Подход Multi-Normex для аппроксимации суммы случайных векторов с тяжелыми хвостами

Прокопенко Е.И.,
совместно с M. Kratz (ESSEC Business School, Paris)

26 Августа 2022

Содержание

Содержание

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

$$S_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n,$$

где $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ – неотрицательные н.о.р. с.в. с абсолютно-непрерывным распределением.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

$$S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n,$$

где $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ – неотрицательные н.о.р. с.в. с абсолютно-непрерывным распределением.

$$S_n \overset{d}{\sim} ???$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ О НОРМАЛЬНОСТИ

Предположение о нормальности

Теорема (ЦПТ)

Если $0 < \mathrm{D}\xi < \infty$, *то при* $n \to \infty$

$$\frac{S_n - n\,\mathrm{E}\xi}{\sqrt{n\,\mathrm{D}\xi}} \xrightarrow{d} \eta \sim \mathcal{N}_{0,1}.$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ О НОРМАЛЬНОСТИ

Теорема (ЦПТ)

Если $0 < \mathrm{D}\xi < \infty$, *то при* $n \to \infty$

$$\frac{S_n - n\,\mathrm{E}\xi}{\sqrt{n\,\mathrm{D}\xi}} \xrightarrow{d} \eta \sim \mathcal{N}_{0,1}.$$

Теорема (Неравенство Берри-Эссеена)

Если $0 < \sigma := \sqrt{\mathrm{D}\xi} < \infty, \rho := \mathrm{E}\left|\xi - \mathrm{E}\xi\right|^3 < \infty$, *то*

$$\sup_x \left|\mathrm{P}\left(S_n < x\right) - \mathrm{P}\left(n\mathrm{E}\xi + \sqrt{n}\,\sigma \cdot \eta < x\right)\right| < \frac{C\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ О НОРМАЛЬНОСТИ

Теорема (ЦПТ)

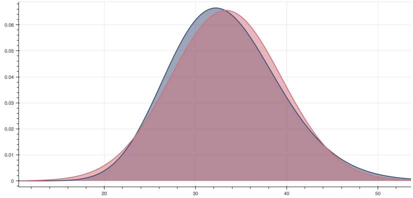
Если $0 < \mathrm{D}\xi < \infty$, *то при* $n \to \infty$

$$\frac{S_n - n\,\mathrm{E}\xi}{\sqrt{n\,\mathrm{D}\xi}} \xrightarrow{d} \eta \sim \mathcal{N}_{0,1}.$$

Теорема (Неравенство Берри-Эссеена)

Если $0 < \sigma := \sqrt{\mathrm{D}\xi} < \infty, \rho := \mathrm{E}\left|\xi - \mathrm{E}\xi\right|^3 < \infty$, *то*

$$\sup_x \left|\mathrm{P}\left(S_n < x\right) - \mathrm{P}\left(n\mathrm{E}\xi + \sqrt{n}\,\sigma \cdot \eta < x\right)\right| < \frac{C\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$



ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ О НОРМАЛЬНОСТИ

Теорема (ЦПТ)

Если $0 < \mathrm{D}\xi < \infty$, *то при* $n \to \infty$

$$\frac{S_n - n\,\mathrm{E}\xi}{\sqrt{n\,\mathrm{D}\xi}} \xrightarrow{d} \eta \sim \mathcal{N}_{0,1}.$$

Теорема (Неравенство Берри-Эссеена)

Если $0 < \sigma := \sqrt{\mathrm{D}\xi} < \infty, \rho := \mathrm{E}\,|\xi - \mathrm{E}\xi|^3 < \infty$, *то*

$$\sup_x \left|\mathrm{P}\left(S_n < x \right) - \mathrm{P}\left(n\mathrm{E}\xi + \sqrt{n}\,\sigma \cdot \eta < x \right)\right| < \frac{C\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ О НОРМАЛЬНОСТИ

Теорема (ЦПТ)

Если $0 < \mathrm{D}\xi < \infty$, *то при* $n \to \infty$

$$\frac{S_n - n\,\mathrm{E}\xi}{\sqrt{n\,\mathrm{D}\xi}} \xrightarrow{d} \eta \sim \mathcal{N}_{0,1}.$$

Теорема (Неравенство Берри-Эссеена)

Если $0 < \sigma := \sqrt{\mathrm{D}\xi} < \infty, \rho := \mathrm{E}\,|\xi - \mathrm{E}\xi|^3 < \infty$, *то*

$$\sup_x \left|\mathrm{P}\left(S_n < x\right) - \mathrm{P}\left(n\mathrm{E}\xi + \sqrt{n}\,\sigma \cdot \eta < x\right)\right| < \frac{C\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$

Теорема (Обобщенное неравенство Берри-Эссеена)

Если $0 < \sigma := \sqrt{\mathrm{D}\xi} < \infty, \mathrm{E}\,|\xi|^\alpha < \infty,\ \alpha \in [2,3]$, *то*

$$\sup_x \left|\mathrm{P}\left(S_n < x\right) - \mathrm{P}\left(n\mathrm{E}\xi + \sqrt{n}\,\sigma \cdot \eta < x\right)\right| < \frac{C\mathrm{E}\,|\xi|^\alpha}{\sigma^\alpha n^{(\alpha-2)/2}}.$$

