Принципы умеренно больших уклонений для траекторий неоднородных случайных блужданий

Логачев А.В., Могульский А.А.

26 августа 2022 г.

Новосибирск

Кратко о том, что такое умеренно большие уклонения в классической постановке?

Рассмотрим последовательность н.о.р. случайных величин

$$X, X_1, \ldots, X_n, \ldots$$

Пусть $\mathbf{E}X = 0$, $\mathbf{E}X^2 = \sigma^2 > 0$. Тогда справедлива ц.п.т.

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} := \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi \sim N(0, \sigma^2).$$

Отсюда следует, что для любых $a > 0$ и последовательности $x_n \gg \sqrt{n}$ справедливы сходимости

$$\mathbf{P}(S_n > x_n a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \mathbf{P}(S_n < -x_n a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Принцип умеренно больших уклонений направлен на изучение скорости сходимости к 0 при $n \to \infty$ следующих вероятностей

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{x_n} \in A\right),$$

где $0 \notin [A]$, $\widehat{x}_n \gg x_n \gg \sqrt{n}$.

Принцип умеренно больших уклонений является частным случаем больших уклонений, когда грубая экспоненциальная асимптотика приведенной выше вероятности такая же как, если бы $X \sim N(0, \sigma^2)$.

Т.е. грубые теоремы об умеренно больших уклонениях имеют следующий вид

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{x_n} \in A\right) \sim \exp\{-I(A)\psi(n)(1 + o(1))\}, \text{ при } n \to \infty,$$

$I(A) = \inf\limits_{y \in A} \frac{y^2}{2\sigma^2}$ — функционал уклонений, $\psi(n) = \frac{x_n^2}{n}$ — нормирующая функция.

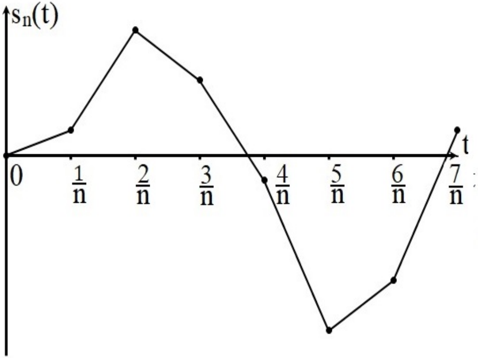
Постановка задачи.

Рассмотрим последовательность X_i, $i \in \mathbb{N}$ независимых случайных величин. Обозначим

$$S_k := \sum_{i=1}^{k} X_i, \quad k \in \mathbb{N},$$

здесь и далее $S_0 := 0$.
Зафиксируем последовательность x_n и определим случайную ломаную $s_n(t)$, $t \in [0,1]$ с узлами в точках

$$\left(\frac{k}{n}, \frac{S_k}{x_n}\right), \quad 0 \le k \le n.$$



Нас будут интересовать большие уклонения для траекторий процесса $s_n(t)$ в пространстве $\mathbb{C}[0,1]$.

Основные предположения.

Будем предполагать, что

$$\mathbf{E}X_i = 0, \quad i \in \mathbb{N} \tag{1}$$

и выполнено следующее условие однородности для дисперсий: существует предел

$$\sigma^2 := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}X_i^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 > 0. \tag{2}$$

Рассмотрим правильно меняющиеся на бесконечности, положительные на полуоси $[0,\infty)$ функции

$$h(t) := t^{\beta} L(t), \tag{3}$$

где $\beta \in [0,1]$, $L(t)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция.

Класс п.м.ф. $h = h(t)$, удовлетворяющих условию (3) обозначим $\mathcal{L}$.

Рассмотрим следующее моментное условие, зависящее от выбора функции $h \in \mathcal{L}$:

$[\mathbf{M}_h]$. Для некоторого $M > 0$ справедливо неравенство

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \mathbf{E} e^{h(|X_i|)} \leq M.$$

Класс уклонений $x := x_n$, которые при выполнении условия $[\mathbf{M}_h]$ удается изучить, определяется функцией h:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\hat{x}_n} = 0, \tag{4}$$

где $\hat{x}_n := \sup\left\{t \ge 0 : \ \frac{t^2}{h(t)} \le n\right\}$.
Отметим, что второе равенство в (4) можно заменить эквивалентным равенством

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{nh(x_n)} = 0.$$

Обозначим класс последовательностей x_n, удовлетворяющих равенствам (4) через $\mathcal{X}(h)$.
Таким образом, если $h = \alpha \ln t$, при $\alpha > 2$, то этот класс достаточно узок:

$$\sqrt{n} \ll x_n \ll \sqrt{n} \ln n;$$

если же $h = ct$, при $c > 0$, то этот класс максимально широк:

$$\sqrt{n} \ll x_n \ll n.$$

Основной результат.

