{P}\left((i, j) \in \mathcal{E}_n\right).$$

Предположим к тому же, что события $\{(i, j) \in \mathcal{E}_n\}$ независимы в совокупности.

В случае, если $p_{i,j}(n)$ не зависит от общего количества вершин n и вершин i и j, граф $\mathcal{G}_n$ называется графом Барака – Эрдёша. Мы изучаем обобщение модели Барака – Эрдёша, предполагая, что $p_{i,j}(n)$ является функцией от i, j и n.

Длиной пути в графе $\mathcal{G}_n$ мы будем называть количество входящих в него рёбер. Обозначим через L_n длину минимального пути между вершинами 0 и n.

Будем предполагать, что

$$p_{i,j}(n) = \frac{f(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})}{n^\gamma},$$

где $f(x, y)$ – функция, интегрируемая по Риману на $[0, 1]^2$, а $\gamma \in (0, 1)$ – положительная постоянная.

Приведём основной результат нашего исследования.

Теорема. *Пусть $\gamma = 1 - 1/k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(L_n = k + 1) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(L_n = k) = \exp\left(-c_k(f)\right),$$

где

$$c_k(f) = \int_{0<u_1<\ldots<u_{k-1}<1} \prod_{j=0}^{k-1} f(u_j, u_{j+1}) du_1 \cdots du_{k-1} \in [0, \infty],$$

$u_0 = 0$ *и* $u_k = 1$.

Доклад основан на совместной работе с Бастиеном Маллейном и подготовлен при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2022-282.

АКТУАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В ПОЛНОГЕНОМНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ АССОЦИАЦИЙ

Трушин Александр Алексеевич

✧ *Email: a.trushin@g.nsu.ru ; Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск, Россия.*

Полногеномные анализы ассоциаций (ПГАА) – это область генетических исследований, целью которых является нахождение геномных регионов, ассоциированных с риском развития болезней человека. В рамках ПГАА на популяционных выборках людей анализируются ассоциации между исследуемым признаком и большим числом генетических маркеров, равномерно расположенных по геному. Данный доклад посвящён актуальным задачам ПГАА и направлениям работы по построению более точных моделей ПГАА.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДЛИНЫ И ВЫСОТЫ ЦИКЛА РЕГЕНЕРАЦИИ У СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ СО СНОСОМ

Цыбульский Дмитрий Юрьевич

✧ *Email: d.tsybulskii@g.nsu.ru; Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск, Россия.*

Рассматривается простое случайное блуждание со скачками величины $+1$ и -1 и с ненулевым сносом, при условии, что его траектория на бесконечном интервале времени не посещает отрицательную полуось. Такое случайное блуждание имеет регенерирующую структуру, порождаемую моментами времени, в которые вся предыдущая траектория случайного блуждания лежит ниже значения в текущий момент времени, а вся последующая траектория не ниже чем значение в текущий момент. В работе изучается распределение длин и высот циклов регенерации этого процесса. Показывается, что поиск распределения сводится к комбинаторной задаче на поиск “неразложимых” путей, а также приводятся рекуррентные соотношения, позволяющие вычислять распределения длины и высоты цикла регенерации.

АСИМПТОТИКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТА ВЫХОДА ЗА НЕВОЗРАСТАЮЩУЮ ГРАНИЦУ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Шелепова Анастасия Дмитриевна

✧ *Email: a.shelepova@g.nsu.ru; Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск, Россия.*

Мы исследуем вероятность того, что однородный обобщенный процесс восстановления (ОПВ), который известен также как случайное блуждание с непрерывным временем, до некоторого момента времени T остается выше некоторой невозрастающей границы. При T стремящемся к бесконечности мы находим точную асимптотику этой вероятности. Мы предполагаем, что величины скачков ОПВ имеют нулевые средние и конечные дисперсии, а времена между восстановлениями имеют момент порядка 3/2.

Докладчики

- Боровков Константин Александрович, borovkov@unimelb.edu.au
- Вахтель Виталий Иванович, wachtel@math.uni-bielefeld.de
- Денисов Денис Эдуардович, denis.denisov@manchester.ac.uk
- Ефремов Егор Владимирович, e.efremov@g.nsu.ru
- Запорожец Дмитрий Николаевич, zap1979@gmail.com
- Зуев Сергей Аркадьевич, sergei.zuyev@chalmers.se
- Ишков Роман Сергеевич, ishkov.roman2009@yandex.ru
- Ковалевский Артём Павлович, artyom.kovalevskii@gmail.com
- Коршунов Дмитрий Алексеевич, d.korshunov@lancaster.ac.uk
- Логачев Артём Васильевич, omboldovskaya@mail.ru
- Лотов Владимир Иванович, lotov@math.nsc.ru
- Лукьянов Андрей Евгеньевич, a.lukyanov2@g.nsu.ru
- Могульский Анатолий Альфредович, mogul@math.nsc.ru
- Прасолов Тимофей Вячеславович, prasolov.tv@yandex.ru
- Прокопенко Евгений Игоревич, evgenii.prokopenko@gmail.com
- Резлер Александр Вадимович, rezlers123@gmail.com
- Рыбко Александр Николаевич, arybko@gmail.com
- Саханенко Александр Иванович, aisakh@mail.ru
- Смирнов Иван Андреевич, i.smirnov@g.nsu.ru
- Смородина Наталия Васильевна, smorodina@pdmi.ras.ru
- Тарасенко Антон Сергеевич, dkanus@gmail.com
- Тесемников Павел Игоревич, tesemnikov.p@gmail.com
- Топчий Валентин Алексеевич, topchij@gmail.com
- Трушин Александр Алексеевич, a.trushin@g.nsu.ru
- Фосс Сергей Георгиевич, foss@math.nsc.ru
- Цыбульский Дмитрий Юрьевич, d.tsybulskii@g.nsu.ru
- Чебунин Михаил Георгиевич, chebuninmikhail@gmail.com
- Шелепова Анастасия Дмитриевна, a.shelepova@g.nsu.ru
- Шемякин Аркадий Евгеньевич, a9shemyakin@stthomas.edu