ПРОБЛЕМЫ аппроксимации В ЦПТ

ПРОБЛЕМЫ аппроксимации В ЦПТ

Теорема (Неравенство Берри-Эссеена)

Если $0 < \sigma := \sqrt{\mathrm{D}\xi} < \infty, \rho := \mathrm{E}\left|\xi - \mathrm{E}\xi\right|^3 < \infty$, *то*

$$\sup_{y<x} \left|\mathrm{P}\left(y < S_n < x\right) - \mathrm{P}\left(y < n\mathrm{E}\xi + \sqrt{n}\,\sigma \cdot \eta < x\right)\right| < \frac{C\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$

ПРОБЛЕМЫ аппроксимации В ЦПТ

Теорема (Неравенство Берри-Эссеена)

Если $0 < \sigma := \sqrt{\mathrm{D}\xi} < \infty, \rho := \mathrm{E}\,|\xi - \mathrm{E}\xi|^3 < \infty$, *то*

$$\sup_{y<x} \left| \mathrm{P}\left(y < S_n < x\right) - \mathrm{P}\left(y < n\mathrm{E}\xi + \sqrt{n}\,\sigma \cdot \eta < x\right) \right| < \frac{C\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$

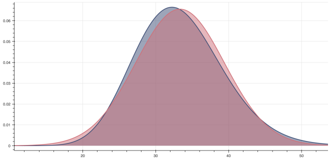


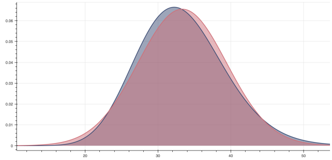
Рис.: аппроксимация суммы экспоненциальных $(\alpha = 1, n = 30)$.

ПРОБЛЕМЫ аппроксимации В ЦПТ

Теорема (Неравенство Берри-Эссеена)

Если $0 < \sigma := \sqrt{\mathrm{D}\xi} < \infty, \rho := \mathrm{E}\,|\xi - \mathrm{E}\xi|^3 < \infty$, *то*

$$\sup_{y<x} \left| \mathrm{P}\left(y < S_n < x\right) - \mathrm{P}\left(y < n\mathrm{E}\xi + \sqrt{n}\,\sigma \cdot \eta < x\right)\right| < \frac{C\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$



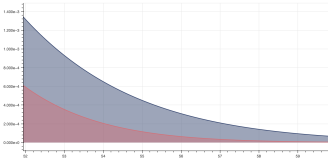


Рис.: аппроксимация суммы экспоненциальных ($\alpha = 1, n = 30$).

ПРОБЛЕМЫ аппроксимации В ЦПТ

Теорема (Неравенство Берри-Эссеена)

Если $0 < \sigma := \sqrt{\mathrm{D}\xi} < \infty, \rho := \mathrm{E}\left|\xi - \mathrm{E}\xi\right|^3 < \infty$, *то*

$$\sup_{y<x}\left|\mathrm{P}\left(y < S_n < x\right) - \mathrm{P}\left(y < n\mathrm{E}\xi + \sqrt{n}\,\sigma\cdot\eta < x\right)\right| < \frac{C\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$

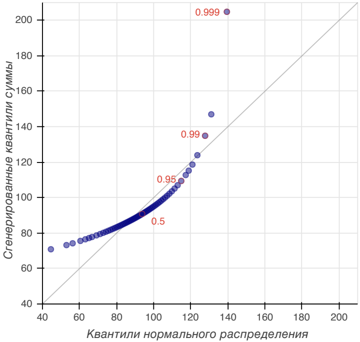


Рис.: QQ-plot для аппроксимации суммы Парето ($\alpha = 2.3$, $n = 52$).

ОБЪЯСНЕНИЕ?

ОБЪЯСНЕНИЕ?

[Принцип Одного Большого Скачка]

$$\mathrm{P}\left(S_n > x\right) \sim \mathrm{P}\left(\max\{\xi_1, \cdots, \xi_n\} > x\right), \quad \text{при } x \to \infty.$$

ОБЪЯСНЕНИЕ?

[Принцип Одного Большого Скачка]

$$\mathrm{P}\left(S_n > x \right) \sim \mathrm{P}\left(\max\{\xi_1, \cdots, \xi_n\} > x \right), \quad \text{при } x \to \infty.$$

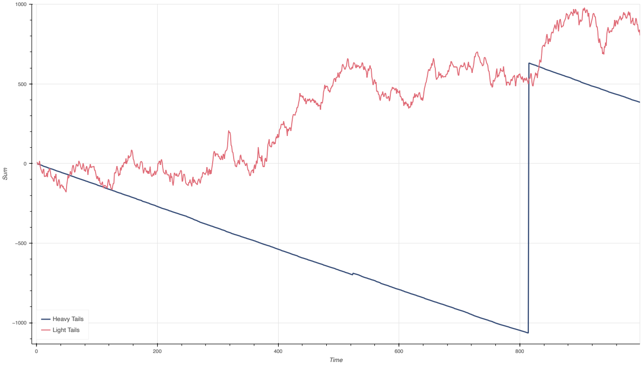


Рис.: Траектории S_n для легких и тяжелых хвостов.

ОБЪЯСНЕНИЕ?