Определение. Последовательность случайных процессов s_n удовлетворяет п.б.у. в метрическом пространстве $(\mathbb{C}[0,1],\rho)$ с функционалом уклонений $I = I(f)$: $\mathbb{C}[0,1] \to [0,\infty]$ и нормирующей функцией $\psi(n)$: $\lim_{n\to\infty} \psi(n) = \infty$, если для любого $c \geq 0$ множество $\{f \in \mathbb{C}[0,1] : I(f) \leq c\}$ является компактом в метрическом пространстве $(\mathbb{C}[0,1],\rho)$ и для любого множества $B \in \mathfrak{B}_{(\mathbb{C}[0,1],\rho)}$ выполнены неравенства

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(s_n \in B\,) \leq -I([B]),$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(s_n \in B\,) \geq -I((B)),$$

где $I(B) = \inf_{y\in B} I(y)$ для $B \in \mathfrak{B}_{(\mathbb{C}[0,1],\rho)}$, $I(\varnothing) = \infty$.

Определим функционал уклонений для винеровского процесса $\frac{\sigma w(nt)}{x_n}$

$$I(f) := \begin{cases} \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^1 (f'(t))^2 dt, & \text{если } f(0) = 0, \ f \in \mathbb{C}_a[0,1], \\ \infty, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Теорема 1. Пусть для фиксированного $h = t^\beta L(t) \in \mathcal{L}$, $\beta \in (0,1)$, выполнено условие $[\mathbf{M}_h]$. Тогда последовательность случайных ломаных $s_n = s_n(t) \in \mathbb{C}[0,1]$ удовлетворяет п.у.б.у. в зоне уклонений $x = x_n \in \mathcal{X}(h)$, т.е. для любого $x_n \in \mathcal{X}(h)$ и для любого $B \in \mathcal{B}$ выполнены соотношения

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{x_n^2} \ln \mathbf{P}(s_n \in B) \le -I([B]),$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{n}{x_n^2} \ln \mathbf{P}(s_n \in B) \ge -I((B)).$$

Теорема 2. Пусть для фиксированного $h = t^\beta L(t) \in \mathcal{L}$ выполнено условие $[\mathbf{M}_h]$. Тогда:
I. Если $\beta = 1$ и функция $L(t)$ не возрастает на полуоси $[0, \infty)$; или
II. Если $\beta = 0$, функция $L(t)$ не убывает на полуоси $[0, \infty)$ и существует предел (возможно бесконечный)

$$\alpha := \lim_{t\to\infty} \left(\frac{h(t)}{\ln t} - 2 \right) > 0,$$

то последовательность случайных ломаных $s_n = s_n(t) \in \mathbb{C}[0,1]$, удовлетворяет п.у.б.у. в зоне уклонений $x = x_n \in \mathcal{X}(h)$.

Отметим, что в этих теоремах впервые рассмотрен неоднородный случай.

Кратко о доказательстве.

Мы используем стандартный подход, предложенный А.А. Пухальским:
I. получить ПБУ для конечномерных распределений;
II. доказать экспоненциальную плотность.

Положим

$$\varphi_{i,n}(\lambda) := \mathbf{E} e^{\lambda \frac{x_n}{n} X_i} \mathbf{I}(|X_i| \le x_n),$$

где $\mathbf{I}(\cdot)$ — индикатор события $\{\cdot\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Следующая лемма дает возможность получить ПБУ для конечномерных распределений.

Лемма 1. Пусть выполнены условия$[\mathbf{M}_h]$ и (4), тогда

$$\varphi_{i,n}(\lambda) \le 1 + \frac{\lambda^2 x_n^2}{2n^2} \sigma_i^2 + f(n, \lambda),$$

$$\varphi_{i,n}(\lambda) \ge 1 + \frac{\lambda^2 x_n^2}{2n^2} \sigma_i^2 - f(n, \lambda),$$

где функция $f(n, \lambda)$ не зависит от i и удовлетворяет соотношению $f(n, \lambda) = o\left(\frac{x_n^2}{n^2}\right)$ при $n \to \infty$.

В работе 1) доказана следующая лемма, с помощью которой доказывается экспоненциальная плотность.