[Принцип Одного Большого Скачка]

$$\mathrm{P}\left(S_n > x\right) \sim \mathrm{P}\left(\max\{\xi_1, \cdots, \xi_n\} > x\right), \quad \text{при } x \to \infty.$$

ОБЪЯСНЕНИЕ?

[Принцип Одного Большого Скачка]

$$\mathrm{P}\left(S_n > x \right) \sim \mathrm{P}\left(\max\{\xi_1, \cdots, \xi_n\} > x \right), \quad \text{при } x \to \infty.$$

Опр.(Класса $\mathcal{RV}_\alpha, \alpha > 0$)

$\mathrm{P}\left(\xi > x \right) = L(x)x^{-\alpha}$, где $L(x)$ – медленно меняющаяся функция (м.м.ф.)

$$\left(\frac{L(tx)}{L(x)} \to 1 \quad \text{при } x \to \infty \text{ для всех } t > 0 \right).$$

ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Теорема (Fisher–Tippett–Гнеденко(1943))

Если $\xi \in \mathcal{RV}_\alpha, \alpha > 0$, *то найдутся* $a_n > 0, b_n \in \mathbb{R}$ *такие, что при* $n \to \infty$

$$\frac{\max\{\xi_1, \cdots, \xi_n\} - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} \zeta \sim \mathcal{F}_\alpha.$$

ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Теорема (Fisher–Tippett–Гнеденко(1943))

Если $\xi \in \mathcal{RV}_\alpha, \alpha > 0$, *то найдутся* $a_n > 0, b_n \in \mathbb{R}$ *такие, что при* $n \to \infty$

$$\frac{\max\{\xi_1, \cdots, \xi_n\} - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} \zeta \sim \mathcal{F}_\alpha.$$

Теорема (de Haan and Resnick (1996))

Если $g_\xi \in 2-\textit{von Mises}(\alpha, \rho)$, $\alpha, \rho > 0$, *то найдутся* $a_n > 0, b_n \in \mathbb{R}$ *такие, что*

$$\sup_x \left|\mathrm{P}\left(\max\{\xi_1, \cdots, \xi_n\} < x\right) - \mathrm{P}\left(b_n + a_n \cdot \zeta < x\right)\right| = L(n)n^{-\rho}.$$

ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Теорема (Fisher–Tippett–Гнеденко(1943))

Если $\xi \in \mathcal{RV}_\alpha, \alpha > 0$, *то найдутся* $a_n > 0, b_n \in \mathbb{R}$ *такие, что при* $n \to \infty$

$$\frac{\max\{\xi_1, \cdots, \xi_n\} - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} \zeta \sim \mathcal{F}_\alpha.$$

Теорема (de Haan and Resnick (1996))

Если $\xi \in 2\mathcal{RV}_{\alpha,\rho}$, $\alpha, \rho > 0$, *то найдутся* $a_n > 0, b_n \in \mathbb{R}$ *такие, что*

$$\sup_x |\mathrm{P}\left(\max\{\xi_1, \cdots, \xi_n\} < x\right) - \mathrm{P}\left(b_n + a_n \cdot \zeta < x\right)| = L(n) n^{-\min\left(1, \frac{\rho}{\alpha}\right)}.$$

ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Теорема (Fisher–Tippett–Гнеденко(1943))

Если $\xi \in \mathcal{RV}_\alpha, \alpha > 0$, *то найдутся* $a_n > 0, b_n \in \mathbb{R}$ *такие, что при* $n \to \infty$

$$\frac{\max\{\xi_1, \cdots, \xi_n\} - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} \zeta \sim \mathcal{F}_\alpha.$$

Теорема (de Haan and Resnick (1996))

Если $\xi \in 2\mathcal{RV}_{\alpha,\rho}$, $\alpha, \rho > 0$, *то найдутся* $a_n > 0, b_n \in \mathbb{R}$ *такие, что*

$$\sup_x |\mathrm{P}\left(\max\{\xi_1, \cdots, \xi_n\} < x \right) - \mathrm{P}\left(b_n + a_n \cdot \zeta < x \right)| = L(n) n^{-\min\left(1, \frac{\rho}{\alpha}\right)}.$$

Лемма (Hua and Joe (2011))

$\xi \in 2\mathcal{RV}_{\alpha,\rho}, \alpha, \rho > 0$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{P}\left(\xi > x \right) = cx^{-\alpha}(1 + L(x)x^{-\rho}),$$

где $c > 0, L(x)$ *– м.м.ф.*

ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Пример (Pareto-Lomax).

$$\bar{F}_\xi(x) = (1+x)^{-\alpha}, x > 0; \quad \xi \in 2\mathcal{RV}_{\alpha,1}.$$

ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Пример (Pareto-Lomax).

$$\bar{F}_\xi(x) = (1+x)^{-\alpha}, x > 0; \quad \xi \in 2\mathcal{RV}_{\alpha,1}.$$

Для $a_n = n^{1/\alpha}$, $b_n = 0$

$$\left| F_\xi^n\left(a_n x + b_n\right) - e^{-x^{-\alpha}} \right| = \left| \left(1 - \left(1 + n^{1/\alpha} x\right)^{-\alpha}\right)^n - e^{-x^{-\alpha}} \right| = O(n^{-1/\alpha}).$$

ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Пример (Pareto-Lomax).

$$\bar{F}_\xi(x) = (1+x)^{-\alpha}, x > 0; \quad \xi \in 2\mathcal{RV}_{\alpha,1}.$$