Лемма 2. Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ случайное поле $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n(\vec{\mathbf{t}})$ с вероятностью 1 лежит в $\mathbb{C}_0[0,1]^d$. Пусть для любых $\delta \in (0,1)$, $\varepsilon \in (0,1)$ найдется $N(\delta,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geq N(\delta,\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$\sup_{\vec{\mathbf{s}},\vec{\mathbf{t}}\in[0,1]^d:\ \vec{\mathbf{s}}<\vec{\mathbf{t}},\ |\vec{\mathbf{s}}-\vec{\mathbf{t}}|=\delta} \mathbf{P}\Big(\sup_{\vec{\mathbf{s}}\leq\vec{\mathbf{r}}\leq\vec{\mathbf{t}}} |\mathcal{F}_n(\vec{\mathbf{r}})-\mathcal{F}_n(\vec{\mathbf{s}})| > \varepsilon\Big) \leq C_1(\delta)\exp\Big\{-\psi(n)\frac{\varepsilon^2}{C_2\delta}\Big\},$$

где $C_1(\delta)$, C_2 — положительные константы, $\lim\limits_{n\to\infty}\psi(n) = \infty$.
Тогда последовательность полей $\mathcal{F}_n$ экспоненциально плотна в пространстве $\mathbb{C}[0,1]^d$ с нормирующей функцией $\psi(n)$.

Сравнение с известными результатами.

Во всех предыдущих работах случайные величины $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ — н.о.р.

1) А.А. Боровков (1967) классическая,
• требуется условие Крамера $[\mathbf{C}_0]$, т. е. $h = ct$, $c > 0$, также требуется, чтобы $\sqrt{n \ln \ln n} \ll x_n \ll n$.

2) А.А. Могульский (1976),
• $h = ct^\beta$, $\beta \in (0,1)$ $c > 0$, также требуется, чтобы $\sqrt{n} \ll x_n \ll n^{\frac{1}{2-\beta}}$.

3) А.А. Боровков, А.А. Могульский (статья) и 4) А.А. Боровков (монография) (2013),
• требуется условие $[\mathbf{C}(\beta)]$, т. е. $h(t) = t^\beta L(t)$, где $\beta \in (0,1)$, $L(t)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция.

Если выполнено условие $[\mathbf{C}(\beta)]$, то условие (4) примет вид

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^{2-\beta}}{nL(x_n)} = 0. \tag{5}$$

В работах 3) требуется дополнительное условие на приращения функции $h(t)$ и по другому выглядит условие (4)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{v^{(-1)}(1/n)} = 0, \tag{6}$$

где $v^{(-1)}$ — обратная функция к функции

$$v(n) = h(n)n^{-2} = n^{\beta-2}L(n).$$

Можно показать, что зоны, определяемые условиями (6) и (5) при одинаковых функциях h совпадают.

5) А.А. Боровков (2022), требуется чтобы было выполнено условие [**C**(β)], где $\beta \in (0,1)$ и не требуется никаких условий на приращения функции $h(t)$.

Отметим также работы 6) А.А. Пухальский (1994) и 7) H. Djellout (2002), в них получен п.у.б.у. для скачкообразных процессов построенных по мартингальным разностям, а также работу 8) Y. Hu, T.–Y. (2003) Lee, в ней получен п.у.б.у. для ломаных, построенных по независимым одинаково распределенным с.в. принимающих значения из некоторого банахова пространства при условии аналогичному экспоненциальному условию Крамера.

1) A.V. Logachov, A.A. Mogulskii, Exponential tightness for integral–type functionals of centered independent differently distributed random variables, Siberian Electronic Mathematical Reports, 2022, v. 19(1), p. 273–284.

2) А.А. Боровков, Граничные задачи для случайных блужданий и большие уклонения в функциональных пространствах, Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. 12(4), с. 635–654.

3) А.А. Могульский, Большие уклонения для траекторий многомерных случайных блужданий, Теория вероятн. и ее примен., 1976, 21(2), с. 309–323.

4) А.А. Боровков, А.А. Могульский, Принципы умеренно больших уклонений для траектории случайных блужданий и процессов с независимыми приращениями, Теория вероятн. и ее примен., 2013, т. 58(4), с. 648–671.

5) А.А. Боровков, Асимптотический анализ случайных блужданий. Быстроубывающие распределения приращений, М., 2013.

6) А.А. Боровков, Характеризация семиэкспоненциальных распределений и принципы больших уклонений (в печати).

7) A. Puhalskii, Large deviations of semimartingales via convergence of the predictable characteristics, Stochastics and Stochastic Reports, 1994, v. 49(1–2), p. 27–85.

8) H. Djellout, Moderate deviations for martingale differences and applications to $\phi-$mixing sequences, Stochastics and Stochastic Reports, 2002, v. 73(1–2), p. 37–64.

9) Y. Hu, T.–Y. Lee, Moderate Deviation Principles for Trajectories of Sums of Independent Banach Space Valued Random Variables, Transactions of the American Mathematical Society, 2003, v. 355(8), p. 3047–3064.


That's all Folks!