Для $a_n = n^{1/\alpha}$, $b_n = 0$

$$\left| F_\xi^n\left(a_n x + b_n\right) - e^{-x^{-\alpha}} \right| = \left| \left(1 - \left(1 + n^{1/\alpha} x\right)^{-\alpha}\right)^n - e^{-x^{-\alpha}} \right| = O(n^{-1/\alpha}).$$

Пример (Pareto).

$$\bar{F}_\xi(x) = x^{-\alpha}, x > 1; \quad \xi \in 2\mathcal{RV}_{\alpha,\infty}.$$

Теория экстремальных значений

Пример (Pareto-Lomax).

$$\bar{F}_\xi(x) = (1+x)^{-\alpha}, x > 0; \quad \xi \in 2\mathcal{RV}_{\alpha,1}.$$

Для $a_n = n^{1/\alpha}$, $b_n = 0$

$$\left| F_\xi^n(a_n x + b_n) - e^{-x^{-\alpha}} \right| = \left| \left(1 - \left(1 + n^{1/\alpha} x\right)^{-\alpha}\right)^n - e^{-x^{-\alpha}} \right| = O(n^{-1/\alpha}).$$

Пример (Pareto).

$$\bar{F}_\xi(x) = x^{-\alpha}, x > 1; \quad \xi \in 2\mathcal{RV}_{\alpha,\infty}.$$

Для $a_n = n^{1/\alpha}$, $b_n = 0$

$$\left| F_\xi^n(a_n x + b_n) - e^{-x^{-\alpha}} \right| = \left| \left(1 - \frac{x^{-\alpha}}{n}\right)^n - e^{-x^{-\alpha}} \right| = O(n^{-1}).$$

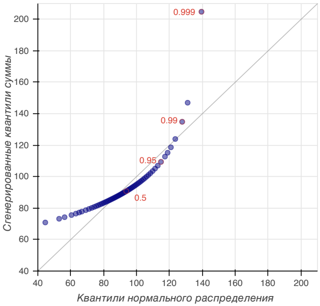
ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

$$\mathrm{P}\left(S_n > x\right) \sim \mathrm{P}\left(\max\{\xi_1, \cdots, \xi_n\} > x\right) \sim \mathrm{P}\left(b_n + a_n \cdot \zeta < x\right).$$

ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

$$\mathrm{P}\left(S_n > x \right) \sim \mathrm{P}\left(\max\{\xi_1, \cdots, \xi_n\} > x \right) \sim \mathrm{P}\left(b_n + a_n \cdot \zeta < x \right).$$



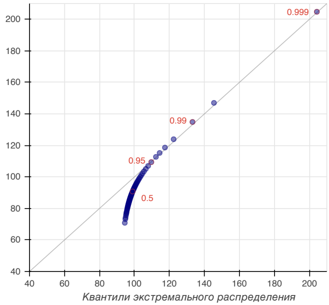


Рис.: QQ-plots для аппроксимации суммы Парето ($\alpha = 2.3, n = 52$).

Содержание

ИДЕЯ NORM(al)-EX(tremes) МЕТОДА

ИДЕЯ NORM(al)-EX(tremes) МЕТОДА

Обозначим через $\xi_{(1)} \leq \dots \leq \xi_{(n)}$ порядковые статистики.

ИДЕЯ NORM(al)-EX(tremes) МЕТОДА

Обозначим через $\xi_{(1)} \leq \cdots \leq \xi_{(n)}$ порядковые статистики. Тогда

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_{(i)} =: T_{n-1} + \xi_{(n)}.$$

ИДЕЯ NORM(al)-EX(tremes) МЕТОДА

Обозначим через $\xi_{(1)} \leq \cdots \leq \xi_{(n)}$ порядковые статистики. Тогда

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_{(i)} =: T_{n-1} + \xi_{(n)}.$$

Оказывается, что

$$\mathcal{L}\left(T_{n-1} \,|\, \xi_{(n)} = x\right) = \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i(x)\right),$$

где $\xi_i(x)$ – н.о.р. с распределением $\mathrm{P}\left(\xi(x) \in B\right) = \mathrm{P}\left(\xi \in B \,|\, \xi < x\right)$.

ИДЕЯ NORM(al)-EX(tremes) МЕТОДА

Обозначим через $\xi_{(1)} \leq \cdots \leq \xi_{(n)}$ порядковые статистики. Тогда

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_{(i)} =: T_{n-1} + \xi_{(n)}.$$

Оказывается, что

$$\mathcal{L}\left(T_{n-1} \,|\, \xi_{(n)} = x\right) = \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i(x)\right),$$

где $\xi_i(x)$ – н.о.р. с распределением $\mathrm{P}\left(\xi(x) \in B\right) = \mathrm{P}\left(\xi \in B \,|\, \xi < x\right)$.

ИДЕЯ NORM(al)-EX(tremes) МЕТОДА

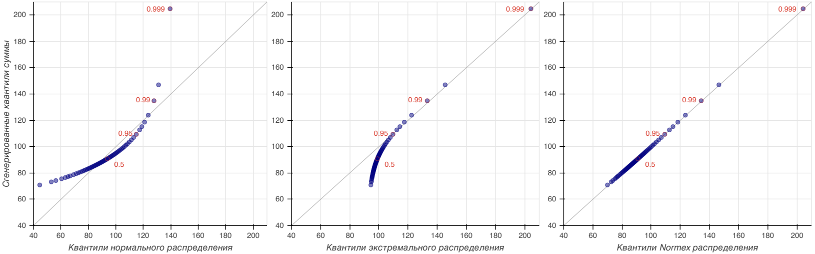
Обозначим через $\xi_{(1)} \le \dots \le \xi_{(n)}$ порядковые статистики. Тогда

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_{(i)} =: T_{n-1} + \xi_{(n)}.$$

Оказывается, что

$$\mathcal{L}\left(T_{n-1} \,|\, \xi_{(n)} = x\right) = \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i(x)\right),$$

где $\xi_i(x)$ – н.о.р. с распределением $\mathrm{P}\left(\xi(x) \in B\right) = \mathrm{P}\left(\xi \in B \,|\, \xi < x\right)$.



NORMEX МЕТОД

NORMEX МЕТОД

Опр. (Normex распределения)

$$G_{\alpha,n}(B) := \mathrm{P}\left(\eta_n + (b_n + a_n \zeta_\alpha) \in B \right),$$

где $\zeta_\alpha \sim \text{Fréchet}(\alpha)$, с.в. η_n, при условии $b_n + a_n \cdot \zeta_\alpha = x$, имеет распределение $\mathcal{N}_{(n-1)\mu(x),(n-1)\sigma^2(x)}$ и

$$\mu(x) := \mathrm{E}\xi(x),\ \sigma^2(x) := \mathrm{D}\xi(x).$$

NORMEX МЕТОД

Опр. (Normex распределения)

$$G_{\alpha,n}(B) := \mathrm{P}\left(\eta_n + (b_n + a_n\zeta_\alpha) \in B \right),$$

где $\zeta_\alpha \sim \text{Fréchet}(\alpha)$, с.в. η_n, при условии $b_n + a_n \cdot \zeta_\alpha = x$, имеет распределение $\mathcal{N}_{(n-1)\mu(x),(n-1)\sigma^2(x)}$ и

$$\mu(x) := \mathrm{E}\xi(x), \ \sigma^2(x) := \mathrm{D}\xi(x).$$

Теорема (Kratz (2014); Müller (2019); Kratz, П. (2022))

Пусть $\xi \in 2\mathcal{RV}_{\alpha,\rho}, \alpha \in (2,3], \rho > 0$. *Тогда*

$$\sup_x \left|\mathrm{P}\left(S_n < x \right) - G_{\alpha,n}((-\infty, x))\right| \leq \left(n^{-\frac{1}{2}+\frac{3-\alpha}{\alpha}} + n^{-\min\left(1,\frac{\rho}{\alpha}\right)} \right) L(n),$$

где $L(n)$ *– м.м.ф.*

Содержание

МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

$$\vec{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\xi}_i, \text{ где } \left\{\vec{\xi}_i\right\}_{i=1}^{\infty} \text{ – н.о.р. с а.н.р. в } \mathbb{R}^d.$$

МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

$$\vec{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\xi}_i, \text{ где } \left\{\vec{\xi}_i\right\}_{i=1}^{\infty} \text{ – н.о.р. с а.н.р. в } \mathbb{R}^d.$$

$$\vec{S}_n \overset{d}{\sim} ???$$

ИДЕЯ MRV-NORMEX МЕТОДА

ИДЕЯ MRV-NORMEX МЕТОДА

Обозначим $||\vec{\xi}_{(1)}|| \leq \dots \leq ||\vec{\xi}_{(n)}||$ порядковые статистики.

Идея MRV-NORMEX метода

Обозначим $||\vec{\xi}_{(1)}|| \leq \cdots \leq ||\vec{\xi}_{(n)}||$ порядковые статистики. Тогда

$$\vec{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\xi}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{\xi}_{(i)} = \vec{T}_{n-1} + \vec{\xi}_{(n)}.$$

ИДЕЯ MRV-NORMEX МЕТОДА

Обозначим $||\vec{\xi}_{(1)}|| \leq \dots \leq ||\vec{\xi}_{(n)}||$ порядковые статистики. Тогда

$$\vec{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\xi}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{\xi}_{(i)} = \vec{T}_{n-1} + \vec{\xi}_{(n)}.$$

$$\mathcal{L}\left(\vec{T}_{n-1} \,|\, ||\vec{\xi}_{(n)}|| = x\right) = \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \vec{\xi}_i(x)\right),$$

где $\vec{\xi}_i(x)$ – н.о.р. с распределением

$$\mathrm{P}\left(\vec{\xi}(x) \in B\right) = \mathrm{P}\left(\vec{\xi} \in B \,|\, ||\vec{\xi}|| < x\right).$$

ИДЕЯ MRV-NORMEX МЕТОДА

Опр. (Класса $\mathcal{MRV}_\alpha, \alpha > 0$)

С.в. $\vec{\xi}$ принадлежит $MRV_\alpha, \alpha > 0$, если найдется с.в. $\vec{\Theta} \in \mathbb{R}^d$ со значениями на единичной сфере $\mathcal{S}_1$ относительно нормы $\|\cdot\|$, такой что, для всех $t > 0$,

$$\frac{\mathrm{P}\left(\|\vec{\xi}\| > tu, \vec{\xi}/\|\vec{\xi}\| \in \cdot\right)}{\mathrm{P}\left(\|\vec{\xi}\| > u\right)} \to t^{-\alpha}\mathrm{P}\left(\vec{\Theta} \in \cdot\right) \quad \text{при} \quad u \to \infty.$$

MRV-Normex метод

Опр. (MRV-Normex распределения)

$$GM_{\alpha,n}(B) := \mathrm{P}\left(\vec{\eta}_n + (b_n + a_n \zeta_\alpha)\vec{\Theta} \in B \right),$$

где $\zeta_\alpha \sim \text{Fréchet}(\alpha)$, с.в. $\vec{\eta}_n \perp\!\!\!\perp \vec{\Theta}$, и при условии $b_n + a_n \cdot \zeta_\alpha = x$, $\vec{\eta}_n$ имеет распределение $\mathcal{N}_{(n-1)\vec{\mu}(x),(n-1)\Sigma(x)}$,

$$\vec{\mu}(x) := \mathrm{E}\vec{\xi}(x),\ \ \Sigma(x) := \mathrm{Cov}\,\vec{\xi}(x).$$

MRV-NORMEX МЕТОД

Теорема (Kratz, П. (2022))

Пусть

(C1) $F_{\vec{\xi}\,|\,\|\vec{\xi}\|}(\cdot \,|\, y)$ *невырожденно для всех* $y > 0$;

MRV-NORMEX МЕТОД

Теорема (Kratz, П. (2022))

Пусть

(C1) $F_{\vec{\xi}\,|\,\|\vec{\xi}\|}(\cdot\,|\,y)$ *невырожденно для всех* $y > 0$;

$(M_{\|\cdot\|})$ $\|\vec{\xi}\| \in 2RV_{\alpha,\rho}$ $\alpha > 0$, $\rho > 0$;

MRV-Normex метод

Теорема (Kratz, П. (2022))

Пусть

$(C1)$ $F_{\vec{\xi}\,|\,\|\vec{\xi}\|}(\cdot\,|\,y)$ *невырожденно для всех* $y > 0$;

$(M_{\|\cdot\|})$ $\|\vec{\xi}\| \in 2RV_{\alpha,\rho}$ $\alpha > 0$, $\rho > 0$;

(M_{Θ}) *найдется* $A(t) \to 0$, $|A(t)| \in \mathcal{RV}_{\beta}$, $\beta > 0$, *и*

$$\sup_{\mathbf{B}\in\mathcal{S}_1} \left| \mathrm{P}\left(\frac{\vec{\xi}}{\|\vec{\xi}\|} \in \mathbf{B} \,\middle|\, \|\vec{\xi}\| > t \right) - \mathrm{P}\left(\vec{\Theta} \in \mathbf{B}\right) \right| \underset{t\to\infty}{\sim} A(t).$$

MRV-NORMEX МЕТОД

Теорема (Kratz, П. (2022))

Пусть

$(C1)$ $F_{\vec{\xi}\,|\,\|\vec{\xi}\|}(\cdot\,|\,y)$ *невырожденно для всех* $y > 0$;

$(M_{\|\cdot\|})$ $\|\vec{\xi}\| \in 2RV_{\alpha,\rho}$ $\alpha > 0$, $\rho > 0$;

(M_{Θ}) *найдется* $A(t) \to 0$, $|A(t)| \in \mathcal{RV}_{\beta}$, $\beta > 0$, *и*

$$\sup_{\mathbf{B}\in\mathcal{S}_1} \left| \mathrm{P}\left(\frac{\vec{\xi}}{\|\vec{\xi}\|} \in \mathbf{B} \,\middle|\, \|\vec{\xi}\| > t \right) - \mathrm{P}\left(\vec{\Theta} \in \mathbf{B}\right) \right| \underset{t\to\infty}{\sim} A(t).$$

MRV-NORMEX МЕТОД

Теорема (Kratz, П. (2022))

Пусть

($C1$) $F_{\vec{\xi}\,|\,\|\vec{\xi}\|}(\cdot\,|\,y)$ *невырожденно для всех* $y>0$;

($M_{\|\cdot\|}$) $\|\vec{\xi}\|\in 2RV_{\alpha,\rho}$ $\alpha>0$, $\rho>0$;

(M_{Θ}) *найдется* $A(t)\to 0$, $|A(t)|\in\mathcal{RV}_{\beta}$, $\beta>0$, *и*

$$\sup_{\mathbf{B}\in\mathcal{S}_1}\left|\mathrm{P}\left(\frac{\vec{\xi}}{\|\vec{\xi}\|}\in\mathbf{B}\,\middle|\,\|\vec{\xi}\|>t\right)-\mathrm{P}\left(\vec{\Theta}\in\mathbf{B}\right)\right|\underset{t\to\infty}{\sim}A(t).$$

Тогда для всех $\alpha\in(2,3]$, $\beta>0$ *и* $\rho>0$, *найдется м.м.ф.* $L(\cdot)$ *такая, что*

$$\sup_{\mathbf{B}\in\mathcal{C}}\left|\mathrm{P}\left(\mathbf{S_n}\in\mathbf{B}\right)-GM_n(\mathbf{B})\right|\leq\left(n^{-\frac{1}{2}+\frac{3-\alpha}{\alpha}}+n^{-\frac{\beta}{\alpha}}+n^{-\min(1,\frac{\rho}{\alpha})}\right)L(n),$$

где $\mathcal{C}$ – *множество всех выпуклых, борелевских множеств* $\mathbb{R}^d$.

ПРИМЕР МНОГОМЕРНОГО ПАРЕТО $(\alpha = 2.3, n = 52, d = 3)$

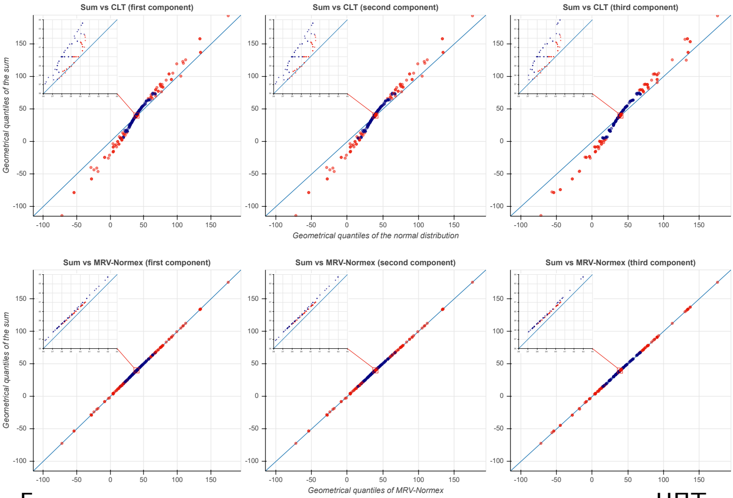


Рис.: Геометрические квантили для аппроксимации с помощью ЦПТ и $MRV-$Normex.

ПРИМЕР ПАРЕТО + КЛЕЙТОН $(\alpha = 2.3, n = 52, d = 2)$

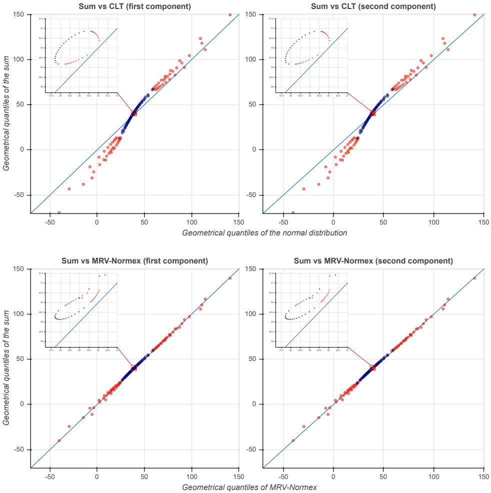


Рис.: Геометрические квантили для аппроксимации с помощью ЦПТ и MRV–Normex.

ПРИМЕР МНОГОМЕРНОГО ПАРЕТО ($\alpha = 1.5, n = 52, d = 3$)

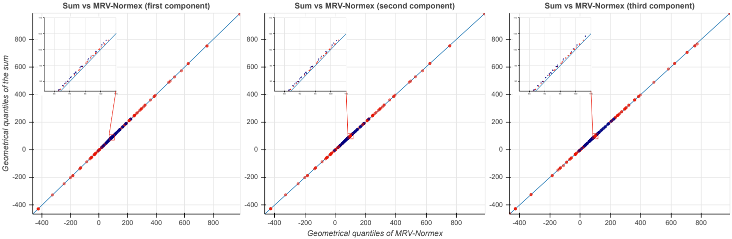


Рис.: Геометрические квантили для аппроксимации с помощью $MRV-$Normex.

Спасибо!

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ КВАНТИЛИ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ КВАНТИЛИ

Квантиль $q_\alpha(\xi)$ уровня $\alpha \in (0,1)$ можно определить как решение

$$q_\alpha(\xi) := \arg\min_{q \in \mathbb{R}} \{\mathbb{E}(|\xi - q| - |\xi|) - q(2\alpha - 1)\}$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ КВАНТИЛИ

Квантиль $q_\alpha(\xi)$ уровня $\alpha \in (0,1)$ можно определить как решение

$$q_\alpha(\xi) := \arg\min_{q \in \mathbb{R}} \{\mathbb{E}(|\xi - q| - |\xi|) - q(2\alpha - 1)\}$$

Опр. (Геометрической квантили)

Геометрическая квантиль $\vec{Q}_{\vec{\xi}}(\vec{u}) = (Q_{\xi,1}(\vec{u}), \ldots, Q_{\xi,d}(\vec{u}))$ уровня $\vec{u} \in B^d = \left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^d, \|\vec{v}\| < 1\right\}$ определяется как решение

$$\vec{Q}_F(\vec{u}) = \arg\min_{\vec{Q} \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}\{\|\vec{\xi} - \vec{Q}\| - \|\vec{\xi}\| - \langle \vec{u}, \vec{Q} \rangle\}$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ КВАНТИЛИ

Квантиль $q_\alpha(\xi)$ уровня $\alpha \in (0,1)$ можно определить как решение

$$q_\alpha(\xi) := \arg\min_{q\in\mathbb{R}}\{\mathbb{E}(|\xi - q| - |\xi|) - q(2\alpha - 1)\}$$

Опр. (Геометрической квантили)

Геометрическая квантиль $\vec{Q}_{\vec{\xi}}(\vec{u}) = (Q_{\xi,1}(\vec{u}), \dots, Q_{\xi,d}(\vec{u}))$ уровня $\vec{u} \in B^d = \left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^d, \|\vec{v}\| < 1\right\}$ определяется как решение

$$\vec{Q}_F(\vec{u}) = \arg\min_{\vec{Q}\in\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\{\|\vec{\xi} - \vec{Q}\| - \|\vec{\xi}\| - \langle \vec{u}, \vec{Q}\rangle\}$$

Теорема (Dhar, Chakraborty, Chaudhuri (2014))

Для всех $i = 1, \cdots, d$ все точки (пары квантилей) в i-ом 2-мерном графике будут лежать на прямой с наклоном 1, исходящей из 0, тогда и только тогда, когда два распределения равны.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ КВАНТИЛИ

Квантиль $q_\alpha(\xi)$ уровня $\alpha \in (0,1)$ можно определить как решение

$$q_\alpha(\xi) := \arg\min_{q\in\mathbb{R}}\{\mathbb{E}(|\xi - q| - |\xi|) - q(2\alpha - 1)\}$$

Опр. (Геометрической квантили)

Геометрическая квантиль $\vec{Q}_{\vec{\xi}}(\vec{u}) = (Q_{\xi,1}(\vec{u}), \dots, Q_{\xi,d}(\vec{u}))$ уровня $\vec{u} \in B^d = \left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^d, \|\vec{v}\| < 1\right\}$ определяется как решение

$$\vec{Q}_F(\vec{u}) = \arg\min_{\vec{Q}\in\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\{\|\vec{\xi} - \vec{Q}\| - \|\vec{\xi}\| - \langle\vec{u}, \vec{Q}\rangle\}$$

Теорема (Girard and Stupfler (2015))

Если $\mathbb{E}\|\vec{\xi}\|^2 < \infty$, *то*

$$\|\mathrm{Q}(\lambda\mathbf{u})\|^2(1-\lambda) \to \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}\Sigma - u^{\mathrm{T}}\Sigma u\right) \text{ при } \lambda \uparrow 1$$

КОГДА ГЕНИЙ ТЕРПИТ ПОРАЖЕНИЕ (Lowenstein)

КОГДА ГЕНИЙ ТЕРПИТ ПОРАЖЕНИЕ (Lowenstein)

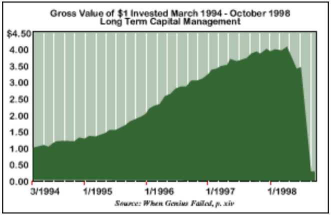
Long-Term Capital Management

Хедж-фонд (1994 – 1998).

КОГДА ГЕНИЙ ТЕРПИТ ПОРАЖЕНИЕ (Lowenstein)

Long-Term Capital Management

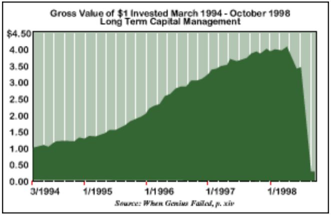
Хедж-фонд (1994 – 1998).



КОГДА ГЕНИЙ ТЕРПИТ ПОРАЖЕНИЕ (Lowenstein)

Long-Term Capital Management

Хедж-фонд (1994 – 1998).



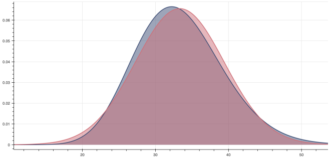
Bostrum and Circovic:

> *«The founders of LTCM later called the market conditions of 1998 a '10-sigma event'»*

КОГДА ГЕНИЙ ТЕРПИТ ПОРАЖЕНИЕ (Lowenstein)

Long-Term Capital Management

Хедж-фонд (1994 – 1998).



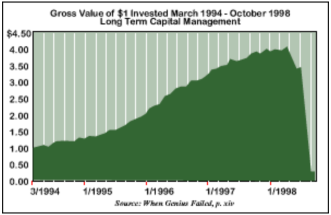
Bostrum and Circovic:

> *«The founders of LTCM later called the market conditions of 1998 a '10-sigma event'»*

КОГДА ГЕНИЙ ТЕРПИТ ПОРАЖЕНИЕ (Lowenstein)

Long-Term Capital Management

Хедж-фонд (1994 – 1998).



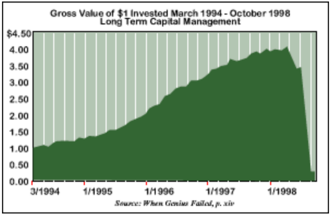
Bostrum and Circovic:

> *«The founders of LTCM later called the market conditions of 1998 a '10-sigma event'»*

КОГДА ГЕНИЙ ТЕРПИТ ПОРАЖЕНИЕ (Lowenstein)

Long-Term Capital Management

Хедж-фонд (1994 – 1998).



Bostrum and Circovic:

> *«The founders of LTCM later called the market conditions of 1998 a '10-sigma event'»*

Nassim Nicholas Taleb:

> *«Wittgenstein's ruler: Вы используете линейку, чтобы померить стол, или вы используете стол, чтобы померить линейку?»*